DOI:10.11721/cqnuj20150429

# $pq$ 阶 Cayley 图的反符号星控制数*

廖江东[1]，罗　明[2]

(1. 长江师范学院 数学与计算机学院，重庆 涪陵 408100；2. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715)

**摘要**：设 $G=(V,E)$ 是一个没有孤立顶点的图，如果一个函数 $f:E\to\{-1,1\}$ 满足 $f(E(v))\leqslant 0$ 对一切 $v\in V(G)$ 均成立，则称 $f$ 为图 $G$ 的一个反符号星控制函数，图 $G$ 的反符号星控制数定义为 $\gamma_{\mathrm{rss}}(G)=\max\{f(E)\mid f$ 为 $G$ 的反符号星控制函数$\}$。确定了 $pq(2<p<q$，且 $p,q$ 为互异的素数)阶群 $\Gamma$ 上 Cayley 图 $X(\Gamma,M)$ 的反符号星控制数 $\gamma_{\mathrm{rss}}(X(\Gamma,M))=-q$，$M$ 表示群 $\Gamma$ 的极小生成集。

**关键词**：反符号星控制函数；反符号星控制数；Cayley 图

**中图分类号**：O157.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2015)04-0110-03

文章中的图是无向简单图，未注明的符号在文献[1-3]中。

近年来，图的控制理论被人们广泛研究和应用，从而产生了许多图的控制概念，从图的点控制到边控制，再到全控制。1998 年美国图论学者 Haynes 等人为了全面系统地总结这些年来图论中一些重要结论出版了一本专著，从这些结论中发现关于图的点控制内容比较多，图的边控制结论很少。2007 年徐保根教授提出了符号边控制的概念，随后他又提出了符号圈控制、符号团控制和符号星控制等概念，并在 2013 年出版了专著[2]，图的边控制中有许多难题未解决，这些年图的控制数研究的主要内容是确定其界限，并确定了一些特殊图(例如路、圈、完全图、轮图和完全二部图等)的控制数的精确值，一般地确定一个图的控制数的精确值是困难的。

**定义 1**[1]　设 $G$ 为有限群，$M\subset G$，$M$ 是 $G$ 的一个生成集，记为 $G=\langle M\rangle$。若 $\forall x\in M$，$\langle M-x\rangle$ 是 $G$ 的真子群，则称 $M$ 是群 $G$ 的一个极小生成集。所谓生成集为 $M$ 的群 $G$ 上的 Cayley 图(无向图)用符号 $X=X(G,M)$ 表示，定义如下：

$$V(X)=G,E(X)=\{(g,gs)\mid g\in G,s\in M\cup M^{-1}\}。$$

2008 年，徐保根教授提出了反符号星控制数的定义，确定了其上界，同时也确定了完全图和完全二部图的反符号星控制数，对一般图的反符号星控制数的精确值还未得到解决。本文研究 $pq(2<p<q$，且 $p,q$ 为互异的素数)阶群 $\Gamma$ 上 Cayley 图 $X(\Gamma,M)$ 的反符号星控制数 $\gamma_{\mathrm{rss}}(X(\Gamma,M))=-q$，$M$ 表示群 $\Gamma$ 的极小生成集，$X(\Gamma,M)$ 表示群 $\Gamma$ 上对生成集 $M$ 的 Cayley 图。图 $G=(V,E)$，$v\in V$，$v$ 点在 $G$ 中的边邻域简记为 $E(v)=\{uv\in E\mid u\in V\}$。

**定义 2**[4]　设 $G=(V,E)$ 是一个没有孤立顶点的图，如果一个函数 $f:E\to\{-1,1\}$ 满足 $f(E(v))\leqslant 0$ 对一切 $v\in V(G)$ 均成立，则称 $f$ 为图 $G$ 的一个反符号星控制函数，图 $G$ 的反符号星控制数定义为 $\gamma_{\mathrm{rss}}(G)=\max\{f(E)\mid f$ 为 $G$ 的反符号星控制函数$\}$。

通过上述定义，显然有：

**引理 1**　设 $f$ 是图 $G$ 的反符号星控制函数，对于每个奇度点 $v\in V(G)$ 有 $\sum\limits_{e\in E(v)}f(e)=-1$，每个偶度点 $u\in V(G)$ 有 $\sum\limits_{e\in E(u)}f(e)=0$，则 $f$ 是图 $G$ 的最大反符号星控制函数。

**引理 2**[3]　$pq(2<p<q$，且 $p,q$ 为互异的素数)阶群 $\Gamma$ 包含唯一的 $q$ 阶正规子群。

**定理 1**　$pq$ $(2<p<q$，且 $p,q$ 为互异的素数)阶 Cayley 图 $X(\Gamma,M)$ 的反符号星控制数 $\gamma_{\mathrm{rss}}(X(\Gamma,M))=-q$，其中 $M$ 表示群 $\Gamma$ 的极小生成集。

* **收稿日期**：2014-04-11　　**修回日期**：2015-03-19　　**网络出版时间**：2015-5-15 10:55

**资助项目**：教育部春晖计划(No. Z2014080)；国家自然科学基金(No. 61174022)

**作者简介**：廖江东，男，讲师，研究方向为图论，E-mail：ljd88073@163.com

**网络出版地址**：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150515.1055.002.html

**证明**　根据引理 2 有极小生成集 $M$ 中必包含有一个阶为 $p$ 的元素 $a$，下面对极小生成集 $M$ 中包含元素的阶分成两类：

**情况 1**　极小生成集 $M$ 中含有阶为 $q$ 的元素 $b$。

根据引理 2，$\Gamma=\langle a,b\rangle$，不妨假设 $M=\{a,b\}$，设 $B=\langle b\rangle$，则 $B\lhd\Gamma$，$\Gamma/B$ 为 $P$-群，又 $\Gamma=\langle a,b\rangle$，故 $Y=\{Ba\mid a\in M\}$是群 $\Gamma$ 的一个极小生成集，$X(\Gamma/B,Y)$是 Hamilton 图，记$(B,Ba,\cdots,Ba^{p-1},B)$为 $X(\Gamma/B,Y)$的一个 Hamilton 圈，于是 $\Gamma/B=\{B,Ba,\cdots,Ba^{p-1}\}\,|\Gamma/B|=p$，且 $Aa^i=(Ba^{i-1})(Bb^i)=Ba^{i-1}b^i$，$i=1,2,\cdots,p$，$a\in M$，并令 $a^p=a^0=e$。由 $X(\Gamma/B,Y)$的路$\{B,Ba,\cdots,Ba^{p-1}\}$可导出 $X(\Gamma,M)$的一条路 $S_0$：$S_0=(e,b^{k_1}a,b^{k_2}a^2,\cdots,b^{k_{p-1}}a^{p-1})$，其中 $0\leqslant k_i\leqslant q-1$。

因为用元 $b$ 左乘群 $\Gamma$ 的每一个元的变换是图 $X(\Gamma,M)$的一个自同构，故由路 $S_0$ 可得 $X(\Gamma,M)$的路 $S_1,S_2,\cdots,S_{q-1}$，

$$S_1=(b,b^{k_1+1}a,b^{k_2+1}a^2,\cdots,b^{k_{p-1}+1}a^{p-1}),$$
$$S_2=(b^2,b^{k_1+2}a,b^{k_2+2}a^2,\cdots,b^{k_{p-1}+2}a^{p-1}),$$
$$\vdots$$
$$S_{q-1}=(b^{q-1},b^{k_1+q-1}a,b^{k_2+q-1}a^2,\cdots,b^{k_{p-1}+q-1}a^{p-1})。$$

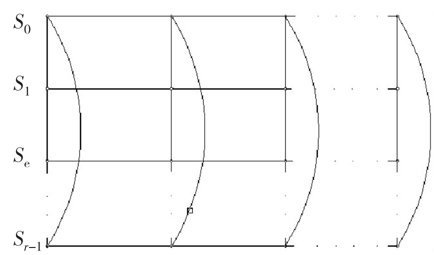


**图 1　由路得到的** Cayley **图** $X(\Gamma,M)$

这里 $b$ 的指数取模 $q$，由路 $S_0,S_1,S_2,\cdots,S_{q-1}$ 可得到 Cayley 图 $X(\Gamma,M)$(图 1)。

**情况 2**　极小生成集 $M$ 中全部元素的阶为 $p$。

设元素 $a$ 的阶为 $p$，$B$ 是群 $\Gamma$ 阶为 $q$ 的唯一正规子群，则群 $\Gamma$ 中一定含有元素 $c$ 使得 $c\in a^iB$，即 $c=a^ib$，$i=1,2,\cdots,p-1$，$b$ 是群 $\Gamma$ 中阶为 $q$ 的元，由于 $b=a^{-i}c$，则 $\Gamma=\langle a,b\rangle=\langle a,c\rangle$，因此不妨假设 $M=\{a,c\}$。根据引理 2，对某个正整数 $t$，$t^p\equiv1(\bmod q)$，$t$ 模 $q$ 不余 1，$a^{-1}ba=b^t$，$b^q=a^p=e$，得到路 $S_0$，

$$S_0=(b,ba,\cdots,ba^{p-1-i},b^{t+1}a^{p-1},b^{t+1}a^{p-2},\cdots,b^{t+1}a^{p-i})。$$

因为用元 $b^{t+1}$ 左乘群 $\Gamma$ 的每一个元的变换是图 $X(\Gamma,M)$的一个自同构，故由路 $S_0$ 可导出 $X(\Gamma,M)$的路 $S_1$，$S_2,\cdots,S_{q-1}$，

$$S_1=(b^{(t+1)+1},b^{(t+1)+1}a,\cdots,b^{(t+1)+1}a^{p-1-i},b^{2(t+1)}a^{p-1},b^{2(t+1)}a^{p-2},\cdots,b^{2(t+1)}a^{p-i}),$$
$$S_2=(b^{2(t+1)+1},b^{2(t+1)+1}a,\cdots,b^{2(t+1)+1}a^{p-1-i},b^{3(t+1)}a^{p-1},b^{3(t+1)}a^{p-2},\cdots,b^{3(t+1)}a^{p-i}),$$
$$\vdots$$
$$S_{q-1}=(b^{(q-1)(t+1)+1},b^{(q-1)(t+1)+1}a,\cdots,b^{(q-1)(t+1)+1}a^{p-1-i},a^{p-1},a^{p-2},\cdots,a^{p-i})。$$

这里 $b$ 的指数取模 $q$，由路 $S_0,S_1,S_2,\cdots,S_{q-1}$ 可得到 Cayley 图 $X(\Gamma,M)$(图 1)。

综合上面两种情况的讨论，已将 Cayley 图 $X(\Gamma,M)$构造出来了，下面将 Cayley 图 $X(\Gamma,M)$上的边进行分类，$A_{ij}$ 表示在路 $S_i$ 上的第 $j$ 条边，其中 $i=0,1,2,\cdots,q-1$，$j=1,2,\cdots,p-1$，$B_{lm}$ 表示由路 $S_0$ 上第 $l$ 个点通过 $b$ 生成的第 $m$ 条边，其中 $l=1,2,\cdots,p$，$m=1,2,\cdots,q-1$，$C_{lq}$ 表示由路 $S_0$ 上第 $l$ 个点通过 $b$ 生成的第 $q$ 条边，其中 $l=1,2,\cdots,p$，则 Cayley 图 $X(\Gamma,M)$边集 $E(X(\Gamma,M))=(\bigcup\limits_{i=0}^{q-1}\bigcup\limits_{j=1}^{p-1}A_{ij})\cup(\bigcup\limits_{l=1}^{p}\bigcup\limits_{m=1}^{q-1}B_{lm})\bigcup\limits_{l=1}^{p}C_{lq}$。

定义反符号星控制函数 $f$：$E(X(\Gamma,M))\to\{-1,1\}$，

$$f(e)=\begin{cases}(-1)^j,e\in A_{ij},i=0,\\-1,e\in A_{ij},i=q-1,\\(-1)^{j+1},e\in A_{ij},1\leqslant i\leqslant q-2,\\-1,e\in B_{lm},l=1,\\(-1)^m,e\in B_{lm},2\leqslant l\leqslant p,\\1,e\in C_{lq},1\leqslant l\leqslant p-1,\\1,e\in C_{lq},l=p。\end{cases}$$

因此，每个偶度点 $u\in V(X(\Gamma,M))$ 有 $\sum\limits_{e\in E(u)} f(e)=0$，每个奇度点 $v\in V(X(\Gamma,M))$ 有 $\sum\limits_{e\in E(v)} f(e)=-1$，根据引理 1 有 $f$ 是一个最大反符号星控制函数，则 $\gamma_{rss}(X(\Gamma,M))=-q$。 证毕

例如：当 $p=5,q=7$ 时，$pq$ 阶 Cayley 图 $X(\Gamma,M)$ 的反符号星控制数 $\gamma_{rss}(X(\Gamma,M)) = -q = -7$（图 2）。

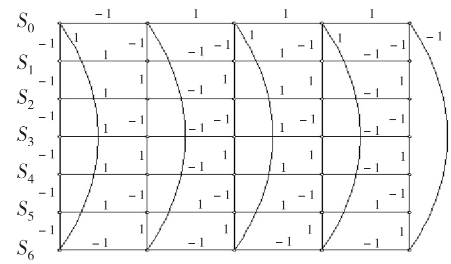

**图 2 $p=5,q=7$ 时，$pq$ 阶 Cayley 图 $X(\Gamma,M)$ 的标号**


**参考文献：**

[1] J Bondy A, Murty U S R. Graph theory[M]. Springer Series: Graduate Texts in Mathematics, 2008.

[2] 徐保根. 图的控制与染色理论[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2013.
Xu B G. Theory of domination and coloring in graph[M]. Wuhan: Huazhong University of Science Technology Press 2013.

[3] 徐明曜. 有限群导引[M]. 北京：科学出版社，1987.
Xu M Y. Finite group theory[M]. Beijing: Science Press, 1987.

[4] 赵华，徐保根，赵金凤，等. 关于图的反符号星控制数[J]. 华东交通大学学报，2008(5)：81-83.
Zhao H, Xu B G, Zhao J F, et al. On reverse signde star domination in graphs[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2008 (5): 81-83.

[5] Xu B G. On signed edge domination number of graphs[J]. Discrete Math, 2001, 239: 179-189.

[6] Saei R, Sheikholeslami S M. Signed star k-subdomination numbers in graphs[J]. Discrete Appl Math, 2008, 156: 3066-3070.

[7] Jahanbekam S. A comment to: two classes of edge domination in graphs[J]. Discrete Appl Math, 2009, 157: 400-401.

[8] Wang C. The signed star domination numbers of the Cartesian product[J]. Discrete Appl Math, 2007, 155: 1497-1505.

[9] Xu B G. On edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math, 2005, 294: 311-316.

[10] Xu B G. Two classes of edge domination in graphs[J]. Discrete Math, 2006, 154: 1541-1546.

[11] 徐保根. 关于图的符号星控制数[J]. 华东交通大学学报，2004 (4)：116-118.
Xu B G. On signde star domination in graphs[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2004 (4): 116-118.

[12] 徐保根. 两类图的符号星控制数[J]. 华东交通大学学报，2005(4)：146-148.
Xu B G. On signde star domination in graphs[J]. Journal of East China Jiaotong University, 2005(4): 146-148.


## The Reverse Signed Star Domination Number on Cayley Graphs of Order *pq*


LIAO Jiangdong[1], LUO Ming[2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Yangtze Normal University, Fuling Chongqing 408100;
2. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)



**Abstract**: Let $G=(V,E)$ be a graph without isolated vertices, a function $f:E\rightarrow\{-1,1\}$ is said to be a reverse signed star domination function of $G$ if $f(E(v))\leqslant 0$ holds for every $v\in V(G)$, $\gamma_{rss}(G)=\max\{f(E)\mid f$ is a reverse signed star domination function of $G\}$ is called the reverse signed star domination number of $G$. In this paper we determine the reverse signed star domination number $\gamma_{rss}(X(\Gamma,M))=-q$ on Cayley graphs $X(\Gamma,M)$ of order $pq(2<p<q, p, q$ are different primes), $M$ denote group $\Gamma$ of minimal generating set.



**Key words**: reverse signed star domination function; reverse signed star domination number; Cayley graphs


（责任编辑 游中胜）