

一类具两斑块效应的 SIS 传染病模型的稳定性分析*

杨文川, 杨志春

(重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331)

摘要:基于人口迁移和非线性传染率的传染病模型研究具有重要的现实意义。首先考虑一类传染病的非线性传染率和人口迁移的斑块效应,建立一个基于两个斑块间具有对称迁移和非线性传染率为 $\frac{\beta SI}{1+S+I}$ 的 SIS 传染病模型。然后利用基本再生数 R_0 和线性化系统的特征值分析方法,获得具有斑块效应的无病平衡点和地方病平衡点的稳定性阈值条件,即在 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点局部渐近稳定;当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点局部渐近稳定。最后,给出例子及其数值仿真说明所得结论的有效性。

关键词:SIS 传染病模型;局部稳定性;基本再生数

中图分类号:Q332

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2015)05-0081-04

传染病入侵是当今世界面临的一个重大问题。禽流感、霍乱、SARS 等疾病影响人类健康,毫无疑问,预防和控制传染病是当今世界最为棘手的问题^[1],利用微分方程研究传染病的传播机理是一种重要手段。

在经典的 SI 传染病模型中,在一个地区中通常把总人口大致分成二部分:易感者(S)和感染者(I)。通常用模型 $s' = a - \beta SI - bS + dI, I' = \beta SI - (b+d)I$ 表示^[2],其中 a 表示单位时间人口迁入数量, b 表示人口自然死亡率, d 表示感染者通过治疗变成了易感者的变化率, βSI 表示传染病的传染率, β 是传播系数。

由于传染率是传染病中非常重要的概念,非线性传染率能描述许多复杂的传染病扩散情况,因此有大量的文献讨论各种不同形式的非线性传染率对系统稳定性影响。例如,文献[3-5]中的传染率表示为 $\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$ 。最近,非线性传染率为 $\frac{\beta SI}{1+\mu S+\nu I}$ 的传染病模型受到关注,如文献[6]考虑在此传染率条件下无病平衡点和地方病平衡点的稳定性条件,同时给出了数字仿真说明结论的真实性,文献[7-8]考虑在此传染率条件下时滞对系统稳定性影响。因此,进一步研究此类非线性传染率的传染病模型是有意义的(为方便,考虑 $\mu = \nu = 1$ 及非线性传染率为 $\frac{\beta SI}{1+S+I}$ 时的情形)。

另一方面,除了传染率对传染病的影响以外,还需要考虑一个重要因素及种群的迁移。例如,文献[2,9]主要考虑在两个斑块间种群对称迁移条件下平衡点的稳定性。文献[10]考虑另一类斑块环境下的系统稳定性的充分条件。种群迁移在系统中主要表现为对称迁移和非对称迁移,及二个斑块之间转移系数相等与否。本文主要考虑在对称条件下,种群迁移对系统稳定性影响。

基于上面两个因素,将考虑传染病的非线性传染率和人口迁移的斑块效应,建立如下的 SIS 传染病模型:

$$\begin{cases} S'_1 = a - \frac{\beta S_1 I_1}{1+S_1+I_1} - bS_1 + dI_1 + \alpha S_2 - \alpha S_1, \\ I'_1 = \frac{\beta S_1 I_1}{1+S_1+I_1} - (b+d+\alpha)I_1 + \alpha I_2, \\ S'_2 = a - \frac{\beta S_2 I_2}{1+S_2+I_2} - bS_2 + dI_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1, \\ I'_2 = \frac{\beta S_2 I_2}{1+S_2+I_2} - (b+d+\alpha)I_2 + \alpha I_1. \end{cases} \quad (1)$$

* 收稿日期:2014-06-23 修回日期:2015-05-10 网络出版时间:2015-06-08 12:29

资助项目:国家自然科学基金(No. 10971240);教育部科技重点项目(No. 212138);重庆市高校创新团队(No. KJTD201308);重庆市教委科研项目(No. KJ120630)

作者简介:杨文川,男,研究方向为微分方程与动力系统,E-mail:1031799910@qq.com;通信作者:杨志春,教授,E-mail:yangzhch@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150608.1229.003.html

其中 α 表示二个斑块间的转移率,其他字母意义与经典的 SI 传染病模型相同。由实际意义出发假设 α, β, a, b, d 非负, $\frac{\beta S_i I_i}{1+S_i+I_i}$ ($i=1, 2$) 为非线性传染率。

根据文献[2],定义基本再生数: $R_0 = \frac{\beta a}{(a+b)(b+d)}$ 。不难验证,得到模型(1)的平衡点存在性情况:

1) $R_0 \leq 1$ 时,存在唯一的无病平衡点 $E_0 = \left(\frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, 0\right)$;

2) $R_0 > 1$ 时,还存在唯一地方平衡点 $E^* = (S^*, I^*, S^*, I^*)$,其中 $S^* = \frac{a}{bR_0}, I^* = \frac{a}{b} - \frac{a}{bR_0}$ 。

本文主要利用基本再生数和线性化特征值,分析基于对称迁移和非线性传染率的 SIS 传染病模型(1)的无病平衡点和地方平衡点渐近稳定性。

1 无病平衡点的局部稳定性

首先,给出无病平衡点局部稳定性的充分条件。

定理 1 当 $R_0 < 1$ 时,系统(1)在无病平衡点 $E_0 = \left(\frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, 0\right)$ 处渐近稳定。

证明 系统(1)的雅可比矩阵

$$J(S_1, I_1, S_2, I_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

其中,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I_1 + \beta I_1^2}{(1+S_1+I_1)^2} - b - \alpha & -\frac{\beta S_1 + \beta S_1^2}{(1+S_1+I_1)^2} + d \\ \frac{\beta I_1 + \beta I_1^2}{(1+S_1+I_1)^2} & \frac{\beta S_1 + \beta S_1^2}{(1+S_1+I_1)^2} - b - d - \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I_2 + \beta I_2^2}{(1+S_2+I_2)^2} - b - \alpha & -\frac{\beta S_2 + \beta S_2^2}{(1+S_2+I_2)^2} + d \\ \frac{\beta I_2 + \beta I_2^2}{(1+S_2+I_2)^2} & \frac{\beta S_2 + \beta S_2^2}{(1+S_2+I_2)^2} - b - d - \alpha \end{pmatrix}。$$

将无病平衡点 $E_0 = \left(\frac{a}{b}, 0, \frac{a}{b}, 0\right)$ 代入雅可比矩阵中则有

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -b - \alpha & \frac{-\beta a}{a+b} + d & \alpha & 0 \\ 0 & \frac{\beta a}{a+b} - d - b - \alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -b - \alpha & \frac{-\beta a}{a+b} + d \\ 0 & \alpha & 0 & \frac{\beta a}{a+b} - d - b - \alpha \end{pmatrix}。$$

矩阵 $J(E_0)$ 对应特征方程的特征根分别为:

$$\lambda_1 = -b, \lambda_2 = -b - 2\alpha, \lambda_3 = \frac{\beta a}{a+b} - b - d, \lambda_4 = \frac{\beta a}{a+b} - b - d - 2\alpha。$$

当 $R_0 < 1$ 时, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 均为负根,系统(1)在无病平衡点 E_0 处渐近稳定。

证毕

2 地方病平衡点的局部稳定性

上一节讨论了无病平衡点的局部稳定性,本节主要讨论在一定条件下地方病平衡点的局部稳定性。

定理 2 如果 $R_0 > 1$,那么地方病平衡点渐近稳定。

证明 将地方平衡点 E^* 代入雅可比矩阵中,则有

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} C & B \\ B & C \end{pmatrix},$$

其中

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I^* + \beta I^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} - b - \alpha & -\frac{\beta S^* + \beta S^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} + d \\ \frac{\beta I^* + \beta I^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} & \frac{\beta S^* + \beta S^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} - b - d - \alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

利用分块矩阵的理论,则有

$$\det(J(E^*) - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} C - \lambda I & B \\ B & C - \lambda I \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} C + B - \lambda I & B \\ 0 & C + B - \lambda I \end{pmatrix} = \det(C + B - \lambda I) \det(C - B - \lambda I),$$

其中

$$C + B = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I^* + \beta I^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} - b & -\frac{\beta S^* + \beta S^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} + d \\ \frac{\beta I^* + \beta I^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} & \frac{\beta S^* + \beta S^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} - b - d \end{pmatrix}.$$

当 $R_0 > 1$ 时,有

$$\frac{\beta S^* + \beta S^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} - b - d < 0.$$

则迹 $\text{tr}(A+B) < 0$ 。下面讨论在 $R_0 > 1$ 时 $\det(A+B)$ 正负情况。

$$\det(A+B) = -\left[\frac{\beta I^* + \beta I^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} + b\right] \left[\frac{\beta S^* + \beta S^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} - b - d\right] + \left[\frac{\beta S^* + \beta S^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} - d\right] \left[\frac{\beta I^* + \beta I^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2}\right] = \left[-b\left(\frac{\beta S^* + \beta S^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} - b - d\right) + Ab\right] > 0.$$

因此,迹 $\text{tr}(A+B) < 0, \det(A+B) > 0, A+B$ 有两个负实根。

当 $R_0 > 1$ 时,

$$A - B = \begin{pmatrix} -\frac{\beta I^* + \beta I^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} - b - 2\alpha & -\frac{\beta S^* + \beta S^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} + d \\ \frac{\beta I^* + \beta I^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} & \frac{\beta S^* + \beta S^{*2}}{(1+S^*+I^*)^2} - b - d - 2\alpha \end{pmatrix}.$$

同理可证,迹 $\text{tr}(A-B) < 0, \det(A-B) > 0$ 。所以 $A-B$ 的特征值有两个负实数根。

综上所述,在 $R_0 > 1$ 时 $J(E^*)$ 的特征方程的所有特征根都是负实数,因此系统(1)在地方平衡点 $E^* = (S^*, I^*, S^*, I^*)$ 处局部渐近稳定。证毕

3 数值模拟

为了验证结论的有效性,给出模型(1)中具有如下参数的两个例子及其数值仿真。

例 1 模型(1)中, $\beta=0.9, \alpha=0.8, a=1, b=0.4, d=0.3$ 。

不难计算,基本再生数 $R_0 = 0.7347 < 1$,由定理 1 知,模型(1)存在唯一的无病平衡点,且渐近稳定。图 1 给出其稳定性的时间状态图,其中 $t=0$ 的初值为 $(1, 0.5, 2, 1)$ 。

例 2 模型(1)中, $\beta=0.9, \alpha=0.9, a=1, b=0.2, d=0.3$ 。

不难计算基本再生数 $R_0 = 3.240 > 1$,由定理 1 知,模型(1)存在唯一的无病平衡点,且渐近稳定。图 2 给出其稳定性的时间状态图,其中 $t=0$ 的初值为 $(1, 0.5, 2, 1)$ 。

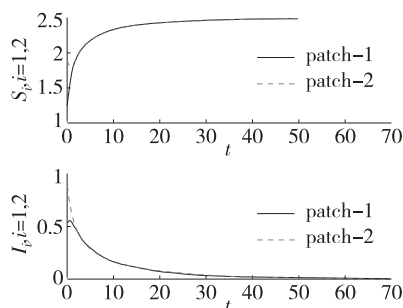


图 1 参数取例 1 的系统(1)的时间序列图

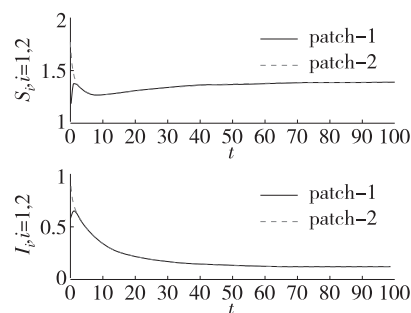


图 2 参数取例 2 的系统(1)的时间序列图

4 结论

本文主要讨论了在二个斑块间有种群迁移的一类非线性传染率 SIS 传染病模型,给出了模型对应的基本再生数,并且在基本再生数条件下得出了无病平衡点和地方病平衡点的局部稳定性的充分条件。对该类模型进一步讨论发现还可以将其推广到 n 个斑块的情况,在此不做更多讨论。

参考文献:

- [1] 陆征一,王稳地. 生物数学前言[M]. 北京:科学出版社, 2008.
- Lu Z Y, Wang W D. The forefront of biomathematics[M]. Beijing: Science Press, 2008.
- [2] Yasuhiro T, Xian N, Jin G. Global dynamics of SIS models with transport-related[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 4:1460-1471.
- [3] Xu R, Ma Z E, Global stability of a delayed SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2009, 10(5): 3175-3189.
- [4] Xu R, Ma Z E, Wang Z P. Global stability of a delayed SIRS epidemic model with saturation incidence and temporary immunity[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(9): 3211-3221.
- [5] 王佳颖, 窦雯虹, 童姗姗. 具有非线性传染率的病毒动力学模型的稳定性分析[J]. 陕西科技大学学报:自然科学版, 2011, 5:136-137.
- Wang J Y, Dou Q H, Tong S S. Stability analysis of virus dynamics with nonlinear incidence rate[J]. Shanxi University of Science and Technology: Natural Science, 2011, 5: 136-137.
- [6] Pathak S, Maiti A, Samanta G P. Rich dynamics of an SIR epidemic model [J]. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2010, 1:71-81.
- [7] Abdelilah K, Abdelhadi A, Talibi A H, et al. A comparison of delayed SIR and SEIR epidemic models[J]. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2011, 16(2):181-190.
- [8] Kaddar A. Stability analysis in a delayed SIR epidemic model with a saturated incidence rate[J]. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2010, 3:299-306.
- [9] 李冰, 王辉. 一类在两个斑块内人口迁移的传染病模型的研究[J]. 北京工商大学学报:自然科学版, 2009, 27(1): 56-60.
- Li B, Wang H. Study of an epidemic model within two plaques migration[J]. Beijing Technology and Business University: Natural Science, 2009, 27(1): 56-60.
- [10] Wang W D, Zhao X Q. An epidemic model in a patchy environment[J]. Math Biosci, 2004, 190:97-112

Stability Analysis of an SIS Epidemic Model in Two Patches

YANG Wenchuan, YANG Zhichun

(College of Mathematics Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Research of an SIS epidemic model with nonlinear incidence rate in two patches has important practical significance. Firstly, we consider the effects of nonlinear incidence rate $\frac{\beta SI}{1+S+I}$ and population dispersal, and establish an SIS epidemic model in two patches with nonlinear incidence rate. Then, by using the basic reproduction number and the eigenvalue of the linear system analysis, we obtain threshold conditions on stability of the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium effects. That is, if $R_0 < 1$, the disease-free equilibrium is locally and asymptotically stable; while the endemic equilibrium is locally and asymptotically stable if $R_0 > 1$. Finally, we give examples and numerical simulations to illustrate the effectiveness of the conclusions.

Key words: SIS epidemic model; local stability; basic reproduction number

(责任编辑 游中胜)