

一类混沌系统的观测器同步*

毛北行¹, 张国锋²

(1. 郑州航空工业管理学院 数理系, 郑州 450015; 2. 西安工业大学 机电工程学院, 西安 710032)

摘要:基于观测器方法研究了一类连续/离散混沌系统与其观测系统、连续/离散复杂网络系统与其观测系统的混沌同步问题,研究的系统有: $\dot{x}(t)=Ax(t)+f(x(t)), y(t)=Cx(t)$ 与其观测系统 $\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+f(\hat{x}(t))+L(y(t)-C\hat{x}(t))+u(t)$;离散系统 $x(t+1)=Ax(t)+f(x(t)), y(t)=Cx(t)$ 与其观测系统 $\hat{x}(t+1)=A\hat{x}(t)+f(\hat{x}(t))+L(y(t)-C\hat{x}(t))+u(t)$;连续复杂网络系统 $\dot{x}_i(t)=f(x_i(t))+\sigma_i\sum_{j=1}^Nx_j(t), i=1,2,\dots,N, y_i(t)=Cx_i(t)$ 与其观测系统 $\dot{\hat{x}}_i(t)=f(\hat{x}_i(t))+\sigma_i\sum_{j=1}^N\hat{x}_j(t)+L(y_i(t)-C\hat{x}_i(t))+u_i(t)$;离散复杂网络 $x_i(t+1)=f(x_i(t))+\sigma_i\sum_{j=1}^Nx_j(t), i=1,2,\dots,N, y_i(t)=Cx_i(t)$ 与其观测系统 $\hat{x}_i(t+1)=f(\hat{x}_i(t))+\sigma_i\sum_{j=1}^N\hat{x}_j(t)+L(y_i(t)-C\hat{x}_i(t))+u_i(t)$ 。基于 Lyapunov 稳定性理论给出了系统同步的充分性条件,数值算例说明了该方法的有效性。

关键词:混沌同步;观测器;复杂网络

中图分类号:O482.4

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2015)05-0094-05

目前,研究者关注较多的是以系统状态变量都能得到并可以参加控制为前提的混沌同步,已取得了丰富的成果^[1-7]。但从实际的物理过程来看,一般非线性系统的状态并非可以得到,而利用观测器理论可以顺利的解决此类混沌系统的同步问题。文献[8]研究了外部扰动下一类参数未知的混沌系统的观测器 H_∞ 同步问题;文献[9]研究了随机扰动下一般混沌系统的 H_∞ 同步问题;文献[10]研究了一类模糊不确定时滞 Lurie 系统基于观测器的混沌同步问题。本文基于观测器方法研究了一类连续/离散混沌系统与其观测系统、连续/离散复杂网络系统与其观测系统的混沌同步问题,基于 Lyapunov 稳定性理论,给出了系统同步的充分性条件。仿真算例表明了方法的有效性。

2 主要结果

考虑如下连续混沌系统:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+f(x(t)), y(t)=Cx(t)。(1)$$

其中 $x(t)$ 为系统的状态变量, $y(t)$ 为系统的输出变量, $f(x(t))$ 为非线性函数, A, C 为适当维数的常数矩阵。其观测系统为:

$$\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+f(\hat{x}(t))+L(y(t)-C\hat{x}(t))+u(t)。(2)$$

其中 $\hat{x}(t)$ 为 $x(t)$ 的观测值, L 为观测增益矩阵, $u(t)$ 为控制输入。

以系统(1)作为驱动系统,其对应的观测系统(2)作为响应系统。定义系统误差 $e(t)=\hat{x}(t)-x(t)$, 则

$$\dot{e}(t)=(A-LC)e(t)+u(t)+f(\hat{x}(t))-f(x(t))。(3)$$

假设 1 非线性函数满足条件 $\|f(\hat{x}(t))-f(x(t))\| \leq \tilde{L}\|\hat{x}(t)-x(t)\|$, 其中 \tilde{L} 为 Lipschitz 常数。

定理 1 设计控制律 $u(t)=-\eta e(t)$, 若满足条件 $A-LC-\eta I+\tilde{L}I < 0$, 则驱动系统(1)与观测系统(2)是混沌

* 收稿日期:2014-11-06 修回日期:2015-05-06 网络出版时间:2015-06-08 12:29

资助项目:国家自然科学基金(No. 11404291);国家自然科学基金数学天元基金(No. 11226337);航空基金(No. 2013ZD55006);河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目(No. 2013GGJS-142);河南省教育厅科学技术重点研究项目(No. 14A110027);河南省高等学校重点科研项目(No. 15B110011);郑州航空工业管理学院青年基金(No. 2014113002)

作者简介:毛北行,男,副教授,研究方向为复杂网络与混沌同步, E-mail:bxmao329@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150608.1229.011.html

同步的。

证明 构造 Lyapunov 函数 $V(t) = \frac{1}{2}e^T(t)e(t)$, 则有其导数为

$$\dot{V}(t) = e^T(t)\dot{e}(t) = e^T(t)[(A-LC-\eta I)e(t) + f(\hat{x}(t)) - f(x(t))] \leq e^T(t)(A-LC-\eta I)e(t) < 0. \quad \text{证毕}$$

以下考虑离散的混沌系统:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + f(x(t)), \\ y(t) &= Cx(t). \end{aligned} \quad (4)$$

其观测系统为:

$$\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t)) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) + u(t). \quad (5)$$

假定上述系统满足假设 1, 定义系统误差 $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$, 则

$$e(t+1) = (A-LC)e(t) + u(t) + f(\hat{x}(t)) - f(x(t)). \quad (6)$$

定理 2 设计控制律 $u(t) = -\eta e(t)$, 若满足条件:

$$B^T B + 2\tilde{L}B + \tilde{L}^T \tilde{L} - I < 0, \quad (7)$$

其中定义 $B = A - LC - \eta I$, 则驱动系统(4)与观测系统(5)是混沌同步的。

证明 构造 Lyapunov 函数 $V(t) = e^T(t)e(t)$, 其一阶差分为

$$\begin{aligned} \Delta V(t) &= e^T(t+1)e(t+1) - e^T(t)e(t) = [Be(t) + f(\hat{x}(t)) - f(x(t))]^T [Be(t) + f(\hat{x}(t)) - f(x(t))] - \\ &e^T(t)e(t) \leq e^T(t)(B^T B + 2\tilde{L}B + \tilde{L}^T \tilde{L} - I)e(t) < 0. \end{aligned} \quad \text{证毕}$$

以下考虑如下复杂网络构成的混沌系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(x_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ y_i(t) &= Cx_i(t). \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $x_i(t)$ 为网络第 i 个节点的状态向量, $i = 1, 2, \dots, N$; C 为适当维数的常数矩阵 $f(x_i(t))$ 为非线性函数. σ_i 反映了网络的拓扑结构和节点的耦合强度. 其观测系统为:

$$\dot{\hat{x}}_i(t) = f(\hat{x}_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N \hat{x}_j(t) + L(y_i(t) - C\hat{x}_i(t)) + u_i(t). \quad (9)$$

以(8)式作为驱动系统, 其对应的观测系统(9)作为响应系统。

假设 2 $\|f(\hat{x}_i(t)) - f(x_i(t))\| \leq \tilde{L}_i \|\hat{x}_i(t) - x_i(t)\|$, 其中 \tilde{L}_i 为 Lipshiz 常数. 定义系统误差

$$e_i(t) = \hat{x}_i(t) - x_i(t),$$

$$\dot{e}_i(t) = f(\hat{x}_i(t)) - f(x_i(t)) - LCe_i(t) + \sigma_i \sum_{j=1}^N e_j(t) + u_i(t). \quad (10)$$

引理 1^[12] $2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} e_i^T(t) e_j(t) \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}^T a_{ij} e_i^T(t) e_i(t) + N \sum_{j=1}^N e_j^T(t) e_j(t)$.

定理 3 设计控制律 $u_i(t) = -\eta_i e_i(t)$, 若满足条件: $D_i + D_i^T + N(\beta + 1)I < 0$, 其中定义 $D_i = (\tilde{L}_i I - LC - \eta_i I)$, 则驱动系统(8)与观测系统(9)是混沌同步的。

证明 构造 Lyapunov 函数 $V(t) = \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t)$, 求得其导数为:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N [\dot{e}_i^T(t) e_i(t) + e_i^T(t) \dot{e}_i(t)] \leq \sum_{i=1}^N e_i^T(t) [(\tilde{L}_i I - LC - \eta_i I)^T + (\tilde{L}_i I - LC - \eta_i I)] e_i(t) + 2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \sigma_i \sum_{j=1}^N e_j(t).$$

由引理 1, 很容易得到 $2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \sigma_i \sum_{j=1}^N e_j(t) \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_i^2 e_i^T(t) e_i(t) + N \sum_{j=1}^N e_j^T(t) e_j(t)$. 定义 $\beta = \max\{\sigma_i^2\}$,

则有

$$2 \sum_{i=1}^N e_i^T(t) \sigma_i \sum_{j=1}^N e_j(t) \leq N\beta \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t) + N \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t),$$

从而

$$\dot{V}(t) \leq \sum_{i=1}^N \{e_i^T [D_i + D_i^T + N(\beta + 1)] e_i(t)\} < 0. \quad \text{证毕}$$

以下考虑如下离散混沌系统:

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= f(x_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N x_j(t), i=1, 2, \dots, N \\ y_i(t) &= Cx_i(t). \end{aligned} \quad (11)$$

其观测系统为:

$$\hat{x}_i(t+1) = f(\hat{x}_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N \hat{x}_j(t) + L(y_i(t) - C\hat{x}_i(t)) + u_i(t). \quad (12)$$

以(11)式作为驱动系统,其对应的观测系统(12)作为响应系统。定义系统误差

$$e_i(t) = \hat{x}_i(t) - x_i(t) e_i(t+1) = f(\hat{x}_i(t)) - f(x_i(t)) - LCe_i(t) + \sigma_i \sum_{j=1}^N e_j(t) + u_i(t).$$

定理 4 设计控制律 $u_i(t) = -\eta_i e_i(t)$, 若满足条件: $\Omega_1 + 2\Omega_2 + \Omega_3 < 0$, 其中 $\Omega_1 = \tilde{L}_i^T \tilde{L}_i + (LC + \eta_i)^T (LC + \eta_i I) + \sigma_i^2 I$, $\Omega_2 = \tilde{L}_i (LC + \eta_i I)$, $\Omega_3 = [N(\beta_1 + \beta_2 + 2) - 1] I$, $\beta_1 = \max\{(\tilde{L}_i \sigma_i)^2\}$, $\beta_2 = \max\{((LC + \eta_i I) \sigma_i)^2\}$; 则驱动系统(11)与观测系统(12)是混沌同步的。

证明 构造 Lyapunov 函数 $V(t) = \sum_{i=1}^N e_i^T(t) e_i(t)$, 求得其一阶差分为:

$$\Delta V(t) = \sum_{i=1}^N [e_i^T(t+1) e_i(t+1) - e_i^T(t) e_i(t)],$$

令 $\Phi_i = [- (LC + \eta_i I) e_i(t) + f(\hat{x}_i(t)) - f(x_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N e_j(t)]$, $\Delta V(t) = \sum_{i=1}^N [\Phi_i^T \Phi_i - e_i^T(t) e_i(t)]$, 利用引理 1, 很容易得到

$$\Delta V(t) \leq \sum_{i=1}^N (\Omega_1 + 2\Omega_2 + \Omega_3) e_i^T(t) e_i(t) < 0. \quad \text{证毕}$$

3 数值算例

定理 1 中的算例以新型的 Lorenz 系统为例, 有

$$\dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) + x_2 x_3, \dot{x}_2 = cx_1 - x_1 x_3 - x_2, \dot{x}_3 = x_1 x_2 - bx_3$$

$$\text{当 } a=35, b=\frac{8}{3}, c=80 \text{ 时系统呈现混沌态, 有 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 \\ 80 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.563 \\ 6.858 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} =$$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = 0.53, \eta = 2$. 系统的误差响应曲线如图 1 所示。

定理 2 以离散型 Henon 混沌动力系统为例, 有

$$x_1(t+1) = 1 - ax_1^2(t) + x_2(t), x_2(t) = bx_1(t),$$

$$a = 1.4, b = 0.3, \tilde{L} = 0.46, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.733 & 2 \\ 0.645 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 - x_1^2(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}.$$

系统的响应曲线如图 2 所示。

定理 3 以如下系统为例: $\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j(t)$, $\sigma_i = 1/2, i=1, 2, 3$, $\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} 10(x_2 - x_1) \\ 28x_1 - x_1 x_3 - x_2 \\ x_1 x_2 - 8/3 x_3 \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.552 \\ 1.443 \\ 0.754 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1], \tilde{L} = 0.76, \text{系统的误差响应曲线如图 3 所示。}$$

定理 4 以如下为例: $x_i(t+1) = f(x_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N x_j(t)$, $i=1, 2, \dots, N$, $y_i(t) = Cx_i(t)$, $\sigma_i = 1/2$, $\mathbf{f}(x(t)) =$

$$\begin{bmatrix} -16x_1(t)+16x_2(t) \\ -x_1(t)x_3(t)-x_2(t)+4x_1(t) \\ x_1(t)x_2(t)-45x_3(t) \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.574 \\ 0.831 \\ 0.743 \end{bmatrix}, \text{系统的误差曲线如图 4 所示。}$$

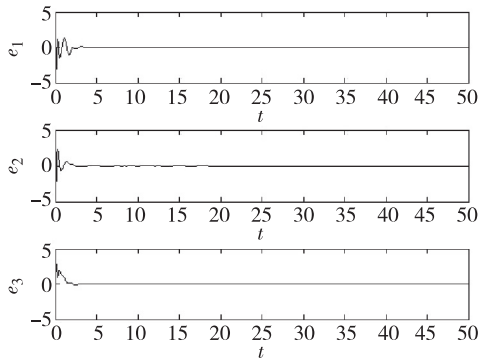


图 1 系统的误差曲线

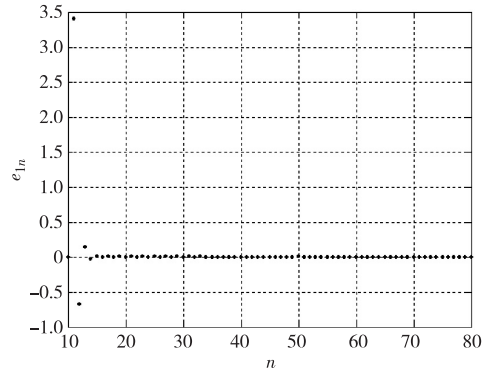


图 2 系统的误差曲线

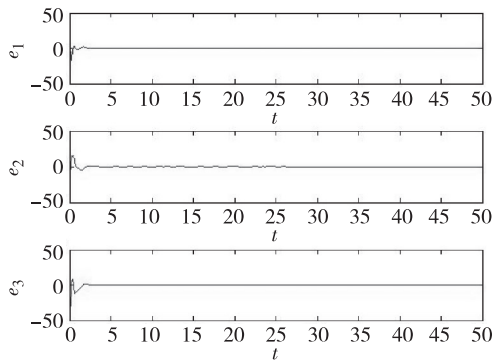


图 3 系统的误差曲线

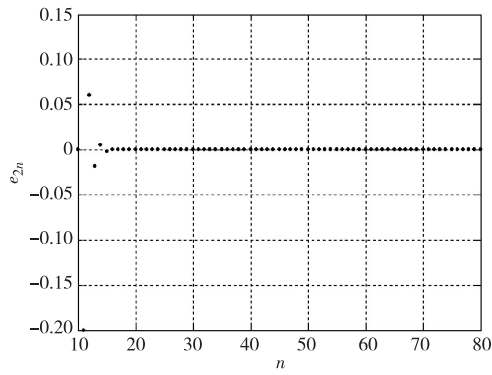


图 4 系统的误差曲线

4 结论

本文基于观测器方法研究了一类混沌系统的同步问题,同时考虑了连续、离散两种情形,以及对应的复杂网络连续、离散两种情形下观测器同步问题,给出了系统同步的充分性条件。由于系统状态往往不好量测,所以设计观测器同步该方法具有一定的可靠性。

参考文献:

[1] 胡爱花,吴昌应. 基于脉冲控制的不确定混沌系统的同步[J]. 河南科技大学学报:自然科学版,2010,31(5):51-55.
Hu A H, Wu C Y. Synchronization of uncertain chaotic systems via impulsive control[J]. Journal of Henan University of Science and Technology: Natural Science, 2010, 31(5): 51-55.

[2] 李秀春,谷建华,王云岚,等. 一类带有未知参数的受扰混沌系统的观测器同步[J]. 物理学报,2011,60(5):5051-5056.
Li X C, Gu J H, Wang Y L, et al. Observer synchronization method for a class of perturbed chaotic systems with unknown parameters[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(5): 5051-5056.

[3] 杨东升,张化光,李爱平,等. 基于模糊模型的不同结构的混沌系统同步[J]. 物理学报,2007,56(6):1335-1338.
Yang D S, Zhang H G, Li A P, et al. Synchronization of different structure chaotic systems based on fuzzy model[J]. Acta Physica Sinica, 2007, 56(6): 1335-1338.

[4] Yoo W J, Ji D H, Won S C. Synchronization of two different non-autonomous chaotic systems using fuzzy disturbance observer[J]. Physics Letters A, 2009, 374(11): 1354-1361.

[5] Fallahi K, Leung H. A chaos secure communication scheme based on multiplication modulation[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(2): 368-383.

[6] 吕翎,李纲,张檬,等. 全局耦合网络的参数辨识与时空混沌同步[J]. 物理学报,2011,60(9):5051-5056.
Lü L, Li G, Zhang M, et al. Parameter identification and synchronization of spatiotemporal chaos in globally coupled network[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(9): 5051-5056.

- [7] 李建芬,李农.一类混沌系统的修正函数投影同步[J].物理学报,2011,60(8):5071-5077.
Li J F, Li N. Modified function projective synchronization of a class of chaotic systems[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(8):5071-5077.
- [8] 孟晓玲,周长芹,毛北行.外部扰动下一类参数未知的混沌系统的观测器 H_∞ 同步[J].河南科学,2012,30(10):1427-1429.
Meng X L, Zhou C Q, Mao B X. Observer H_∞ synchronization method for a class of perturbed chaotic systems with unknown parameters [J]. Henan Kexue, 2012, 30(10):1427-1429.
- [9] 涂俐兰,柯超,丁咏梅.随机扰动下一般混沌系统的 H_∞ 同步[J].物理学报,2011,60(5):8031-8037.
Tu L L, Ke C, Ding Y M. H_∞ synchronization of general chaotic systems with random perturbations[J]. Acta Physica Sinica, 2011, 60(5):8031-8037.
- [10] 毛北行,孟晓玲,卜春霞.一类模糊不确定时滞 Lurie 系统基于观测器的混沌同步[J].河南科学,2013,31(2):130-134.
Mao B X, Meng X L, Bu C X. Synchronization of a class of fuzzy uncertain time-delay Lurie chaotic systems based on observer[J]. Henan Kexue, 2013, 31(2):130-134.

Observer Synchronization of a Class of Chaos Systems

MAO Beixing¹, ZHANG Guofeng²

(1. Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015;

2. Department of Mechatronic Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China)

Abstract: The chaos synchronization problem of a class of chaos systems in consecutive and discrete state is studied in the paper and it's complex networks systems is also considered, The system as following: $\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t))$, $y(t) = Cx(t)$ and its observer systems $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t)) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) + u(t)$; The discrete systems $x(t+1) = Ax(t) + f(x(t))$, $y(t) = Cx(t)$ and its observer systems $\hat{x}(t+1) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t)) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) + u(t)$; The consecutive systems $\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N x_j(t)$, $i=1, 2, \dots, N$, $y_i(t) = Cx_i(t)$ and its observer systems $\dot{\hat{x}}_i(t) = f(\hat{x}_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N \hat{x}_j(t) + L(y_i(t) - C\hat{x}_i(t)) + u_i(t)$; The discrete systems $x_i(t+1) = f(x_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N x_j(t)$, $i=1, 2, \dots, N$, $y_i(t) = Cx_i(t)$ and its observer systems $\hat{x}_i(t+1) = f(\hat{x}_i(t)) + \sigma_i \sum_{j=1}^N \hat{x}_j(t) + L(y_i(t) - C\hat{x}_i(t)) + u_i(t)$. The chaos synchronization problem is studied in the paper based on Lyapunov stable theory. we got the sufficient conditions of systems chaos synchronization. Numerical simulations example of chaotic system verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: chaos synchronization; observer; complex networks

(责任编辑 方 兴)