

捕食者具有阶段结构和基于比率捕食系统的定性分析^{*}

杨琦敏, 曾云辉, 高甜甜

(衡阳师范学院 数学与计算科学系, 湖南 衡阳 421008)

摘要: 研究了一类捕食者具有阶段结构和基于比率捕食系统的解的性态, 通过应用比较原理和分析方法获得了当 $-\tau \leq \theta < 0$ 时, 若 $x(\theta), y(\theta) \geq 0, x(0), y(0) > 0$, 则系统的解在 $t \geq 0$ 时是正的; 若 $ae^{-\tau} > av$ 时, 系统的任意正解是有界的; 若

$r > \frac{b}{m}$ 且 $ae^{-\tau} \frac{r - \frac{b}{m}}{a} > v$, 则系统是持久的。最后通过数值模拟阐述了所得结论的正确性。

关键词: 阶段结构; 正性; 持久性

中图分类号: O175.26

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2015)04-0097-06

在生物群落中, 大多数种群的成长都具有阶段结构。Aiello 和 Freedman 提出了著名的具有年龄结构的单种群模型, 这为后续研究具有阶段结构的模型奠定了重要的基础。近年来对具有阶段结构的捕食系统已有较多的研究^[1-3]。但是将捕食者分为两个阶段来考虑时, 没有考虑比率型功能性反应函数即捕食者对食饵功能性反应是其两种群的密度比值函数, 因此考虑具有阶段结构和基于比率的捕食系统更具有实际意义。

1 模型的提出

用 $x(t)$ 表示捕食者在时间 t 的密度, 用 $y(t), y_1(t)$ 分别表示成熟捕食者和不成熟捕食者在时间 t 的密度, r 表示被捕食者的内在增长率, a 是被捕食者密度依赖系数, $\frac{bx}{my+n}$ 为比率型功能性反应函数, 其中 m 为正常数, 表示的是捕食者对食饵的功能性反应是其两种群的密度比值函数, α 是转换率, τ 是常数时滞即对成熟者假设平均年龄, 该年龄作为一个常数时滞反映未成熟个体的时滞出生和降低未成熟个体的时滞出生以及降低未成熟个体到成熟个体的存活率, γ 是为成熟个体的死亡率, v, β 分别是成熟捕食个体的死亡率和种群内的竞争系数。因此, 笔者研究的捕食系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \left[r - ax(t) - \frac{by(t)}{my(t) + x(t)} \right], \\ \dot{y}(t) = ae^{-\tau} y(t - \tau) x(t - \tau) - vy(t) - \beta y^2(t), \\ \dot{y}_1(t) = \alpha x(t) y(t) - ae^{-\tau} y(t - \tau) x(t - \tau) - \gamma y_1(t). \end{cases}$$

该捕食系统的初始条件为:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \Phi(\theta) \geq 0, y(\theta) = \varphi_1(\theta) \geq 0, y_1(\theta) = \varphi_2(\theta) \geq 0, \\ \theta &\in [-\tau, 0], \Phi(0) > 0, \varphi_i(0) > 0, i = 1, 2, \end{aligned}$$

其中 $\Phi = (\Phi(\theta), \varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)) \in ([-\tau, 0], \mathbf{R}_+^3)$ 。

由于系统中的第三个方程可以化简为

* 收稿日期: 2014-03-13

修回日期: 2015-03-15

网络出版时间: 2015-3-24 13:53

资助项目: 湖南省“十二五”重点项目(湘教发[2011]76号); 湖南省大学生研究性学习与创新性实验计划项目(No. CX1308); 衡阳师范学院大学生研究性学习与创新性实验计划项目(No. CX1435); 衡阳市科技计划项目(No. 2014KJ22); 衡阳市社科基金项目(No. 2014D060)

作者简介: 杨琦敏, 男, 讲师, 研究方向为微分方程定性理论, E-mail: chj8121912@sina.com; 通信作者: 曾云辉, 讲师, E-mail: chj8121912@sina.com

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150324.1353.035.html>

$$y_1(t) = c(t)e^{-n},$$

其中

$$c(t) = \int \alpha e^n x(t)y(t) - \alpha e^{n(t-\tau)} x(t-\tau)y(t-\tau)dt + \tilde{c},$$

其中 $\tilde{c}$ 为常数,则

$$y_1(t) = e^{-n} \int \alpha e^n x(t)y(t) - \alpha e^{n(t-\tau)} x(t-\tau)y(t-\tau)dt + \tilde{c}e^{-n},$$

又 $x(t), y(t)$ 是由前两个方程确定,也就是说第三个方程是由前两个方程确定。

2 预备知识

定义 1 设在正常数 m, M , 且 $M > m$, 若对系统的任意解 $(x(t), y(t))$ 满足

$$\begin{aligned} m &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M, \\ m &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M, \end{aligned}$$

则称系统是持久的, 否则是不持久。

引理 1^[8] 考虑下面的微分方程

$$\dot{x}(t) = ax(t-\tau) - bx(t) - cx^2(t),$$

其中常数 $a, b, c, \tau > 0$, 如果对所有的 $t \in [-\tau, 0]$, 都有 $x(t) > 0$ 成立, 则有以下结论成立:

(I) 若 $a > b$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{a-b}{c}$;

(II) 若 $a \leq b$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

引理 2^[8] 考虑下面微分方程 $\dot{x}(t) = x(t)(d_1 - d_2 x(t))$, 其中 $d_2 > 0$ 且初值 $x(t_0)$ 为非负, 则有以下结论成立:

(I) 若 $d_1 > 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{d_1}{d_2}$;

(II) 若 $d_1 \leq 0$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

引理 3^[4] 设 $f(t, x)$ 与 $F(t, x)$ 都是在平面区域 G 上连续的纯量函数且它们所分别对应的两个方程都满足解存在唯一性定理的条件和不等式

$$f(t, x) \leq F(t, x), (t, x) \in G,$$

若 $x = \Phi(t), x = \varphi(t)$ 分别是下面两个一阶方程

$$\dot{x} = f(t, x)$$

和

$$\dot{x} = F(t, x)$$

经过同一点 $(t_0, x(t_0))$ 的解, 则有 $t \geq t_0$ 且 t 属于两者共同存在的区间时, 必有 $\Phi(t) \leq \varphi(t)$ 。

3 解的正性

定理 1 如果在 $-\tau \leq \theta < 0$ 时, $x(\theta), y(\theta) \geq 0, x(0), y(0) > 0$, 则系统的解在 $t \geq 0$ 时是正的。

证明 在任意时刻 $t > 0$, 存在 $x(t) > 0$, 对此, 由系统的第一方程可知

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = r - ax(t) - \frac{by(t)}{my(t) + x(t)},$$

对上式两边积分可得

$$\int_0^t \frac{1}{x(s)} dx(s) = \int_0^t \left(r - ax(s) - \frac{by(s)}{my(s) + x(s)} \right) ds,$$

由此可得

$$x(t) = x(0) \exp \left\{ \int_0^t \left[r - ax(s) - \frac{by(s)}{my(s) + x(s)} \right] ds \right\},$$

由初始条件 $x(0) > 0$ 可知,对任意的 $t > 0$,都有 $x(t) > 0$ 。

下面证明对于所有的 $t > 0$ 有 $y(t) > 0$,对于这个证明采用比较原理和迭代思想进行验证结论的正确性。

先考虑在 $[0, \tau]$ 上对任意 $t \in [0, \tau]$ 有 $t - \tau \in [-\tau, 0]$,因此有 $y(t - \tau) = \varphi_1(t - \tau) \geq 0$ 且 $y(\theta) = x(\theta)$,由此可以得到当 $t \in [0, \tau]$ 上有 $y(t - \tau) \geq 0$,同理可知当 $t \in [0, \tau]$ 时有 $x(t - \tau) \geq 0$,因此系统的第二个方程可以改写为

$$\dot{y}(t) \geq -vy(t) - \beta y^2(t),$$

对方程两边积分得

$$y(t) \geq y(0) \exp \left\{ - \int_0^t v + \beta y(s) ds \right\},$$

由初始条件 $y(0) > 0$ 易知对任意 $t \in [0, \tau]$ 有 $y(t) > 0$ 。

再考虑在 $[\tau, 2\tau]$ 上对任意 $t \in [\tau, 2\tau]$ 有 $t - \tau \in [0, \tau]$,由上述可以得到 $y(t - \tau) > 0, x(t - \tau) > 0$,从而可以得到对任意的 $t \in [\tau, 2\tau]$ 有 $y(t) > 0$ 。

以此类推,由数学归纳法,可知对任意的 $n = 1, 2, 3, \dots$,当 $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$ 时有 $y(t) > 0$,因此对任意的 $t \geq 0$,总有 $y(t) > 0$ 成立。证毕

4 解的有界性

定理 2 若 $are^{-\tau} > av$ 则对系统在初始条件的任意正解 $x(t), y(t)$ 存在一个 $T > 0$,对所有的 $t > T$,有

$$0 < x(t) < M_1, 0 < y(t) < M_2$$

成立,则说明该任意正解 $x(t), y(t)$ 是有界的,其中 $M_1 = \frac{r}{a}, M_2 = \frac{ae^{-\tau}M_1 - v}{\beta}$ 。

证明 假设 $z(t) = (x(t), y(t))$ 是捕食系统在初始条件下的任意正解,根据捕食系统的第一个方程,由解的正性可知

$$\dot{x}(t) \leq x(t)(r - ax(t)), t \geq t_0. \quad (1)$$

考虑辅助方程

$$\dot{u}(t) = u(t)(r - au(t)), \quad (2)$$

由于 $a > 0$,由引理 2 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \frac{r}{a}, M_1 = \frac{r}{a}.$$

设 $u^*(t)$ 是方程(2)满足初始条件 $\dot{u}(t_0) = x(t_0)$ 的解,则由比较原理可知,当 $t \geq t_0$ 时

$$x(t) \leq u^*(t),$$

因此有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} u^*(t) = M_1,$$

这表示 $x(t)$ 是最终有界的,且界为 M_1 ,即为任意常数 $\zeta > 0$,存在 $T_1 > 0$ 当 $t \geq T_1$ 时,

$$x(t) \leq M_1 + \zeta,$$

由此对 $t > T_1$ 有

$$\dot{y}(t) \leq ae^{-\tau}(M_1 + \zeta)y(t - \tau) - vy(t) - \beta y^2(t).$$

考虑辅助方程

$$\dot{w}(t) = ae^{-\tau}(M_1 + \zeta)w(t - \tau) - vw(t) - \beta w^2(t), \quad (3)$$

由假设条件 $are^{-\tau} > av$,可知当 $\zeta > 0$ 充分小时,有 $ae^{-\tau}(M_1 + \zeta) - v > 0$,所以由引理 1 对辅助方程的任意正解 $w(t)$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = \frac{ae^{-\tau}(M_1 + \zeta) - v}{\beta}.$$

设 $w(t)$ 是方程(3)满足初始条件 $w(s) = y(s)$ 对 $s \in [T_1 - \tau, T_1]$ 的解,由引理 3 可知

$$y(t) \leq w^*(t),$$

于是对 $t > T_1$ 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} w^*(t) = \frac{\alpha e^{-\gamma} M_1 - v}{\beta},$$

由于 $\zeta_1 > 0$ 的任意性, 令 $\zeta_1 \rightarrow 0$ 则有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \frac{\alpha e^{-\gamma} M_1 - v}{\beta},$$

令

$$M_2 = \frac{\alpha e^{-\gamma} M_1 - v}{\beta},$$

这表明 $y(t)$ 是最终有界的, 且有界为 M_2 。

证毕

5 系统的持久性

定理 3 假设 $r > \frac{b}{m}$ 且 $\alpha e^{-\gamma} m_1 > v$, 其中 $m_1 = \frac{r - \frac{b}{m}}{a}$, 则系统的任意正解 $(x(t), y(t))$ 有下式成立

$$\begin{aligned} m_1 &< \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) < M_1, \\ m_1 &< \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) < M_2, \end{aligned}$$

其中 $m_2 = \frac{\alpha e^{-\gamma} m_1 - v}{\beta}$, 则说明该系统是持久的。

证明 对任意正解 $(x(t), y(t))$ 由定理 4

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M_1, \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq M_2,$$

于是对任意充分小的 $\zeta > 0$, 存在 $T_0 > 0$ 。当 $t \geq T_0$ 时有

$$x(t) \leq M_1 + \zeta, y(t) \leq M_2 + \zeta, \frac{by(t)}{my(t)} \leq \frac{by(t)}{my(t) + x(t)},$$

对系统的第一个方程

$$\dot{x}(t) = x(t) \left(r - ax(t) - \frac{by(t)}{my(t) + x(t)} \right),$$

当 $t \geq T_0$ 时有

$$\dot{x} \geq x(t) \left(r - ax(t) - \frac{b}{m} \right).$$

考虑辅助方程

$$\dot{u}_1(t) = u_1(t) \left(r - au_1(t) - \frac{b}{m} \right),$$

由于 $r - \frac{b}{m} > 0$, 故由引理 2 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(t) = \frac{r - \frac{b}{m}}{a}.$$

设 $u_1^*(t)$ 是辅助方程满足初始条件 $u_1^*(T_0) = x(T_0)$ 的解, 则由引理 3 可知

$$x(t) \geq u_1^*(t),$$

于是可得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} u_1^*(t) = \frac{r - \frac{b}{m}}{a}.$$

令

$$m_1 = \frac{r - \frac{b}{m}}{a},$$

对任意的 $\zeta > 0$ 存在 $T_0 > 0$, 当 $t > T_0$ 时有 $x(t) \geq m_1 - \zeta$, 由 $\alpha e^{-\tau} m_1 > v$ 可知, 当 $\zeta > 0$ 充分小有

$$\alpha e^{-\tau} (m_1 - \zeta) > v.$$

由系统的第二个方程

$$\dot{y}(t) = \alpha e^{-\tau} x(t - \tau) y(t - \tau) - v y(t) - \beta y^2(t),$$

由上可得

$$y(t) \geq \alpha e^{-\tau} (m_1 - \zeta) y(t - \tau) - v y(t) - \beta y^2(t).$$

考虑辅助方程

$$\dot{w}_1(t) = \alpha e^{-\tau} (m_1 - \zeta) w(t - \tau) - v w(t) - \beta w^2(t),$$

设 $w_1(t)$ 是辅助方程满足初始条件 $w_1(\theta) = y(\theta), \theta \in [T_0 - \tau, T_0]$ 的解, 则由比较定理可得

$$y(t) \geq w_1^*(t).$$

对 $t \geq T_0$ 有

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \liminf_{t \rightarrow \infty} w_1^*(t) = \frac{\alpha e^{-\tau} m_1 - v}{\beta},$$

定理得证, 则该系统是持久的。

证毕

6 数值模拟

在这节, 首先给出一些数值模拟来进一步说明前面分析、讨论的正确性。取上述系统中 $r = 0.5, a = 0.5, b = 5, m = 10, v = 1, \beta = 1.5, \gamma = 0.5, \alpha = 5, \tau = 0.2$, 可得

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \left(0.5 - 0.5x(t) - \frac{5y(t)}{10y(t) + x(t)} \right), \\ \dot{y}(t) = 5e^{-0.1} x(t - 0.2) y(t - 0.2) - y(t) - 1.5y^2(t). \end{cases}$$

当 $(x(0), y(0)) = (0.5, 1)$ 和 $r > \frac{b}{m}$ 时, 通过计算先看上述系统被捕食者的变化(图 1)。

通过观察图 1 可得, 上述系统满足定理 5 的情况下是持久的。

取上述系统中 $r = 0.5, a = 0.5, b = 10, m = 10, v = 1, \beta = 1.5, \gamma = 0.5, \alpha = 5, \tau = 0.2$, 可得

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \left(0.5 - 0.5x(t) - \frac{10y(t)}{10y(t) + x(t)} \right), \\ \dot{y}(t) = 5e^{-0.1} x(t - 0.2) y(t - 0.2) - y(t) - 1.5y^2(t). \end{cases}$$

当 $(x(0), y(0)) = (0.5, 1)$ 和 $r < \frac{b}{m}$ 时, 通过计算先看上述系统被捕食者的变化(图 2)。

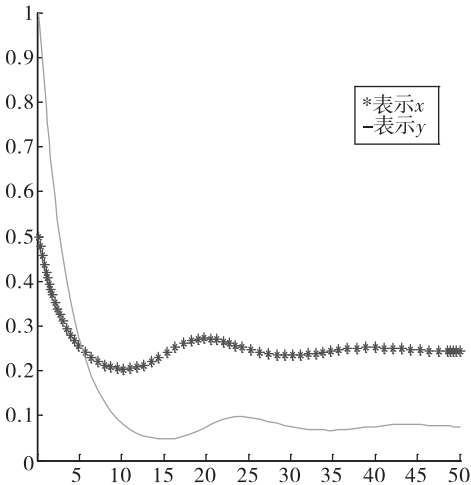


图 1 系统被捕食者的变化

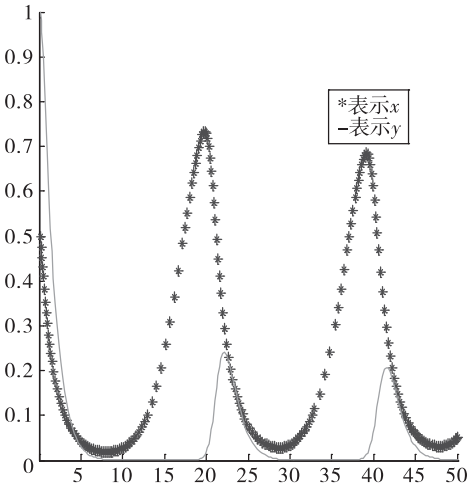


图 2 系统被捕食者的变化

通过图 2 可得, 上述系统不满足定理 5 的情况下是不持久的。

参考文献:

- [1] 郑丽丽, 宋新宇. 一类带有扩散和时滞的捕食与被捕食模型的渐进性质[J]. 应用数学学报, 2004, 27(02): 361-369.
Zheng L L, Song X Y. The asymptotical properties of a predator-prey model with time delay and dispersion[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2004, 27(02): 361-369.
- [2] 王豪, 郑丽丽. 一类具有阶段结构和时滞的捕食与被捕食系统[J]. 信阳师范学院学报: 自然科学版, 2004, 17(2): 140-145.
Wang H, Zheng L L. A predator-prey system with stage structure and delay[J]. Journal of Xinyang Normal University: Natural Science, 2004, 17(2): 140-145.
- [3] 师向云, 郭振. 一类具有实质和阶段结构的不是被捕时系统的全局分析[J]. 信阳师范学院学报, 2008, 21(01): 32-35.
Shi X Y, Guo Z. Analysis of a predator-prey system with stage structure and time delay[J]. Journal of Xinyang Normal University, 2008, 21(1): 32-35.
- [4] 廖晓钦. 稳定性理论的方法和应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1998.
- Liao X Q. Method and application of stability theory[M]. Wuhan: Huazhong University of Technology Press, 1998.
- [5] 赵名, 程荣福. 捕食者具有阶段结构和基于比率的捕食系统的正周期解[J]. 生物数学学报, 2010, 25(01): 88-96.
Zhao M, Chen R F. Positive periodic solution in a ratio-based predator-prey system with stage structure for predator[J]. Journal of Biomathematics, 2010, 25(1): 88-96.
- [6] 郭艳芬. 一类具有时滞与捕获的捕食与被捕食模型的定性分析[J]. 东北林业大学学报, 2009, 37(4): 81-84.
Guo Y F. Qualitative analysis of a predator-prey system with infection of prey population[J]. Journal of Northeast Forestry University, 2009, 37(4): 81-84.
- [7] 蓝仲雄, 李典澳. 数学生态学进展[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1994.
Lan Z X, Li D A. Mathematical ecology progress[M]. Chengdu: Chengdu University of Science Technology Press, 1994.
- [8] Wang W, Chen L. A predator-prey system with stage structure for predator[J]. Comput Math Appl, 1997, 33: 61-75.

Qualitative Analysis in a Ratio-Based Predator-Prey System with Stage Structure for Predator

YANG Qimin, ZENG Yunhui, GAO Tiantian

(Department of Mathematics and Computational Science, Hengyang Normal University, Hengyang Hunan 421008, China)

Abstract: In this paper, a predator-prey system in a ratio-based predator with state-structure for predator is investigated. By using methods of the comparison principle and analysis, some sufficient conditions are obtained if $-\tau \leq \theta < 0$, $x(\theta), y(\theta) \geq 0$, $x(0), y(0) > 0$, and then the solution of the system is positive for $t \geq 0$; If $ae^{-\tau} > av$, and then any positive solutions of system is bounded; and if $r > \frac{b}{m}$ and $ae^{-\tau} \frac{r-b}{a} > v$, then system is persistent. Finally, numerical simulation describes the conclusions are correct.

Key words: stage structure; positivity; persistence

(责任编辑 游中胜)

更正

因作者原因, 2015 年第 3 期 113 页第 3 行原文为“ $\prod_{\substack{x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1}} \frac{(x_1 + x_2)x_3}{(x_1 + x_2 + 1)^2} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{(x+1)^2} dx$ ”,

现需更正为“ $\prod_{\substack{x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1}} \frac{(x_1 + x_2)x_3}{(x_1 + x_2 + 1)^2} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{(x+1)^2} dx$ ”, 特此更正。

本刊编辑部