运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20150502

带有恶化效应和维修恶化的单机工期指派问题*

高　洁，赵玉芳
(沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034)

摘要：研究了同时带有恶化工件和机器恶化维修的单机工期指派问题。工件的实际加工时间是与工件基本加工时间和工件在排序中的实际加工位置相关的一般函数。机器维修时间与其开始维修时间有关，是其线性恶化函数。研究的目标函数是加权提前、延误和工期之和，目的是确定工件的最优加工顺序、公共工期及维修位置，使目标函数最小。将此问题转化为指派问题，从而证明了该问题在多项式时间内是可解的。对于问题的一种特殊情况进一步给出了一个复杂性为 $O(n^2\log n)$ 的最优算法。

关键词：单机；排序；恶化；维修；工期指派
中图分类号：O223　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2015)05-0026-06

在实际生产过程中，工件的实际加工时间不仅与工件本身有关，也与其在机器上所排的实际加工位置有关。Mosheiov[1] 最早提出了工件的实际加工时间是由工件基本加工时间和位置决定的模型，即工件 J_j 排在第 r 个位置加工的实际加工时间为 $p_{jr}=p_jr^a$（其中 $a>0$），并给出了最大完工时间和总完工时间的多项式时间算法。Kuo 和 Yang[2] 研究了带有恶化效应和维修的单机排序问题。Mosheiov[3] 对流水作业与位置相关的恶化排序问题进行了研究。Gordon[4] 研究了实际加工时间为 $p_{jr}=p_ja^{r-1}$ 的排序问题，其中 $a>1$，分别证明了最大完工时间和总完工时间问题具有多项式时间最优算法。Biskup[5]，Rustogi 和 Strusevich[6] 分别对加工时间与工件位置相关的排序问题进行了综述，并对加工时间为 $p_{jr}=p_jg(r)$ 的问题进行研究，其中 $g(r)$ 表示工件在第 r 个位置加工时所对应的位置函数。Zhao 和 Tang[7] 研究了与工件位置相关的一般函数的排序问题，给出了其工期指派问题时间复杂性为 $O(n^3)$ 的多项式时间最优算法。

在生产过程中，由于机器加工过程中磨损等原因，使得工件的实际加工时间可能会逐渐变大，人们并不希望看到这样的结果，所以在工件恶化的情况下常常会对机器进行维修，维修虽然会花费一些时间，但是维修之后，工件的加工时间将会变小，这样维修就变得十分有必要了。Lee 和 Leon[8] 提出了一个维修时间变化的模型，给出维修时间是维修开始时间有关的线性函数，即维修的开始时间越晚，机器的维修时间就会越长。通过维修，机器可以回到初始状态，也就是维修之后的工件位置将从 1 开始重新计算。Mosheiov 和 Oron[9] 把维修时间变化的模型和工期指派问题结合在一起，对目标函数是加权总提前、延误和工期之和的问题进行了研究。Mosheiov 和 Sidney[10] 研究了维修时间是与维修位置相关的公共工期排序问题，证明了公共工期指派问题是多项式时间可解的，并给出了 $O(n^4)$ 多项式时间算法。Yang 和 Hsu[11] 研究了工件带有恶化效应且机器带有恶化维修的单机工期指派问题，给出了 $O(n^4)$ 多项式时间算法。

本文将工件位置恶化与机器恶化维修环境结合，研究维修中断重复模型，即工件是不可恢复的。也就是若在某个工件未加工完成的情况下进行维修，维修之后工件需要重新加工。研究的目的是同时确定工件的最优加工顺序、最优公共工期及机器的维修位置，使加权总提前、延误惩罚及公共工期之和最小。

1 问题描述

假设给定 n 个工件 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$。工件 J_j 的实际加工时间为 $p_{jr}=p_jg_j(r)$，其中 p_j 为 J_j 的基本加工

* **收稿日期**：2014-05-06　　**修回日期**：2015-05-15　　**网络出版时间**：2015-05-15 12:45
资助项目：辽宁省教育厅科学技术研究项目(No. L2014433)
作者简介：高洁，女，研究方向为组合最优化，E-mail：799294635@qq.com；**通信作者**：赵玉芳，副教授，E-mail：yfzhao2004@163.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150515.1245.029.html

时间；$g_j(r)$为第j个工件与位置r相关的函数。本文研究的是维修中断重复模型，即工件是不可恢复的。机器的维修时间为$f(t)=b+ct$，其中$b>0,c\geqslant 0,t$为机器的维修开始时间。在维修之后机器变为原始状态，此时工件的加工位置重新计算。即若机器在加工完第i个工件之后进行维修，那么工件J_j在排序中排在第$r\,(r>i)$个位置的实际加工时间为$p_{jr}=p_j g_j(r-i)$。

对于给定的一个加工顺序，C_j表示J_j的完工时间；称$E_j=\max\{0,d_j-C_j\}$为J_j的提前时间，$E_j>0$时，称其为提前工件；$T_j=\max\{0,C_j-d_j\}$为其延误时间，$T_j>0$时称J_j为延误工件；d表示工件的公共工期，也就是所有工件的工期相同，即$d_j=d,j=1,2,\cdots,n$。

工件带有位置恶化及机器恶化维修的单机排序问题，文中假设机器最多可以进行一次维修，以确定工件的加工顺序及最优公共工期，使加权总提前、延误惩罚及工期之和最小。运用三参数表示法[12]表示为

$$1\left|ma,p_{jr}=p_j g_j(r)\right|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d),$$

其中α,β,γ为正常数，ma表示机器具有维修情况。

2 主要结论

下面给出关于机器带有维修的公共工期指派问题的一些重要结论。

引理1　在$1\left|ma,p_{jr}=p_j g_j(r)\right|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)$最优排序的加工过程中，第一个工件的开始加工时间为零，且任意两个工件无空闲。

引理2　在问题$1\left|ma,p_{jr}=p_j g_j(r)\right|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)$的最优排序中，工期$d$一定不会取在任一工件加工过程中的某时刻。

证明　假设存在一个最优排序$\pi=(J_{[1]},J_{[2]},J_{[3]},\cdots,J_{[n]})$，其中工期$d$取在工件$J_{[k]}$的加工过程中，即$C_{[k-1]}<d<C_{[k]}$，且机器在第$i$个工件后进行维修，那么工件$J_{[k]}$可能在机器的维修之前也可能在维修之后。先讨论工件$J_{[k]}$在维修之后，即$k>i$时（如图1）。

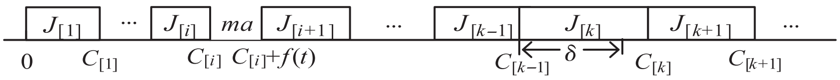

图1　排序π的甘特图

Fig.1　The Gantt chart of sequence π

由于$k>i$，此时有$C_{[k]}=C_{[k-1]}+p_{[k]}g_{[k]}(k-i)$，设$\delta=d-C_{[k-1]}$，显然$0<\delta<p_{[k]}g_{[k]}(k-i)$，且$d=\delta+\sum_{j=1}^{i}p_{[j]}g_{[j]}(j)+f(t)+\sum_{j=i+1}^{k-1}p_{[j]}g_{[j]}(j-i)$。又由假设，机器的维修在$t=C_{[i]}$时刻开始，机器的维修时间为$f(t)=b+ct=b+c\sum_{j=1}^{i}p_{[j]}g_{[j]}(j)$。

由图1可知，工件$J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[i]},\cdots,J_{[k-1]}$为提前工件，工件$J_{[k]},J_{[k+1]},\cdots,J_{[n]}$为延误工件，则有：

$$E_{[h]}=\delta+\sum_{j=h+1}^{i}p_{[j]}g_{[j]}(j)+f(t)+\sum_{j=i+1}^{k-1}p_{[j]}g_{[j]}(j-i),h=1,\cdots,i-1,i,$$

$$E_{[h]}=\delta+\sum_{j=h+1}^{k-1}p_{[j]}g_{[j]}(j-i),h=i+1,\cdots,k-1,$$

$$T_{[h]}=\sum_{j=k}^{h}p_{[j]}g_{[j]}(j-i)-\delta,h=k,k+1,\cdots n。$$

故加权提前、延误和工期的之和为

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)=\sum_{j=1}^{k-1}\alpha E_{[j]}+\sum_{j=k}^{n}\beta T_{[j]}+n\gamma d=$$

$$\delta[\alpha(k-1)-\beta(n-k+1)+\gamma n]+\alpha[bi+\sum_{j=1}^{i}(j-1+ci)p_{[j]}g_{[j]}(j)+\sum_{j=i+1}^{k-1}(j-1)p_{[j]}g_{[j]}(j-i)]+$$

$$\beta\sum_{j=k}^{n}(n-j+1)p_{[j]}g_{[j]}(j-i)+n\gamma[b+\sum_{j=1}^{i}(1+c)p_{[j]}g_{[j]}(j)+\sum_{j=i+1}^{k-1}p_{[j]}g_{[j]}(j-i)]。$$

若记：

$$A=[\alpha(k-1)-\beta(n-k+1)+\gamma n],$$

$$B=\alpha[bi+\sum_{j=1}^{i}(j-1+ci)p_{[j]}g_{[j]}(j)+\sum_{j=i+1}^{k-1}(j-1)p_{[j]}g_{[j]}(j-i)]+$$

$$\beta\sum_{j=k}^{n}(n-j+1)p_{[j]}g_{[j]}(j-i)+n\gamma[b+\sum_{j=1}^{i}(1+c)p_{[j]}g_{[j]}(j)+\sum_{j=i+1}^{k-1}p_{[j]}g_{[j]}(j-i)],$$

则 $Z=A\delta+B$。因此对任意一个已知排序，A，B 为常数，Z 是与 δ 相关的线性函数，即当 $\delta=0$ 或 $\delta=p_{[k]}g_{[k]}(k-i)$ 时，目标函数 Z 具有最小值。

同理，当 $k\leqslant i$ 时，工件 $J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[k-1]}$ 为提前工件，工件 $J_{[k]},J_{[k+1]},\cdots,J_{[i]},\cdots,J_n$ 为延误工件，则有：

$$E_{[h]}=\delta+\sum_{j=h+1}^{k-1}p_{[j]}g_{[j]}(j-i),h=1,\cdots,k-1,$$

$$T_{[h]}=\sum_{j=k}^{h}p_{[j]}g_{[j]}(j-i)-\delta,h=k,k+1,\cdots,i,$$

$$T_{[h]}=\sum_{j=k}^{i}p_{[j]}g_{[j]}(j)+f(t)+\sum_{j=i+1}^{h}p_{[j]}g_{[j]}(j-i)-\delta,h=i+1,\cdots,n-1,n。$$

而公共工期 $d=\delta+\sum_{j=1}^{k-1}p_{[j]}g_{[j]}(j)$，故加权提前、延误和工期之和为

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)=\sum_{j=1}^{k-1}\alpha E_{[j]}+\sum_{j=k}^{n}\beta T_{[j]}+n\gamma d=$$

$$\delta[\alpha(k-1)-\beta(n-k+1)+\gamma n]+\alpha\sum_{j=1}^{i}(j-1)p_{[j]}g_{[j]}(j)+\beta[(n-i)b+c\sum_{j=1}^{i}p_{[j]}g_{[j]}(j)+$$

$$\sum_{j=k}^{i}(i-j+1)p_{[j]}g_{[j]}(j)+\sum_{j=i+1}^{n}(n-j+1)p_{[j]}g_{[j]}(j-i)]+n\gamma\Big[\sum_{j=1}^{k-1}p_{[j]}g_{[j]}(j)\Big]。$$

由此可知，Z 也是与 δ 相关线性函数，即当 $\delta=0$ 或 $\delta=p_{[k]}g_{[k]}(k-i)$ 时，目标函数 Z 具有最小值。

综上可知，最优排序中的最优工期必为某个工件的开始加工时间或完工时间，最优工期 d 不会在某一个工件的加工时间内。 证毕

引理 3 对于问题 $1\Big|ma,p_{jr}=p_jg_j(r)\Big|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)$ 的任意排序 π，若 $\beta\geqslant\gamma$ 时，则存在工件的最优公共工期 $d=C_{[k]}$，其中 $k=\lceil n(\beta-\gamma)/(\alpha+\beta)\rceil$；否则，最优工期 $d=0$。

证明 由引理 2 可知，对于任意排序 π，最优工期 d 一定为某工件的完工时间或某工件的开始加工时间。那么最优工期只能有下面 3 种情况：$d=0$，$d=S_{[i+1]}=C_{[i]}+f(t)$ 及 $d=C_{[k]}$。下面分别讨论。

1) 首先证明当最优工期 $d=S_{[i+1]}=C_{[i]}+f(t)$ 时，不会好于 $d=C_{[i]}$。

假设当最优工期 $d=S_{[i+1]}=C_{[i]}+f(t)$ 时，目标函数值为 Z，当工期 $d'=C_{[i]}$ 时，目标函数值为 Z'，当工期 $d''=C_{[i+1]}=C_{[i]}+f(t)+p_{[i+1]}$ 时，目标函数值为 Z''。

由 d 为最优工期，有 $Z''-Z=\alpha ip_{[i+1]}-\beta(n-i)p_{[i+1]}+\gamma np_{[i+1]}\geqslant0$，即

$$\alpha i-\beta(n-i)+\gamma n\geqslant0 \tag{1}$$

而 $Z'-Z=-\alpha if(t)+\beta(n-i)f(t)-\gamma nf(t)=-(\alpha i-\beta(n-i)+\gamma n)f(t)$，因为 $f(t)>0$，由(1)式可知，$Z'-Z\leqslant0$，结论成立。

2) 下面证明 $d=C_{[k]}$，其中 $k=\lceil n(\beta-\gamma)/(\alpha+\beta)\rceil$；或 $d=0$。

由上述分析，不妨设最优公共工期 $d=C_{[k]}$。则对于工期增加 $\delta>0$ 时，变化后与变化前的目标函数变化量为

$$\Delta Z_1=\alpha k\delta+n\gamma\delta-\beta(n-k)\delta=((\alpha+\beta)k+(\gamma-\beta)n)\delta。\tag{2}$$

相反地，对于工期减少 $\delta>0$ 时，变化后与变化前的目标函数变化量为

$$\Delta Z_2=-\alpha(k-1)\delta-n\gamma\delta+\beta(n-k+1)\delta=-((\alpha+\beta)k-(\alpha+\beta)-(\gamma-\beta)n)\delta。\tag{3}$$

由 $d=C_{[k]}$ 是最优工期，所以 $\Delta Z_1\geqslant0$，$\Delta Z_2\geqslant0$，由(2)，(3)式分别得到 $k\geqslant\frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta}$，$k\leqslant\frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta}+1$。由 k 为

正整数知，当 $\beta \geqslant \gamma$ 时，k 为大于或等于 $\frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta}$ 的最小正整数，即当 $\beta \geqslant \gamma$ 时，$k=\left\lceil \frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta} \right\rceil$。而对于 $\beta<\gamma$ 的情况，比较 $d=0$ 与 $d'=C_{[1]}$。设 $d=0$ 时目标函数值为 Z，$d'=C_{[1]}$ 时目标函数值为 Z'。那么有 $Z'-Z=-nC_{[1]}\beta+\gamma nC_{[1]}=nC_{[1]}(\gamma-\beta)>0$，也就是说 $\beta<\gamma$ 时，最优工期 $d=0$。　证毕

3 最优值求解

由引理 3 可知，当 $\beta<\gamma$ 时，工件的最优工期为 $d=0$，因此只讨论 $\beta \geqslant \gamma$ 的情况即可。由 k 的取值只与工件的加权系数有关，与工件加工顺序无关，对于任何排序，d 一定取在第 k 个加工工件的完工时间。那么在问题 $1\left| ma, p_{jr}=p_j g_j(r) \right| \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)$ 中，只讨论工件加工顺序及维修位置即可。当机器的维修位置在工件 $J_{[k]}$ 之前（见图 1），即 $i<k$ 时，对于所求目标函数有

$$\begin{aligned}
Z=&\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)=\alpha\Big[\sum_{j=1}^{i}(d-C_{[j]})+\sum_{j=i+1}^{k}(d-C_{[j]})\Big]+\beta\sum_{j=k+1}^{n}(C_{[j]}-d)+\\
&n\gamma\Big[\sum_{j=1}^{i}p_{[j]}g_{[j]}(j)+\sum_{j=i+1}^{k}p_{[j]}g_{[j]}(j-i)+(b+c\sum_{j=1}^{i}p_{[j]}g(j))\Big]=\\
&\alpha\Big[\sum_{j=1}^{i}(j-1)p_{[j]}g_{[j]}(j)+\sum_{j=i+1}^{k}(j-1)p_{[j]}g_{[j]}(j-i)+i(b+c\sum_{j=1}^{i}p_{[j]}g_{[j]}(j))\Big]+\\
&\beta\sum_{j=k+1}^{n}(n-j+1)p_{[j]}g_{[j]}(j-i)+n\gamma\Big[\sum_{j=1}^{i}p_{[j]}g_{[j]}(j)+\sum_{j=i+1}^{k}p_{[j]}g_{[j]}(j-i)+(b+c\sum_{j=1}^{i}p_{[j]}g_{[j]}(j))\Big]=b(n\gamma+\alpha i)+\\
&\sum_{j=1}^{i}[n\gamma(1+c)+\alpha(j-1+ci)p_{[j]}g_{[j]}(j)+\sum_{j=i+1}^{k}[n\gamma+\alpha(j-1)]p_{[j]}g_{[j]}(j-i)+\sum_{j=k+1}^{n}[\beta(n-j+1)]p_{[j]}g_{[j]}(j-i)。
\end{aligned} \tag{4}$$

由题意可知，上式可转化为指派问题：

$$\begin{aligned}
\min Z=&\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)=b(n\gamma+\alpha i)+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\sum_{r=1}^{i}[n\gamma(1+c)+\alpha(r-1+ci)]p_{[j]}g_{[j]}(r)x_{jr}+\\
&\sum_{r=i+1}^{k}[n\gamma+\alpha(r-1)]p_{[j]}g_{[j]}(r-i)x_{jr}+\sum_{r=k+1}^{n}[\beta(n-r+1)]p_{[j]}g_{[j]}(r-i)x_{jr}\Big\},
\end{aligned}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{r=1}^{n}x_{jr}=1, j=1,2,\cdots,n, \sum_{j=1}^{n}x_{jr}=1, r=1,2,\cdots,n, x_{jr}=1 \text{ 或 } 0, j=1,2,\cdots n, r=1,2,\cdots,n。$$

其中工件 J_j 被指派到第 r 个位置时，$x_{jr}=1$；否则 $x_{jr}=0$。

当机器的维修位置在工件 $J_{[k]}$ 之后，即 $i \geqslant k$ 时，对于所求目标函数也可转化为指派问题：

$$\begin{aligned}
\min Z=&\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)=\beta b(n-i)+\sum_{j=1}^{n}\Big\{\sum_{r=1}^{k}[n\gamma+\alpha(r-1)+\beta c(n-i)]p_{[j]}g_{[j]}(r)x_{jr}+\\
&\sum_{r=k+1}^{i}[\beta(n-r+1)+\beta c(n-i)]p_{[j]}g_{[j]}(r)x_{jr}+\sum_{r=i+1}^{n}[\beta(n-r+1)]p_{[j]}g_{[j]}(r-i)x_{jr}\Big\},
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{r=1}^{n}x_{jr}=1, j=1,2,\cdots,n, \sum_{j=1}^{n}x_{jr}=1, r=1,2,\cdots,n, x_{jr}=1 \text{ 或 } 0, j=1,2,\cdots,n, r=1,2,\cdots,n。$$

定理 1　问题 $1\left| ma, p_{jr}=p_j g_j(r) \right| \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)$ 的最优排序能在 $O(n^4)$ 时间内得到。

证明　显然在机器的维修位置确定的情况下，上述指派问题可在 $O(n^3)$ 时间内得到最优解。因刚开始加工时无需维修。故机器维修时刻可依次选择 n 个工件完工时。而机器在全部 n 个工件之后进行维修，不影响工件的完工时间，此时可认为机器不需要维修。因此，问题 $1\left| ma, p_{jr}=p_j g_j(r) \right| \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)$ 的最优排序能在 $O(n^4)$ 时间内解决。　证毕

上述结论可推广到机器有 l 次维修的情况，有下述推论。

推论 1　问题 $1\left| ma, m \leqslant l, p_{jr}=p_j g_j(r) \right| \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)$ 的最优排序能在 $O(n^{l+3})$ 时间内得到。

证明 若机器最多可进行 l 次维修，l 为已知常数且 $0\leqslant l<n$。

在机器进行第一次维修时，机器的维修位置可选在任意工件完工之后，即有 n 种情况将进行选择；在机器进行第二次维修时，机器的维修位置有 $n-1$ 种情况将进行选择(由于维修之后机器回到初始状态，所以机器没有必要在维修之后继续维修，这样并不会使机器有更好的状态，反而可能会在同样的排序工期增加，使目标函数增加)；在机器进行第 k 次维修时，机器的维修位置有 $n-l+1$ 种情况将进行选择。显然 $n(n-1)\cdots(n-l+1)\leqslant n^l$，因此维修位置可在 $O(n^l)$时间内确定。

关于目标函数的计算过程与定理1类似。上述目标函数可以转化为 n^l 个指派问题，所以 l 次维修的问题能在 $O(n^{l+3})$时间内得到最优解。 证毕

4 特殊情况

当工件的加工时间只与工件基本加工时间和工件所排位置相关时，即表示为 $p_{jr}=p_jg(r)$，目标函数用三参数表示为 $1\left|ma,p_{jr}=p_jg(r)\right|\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)$，有下列结论。

定理2 问题 $1\left|ma,p_{jr}=p_jg(r)\right|\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)$可在 $O(n^2\log n)$得到最优解。

证明 1) 当机器的维修位置在工件 $J_{[k]}$之前，即 $i<k$ 时，由(4)式知所求目标函数值为：

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)=b(n\gamma+\alpha i)+\sum_{j=1}^{i}[n\gamma(1+c)+\alpha(j-1+ci)]p_{[j]}g(j)+\sum_{j=i+1}^{k}[n\gamma+\alpha(j-1)]p_{[j]}g(j-i)+\sum_{j=k+1}^{n}[\beta(n-j+1)]p_{[j]}g(j-i)。$$

2) 当机器的维修位置在工件 $J_{[k]}$之后，即 $i\geqslant k$ 时，由(5)式可知，所求目标函数为：

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)=\beta b(n-i)+\sum_{j=1}^{k}[n\gamma+\alpha(r-1)+\beta c(n-i)]p_{[j]}g(j)+\sum_{j=k+1}^{i}[\beta(n-r+1)+\beta c(n-i)]p_{[j]}g(j)+\sum_{j=i+1}^{n}[\beta(n-r+1)]p_{[j]}g(j-i)。$$

在机器的维修位置 i 确定的情况下，因为对于每个位置的加工时间 $p_{[j]}$ 的系数为常数，因此问题可在 $O(n\log n)$时间内得到最优排序[14]。所以问题 $1\left|ma,p_{jr}=p_jg(r)\right|\sum\limits_{j=1}^{n}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d)$问题可在 $O(n^2\log n)$得到最优解。 证毕

例1 考虑 $n=4$ 的一个例子，其中工件的基本加工时间为 $p=(2,3,2,4)$，机器的恶化维修时间函数为 $f(t)=5+0.1\,t$，工件的恶化函数 $g(r)=2^{r-1}$，公共工期指派系数分别为 $\alpha=2,\beta=10,\gamma=5$。

解 由引理3知，$k=\lceil n(\beta-\gamma)/(\alpha+\beta)\rceil=\lceil 4\times(10-5)/(2+5)\rceil=3$。

当维修位置 $i=1<k$ 时，目标函数可化为：

$$Z_{\min}=\sum_{j=1}^{n}(2\times E_{[j]}+10\times T_{[j]}+5\times d)=110+[22.2p_{[1]}+22p_{[2]}+48p_{[3]}+40p_{[4]}]。$$

由文献[14]知，上式最优排序为 $\pi=(J_2,J_4,J_3,J_1)$或 $\pi=(J_2,J_4,J_1,J_3)$，目标函数值 $Z=440.6$。

同理当 $i=2$ 时，此时工件的最优排序为 $\pi=(J_2,J_1,J_3,J_4)$，目标函数值 $Z=412.2$。

当 $i=3$ 时，此时工件的最优排序为 $\pi=(J_2,J_1,J_3,J_4)$，目标函数值 $Z=445$。

当 $i=4$ 时，即机器不存在维修的情况下，此时工件的最优排序为 $\pi=(J_4,J_2,J_1,J_3)$，目标函数值 $Z=564$。

综上可知，在加工完第2个工件之后机器进行维修，可得目标函数的最优解，此时的最优排序为 $\pi=(J_2,J_4,J_3,J_1)$或 $\pi=(J_2,J_4,J_1,J_3)$，公共工期 $d=C_3=19.5$，目标函数最优值为 $Z=412.2$。

5 总结

本文研究了恶化工件带有维修的单机排序问题，目的是确定工件的最优加工顺序，公共工期及工件的维修位置，使加权提前、延误和公共工期之和最小。通过将问题转化为指派问题，证明此问题在多项式时间内具有最优解。对于特殊情况，给出了一个复杂性为 $O(n^2\log n)$的最优算法。由于松弛工期指派问题及无限制工期指派

问题也很普遍,对应的问题也在进一步研究中。

参考文献:

[1] Mosheiov G. A note on scheduling deteriorating jobs[J]. Mathematical and Computer Modelling,2005,41(8):883-886.

[2] Kuo W H,Yang D L. Minimizing the makespan in a single-machine scheduling problem with the cyclic process of an aging effect[J]. Journal of the Operational Research Society,2008,59(3):416-420.

[3] Mosheiov G. Proportionate flowshops with general position-dependent processing times[J]. Information Processing Letters,2011,111(4):174-177.

[4] Gordon V S,Potts C N,Strusevich V A,et al. Single machine scheduling models with deterioration and learning: handling precedence constraints via priority generation[J]. Journal of Scheduling,2008,11(5):357-370.

[5] Biskup D. A state-of-the-art review on scheduling with learning effects[J]. European Journal of Operational Research,2008,188(2):315-329.

[6] Rustogi K,Strusevich V A. Simple matching vs linear assignment in scheduling models with positional effects: A critical review[J]. European Journal of Operational Research,2012,222(3):393-407.

[7] Zhao C,Tang H. Single machine scheduling problems with general position-dependent processing times and past-sequence-dependent delivery times[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing,2014,45(1/2):259-274.

[8] Lee C Y,Leon V J. Machine scheduling with a rate-modifying activity[J]. European Journal of Operational Research,2001,128(1):119-128.

[9] Mosheiov G,Oron D. Due-date assignment and maintenance activity scheduling problem[J]. Mathematical and Computer Modelling,2006,44(11):1053 -1057.

[10] Mosheiov G,Sidney J B. Scheduling a deteriorating maintenance activity on a single machine[J]. Journal of the Operational Research Society,2010,61(5):882-887.

[11] Yang S J,Yang D L,Hsu C J. Single-machine scheduling with due-date assignment and aging effect under a deteriorating maintenance activity consideration[J]. International Journal of Information and Management Sciences,2010,21(2):177-195.

[12] Graham R L,Lawler E L,Lenstra J K,et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling:a survey[J]. Annals of Discrete Mathematics,1979,5:287-326.

[13] Panwalkar S S,Smith M L,Seidmann A. Common due date assignment to minimize total penalty for the one machine scheduling problem[J]. Operations Research,1982,30(2):391-399.

[14] Hardy G H,Littlewood J E,Polya G. Inequalities[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1967.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine Scheduling with Due-Date Assignment and Aging Effect under a Deteriorating Maintenance

GAO Jie, ZHAO Yufang

(School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: This paper investigates single-machine due-date assignment and scheduling problems with a job-dependent aging effect under a deteriorating maintenance activity consideration simultaneously. The actual processing time of a job is a general function of its basic processing time and its position in a sequence. The machine maintenance duration is a deteriorative function of its starting time and the function is linear. The objective is to find the optimal schedule and maintenance position as well as the optimal location of the common due-date for minimizing the total of earliness, tardiness and due-date costs. We introduce a polynomial time solution for the problem by transforming this problem into the assignment problem. We also present a special case of the problem and show that it can be optimally solved by a better algorithm in $O(n\log n)$ polynomial time.

Key words: single-machine; scheduling; deteriorating; maintenance; due-date assignment

(责任编辑　黄　颖)