运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20150616

严格 G-半预不变凸性及其应用研究*

李科科[1,2]，彭再云[2]，万　轩[3]，唐　平[4]
(1. 重庆师范大学 数学学院，重庆 401331；2. 重庆交通大学 理学院，重庆 400074；
3. 重庆电讯职业学院 基础部，重庆 402247；4. 重庆文理学院 数学与财经学院，重庆 402160)

摘要：一类新的广义凸函数——严格 G-半预不变凸函数被提出，它是一类重要的广义凸函数，是严格 G-预不变凸函数的真推广。首先，给出例子说明严格 G-半预不变凸函数的存在性及其与相关广义凸函数间的一些关系；然后，对严格 G-半预不变凸函数的一些基本性质进行了讨论；最后，将此类严格 G-半预不变凸性分别应用于无约束非线性规划问题、带不等式约束的非线性规划问题及多目标规划问题 Mond-Weir 对偶的研究中，获得了一些对偶理论和最优性结果，并举例验证了结论：当 f,g_i 均为严格 G-半预不变凸函数，则问题(P_2)的可行集和最优解集均为关于 η 的半不变凸集，且此时问题(P_2)的局部最优解即为其全局最优解。

关键词：半不变凸集；严格 G-半预不变凸函数；非线性规划；对偶

中图分类号：O221.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2015)06-0001-08

凸性以及广义凸性在工程技术、经济管理和最优化理论中起着关键性的作用；非线性规划中有一个重要的研究方向就是有关凸性和广义凸性方面的研究[1-2]。一类被称为不变凸函数的广义凸函数在文献[3]中被给出，接着 Craven 在它的基础上建立了分式规划的对偶原理。文献[4]中讨论了一类广义凸函数—预不变凸函数，它是不变凸函数进一步的推广，文献[5]进一步对预不变凸函数的性质展开了深入研究。然后，半严格预不变凸函数的概念在文献[6]中被提出，研究者还对其性质进行了一些讨论。G-预不变凸函数的定义在文献[7-8]中被给出，文献[7-8]还探究了其在非线性规划中的一些重要应用。接着半严格 G-预不变凸性、强 G-预不变凸性的性质与应用在文献[9-10]中分别进行了讨论。一类较预不变凸函数更广的函数—半预不变凸函数，是 Yang 等人[11]在研究变分不等式时提出的，此外，关于此类函数的一些应用在文献[11]也有所讨论。最近，彭再云等人在文献[12-14]中分别提出了 G-半预不变凸函数、强 G-(半)预不变凸性，此外，关于这些函数的性质及其在非线性规划中的一些重要应用也有所研究。

受文献[7,9,12-14]的启发，本文提出了一类新的广义凸函数——严格 G-半预不变凸函数。首先，用例子验证了此类函数的存在性，并举例说明此类函数是严格预不变凸函数的真推广；然后对严格 G-半预不变凸函数的一些基本性质进行了讨论；最后分别研究了严格 G-半预不变凸函数在无束非线性规划问题、带不等式约束的非线性规划问题及多目标规划问题 Mond-Weir 对偶中的应用，获得了一些对偶理论和最优性结果，并举例验证说明所得结论的正确性。

1 基本概念与例子

本文均假设 $K\subset\mathbf{R}^n$ 为非空集合。

定义 1[12]　称集合 K 是关于 η 的半不变凸集，若存在一个向量函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$(当 $x\neq y$ 时，$\eta\neq 0$)对 $\forall x,y\in K,\lambda\in[0,1]$都有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in K$。

* **收稿日期**：2015-04-28　　**修回日期**：2015-05-09　　**网络出版时间**：2015-9-28 12:16

资助项目：国家自然科学基金青年基金(No. 11301571)；重庆市自然科学基金项目(No. cstc2015jcyjA00025)；重庆市教委青年骨干项目；重庆交通大学创新训练项目(No. 20140618053)

作者简介：李科科，男，研究方向为向量优化理论与应用，E-mail：likeke135@163.com；**通信作者**：彭再云，教授，博士，E-mail：pengzaiyun@126.com

网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150928.1216.024.html

定义 2[13]　设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的半不变凸集，记 f 在点 $y\in K$ 关于 η 是半预不变凸函数，如果对任意 $x\in K$，及 $\lambda\in[0,1]$满足$\lim\limits_{\lambda\to0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$，且 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。若对 $\forall y\in K$，f 在点 y 关于 η 均为半预不变凸函数，称 f 是 K 上关于 η 的半预不变凸函数。当 $x\neq y$ 时，若以上定义中严格不等式成立，称 f 在点 $y\in K$ 是关于 η 的严格半预不变凸函数。

定义 3[13]　设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的半不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 是 K 上关于 η 的 G-半预不变凸函数，当且仅当存在连续的实值递增函数 $G:I_f(K)\to\mathbf{R}$ 和向量函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$，使得对所有 $x,y\in K$ 和 $\lambda\in[0,1]$满足$\lim\limits_{\lambda\to0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$，且 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))\leqslant G^{-1}(\lambda G(f(x)))+(1-\lambda)G(f(y)))$。

下面给出严格 G-半预不变凸函数的定义。

定义 4　设集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 η 的半不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上关于 η 为严格 G-半预不变凸函数，有且只有存在向量函数 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 和连续的实值递增函数 $G:I_f(K)\to\mathbf{R}$，使得对 $\forall x,y\in K$，$x\neq y$ 和 $\lambda\in(0,1)$满足$\lim\limits_{\lambda\to0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$，且 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))]$。

注 1　定义 4 中如果对于 $\forall x,y\in K$，$f(x)\neq f(y)$，$\lambda\in(0,1)$有上式成立，则称函数 f 在 K 上关于 η 为半严格 G-半预不变凸函数。

下面给出例 1 说明严格 G-半预不变凸函数的存在性。

例 1　设 $K=\mathbf{R}$，$f(x)=\exp(4x-1)$，$G(t)=\ln t$，$t\in(0,+\infty)$，$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\lambda x-y,x>0,y\geqslant0;\\ x-y-1,x\leqslant0,y\leqslant0;\\ -\lambda x-y,x>0,y<0;\\ x-y-\lambda,x\leqslant0,y>0。\end{cases}$

根据定义 4，容易验证函数 f 是 K 上关于 η 的严格 G-半预不变凸函数。

注 2　每个严格半预不变凸函数均是关于同一 η 的严格 G-半预不变凸函数(只需取 $G(x)=x$)，但反之可能不成立。很明显，严格半预不变凸函数是严格 G-半预不变凸函数的特殊情形。

下述例 2 说明了严格 G-半预不变凸函数可能不是关于同一 η 的严格半预不变凸函数。

例 2　设 $K=(0,+\infty)$，$f(x)=\ln x$，$G(t)=\mathrm{e}^t$，$t\in(-\infty,+\infty)$，$\eta(x,y,\lambda)=\lambda x-y$。

易知 $K=(0,+\infty)$ 是关于 $\eta(x,y,\lambda)=\lambda x-y$ 的半不变凸集，以及 f 是关于 η 的严格 G-半预不变凸函数。但取 $x=1$，$y=4$，$\lambda=0.5$ 时，有 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f(y+\lambda(\lambda x-y))=f(2.25)=\ln(2.25)>\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=0.5\ln 1+0.5\ln 4=\ln 2$，因此 f 不是关于同一 η 的严格半预不变凸函数。

下面的例 3 说明了 G-半预不变凸函数可能不是关于同一 η 的严格/半严格 G-半预不变凸函数。

例 3　设 $K=\mathbf{R}$，$f(x)=\ln(|x|+1)$，$G(t)=\mathrm{e}^t$，$t\in[0,+\infty)$。容易验证 K 是一个关于$\eta(x,y,\lambda)$的半不变凸集和$\lim\limits_{\lambda\to0}\lambda\eta(x,y,\lambda)=0$，其中 $\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\lambda x-y,x\geqslant0,y\geqslant0;\\ -y,x\geqslant0,y<0;\\ -x-y,x<0,y\geqslant0;\\ \lambda x-y,x<0,y<0。\end{cases}$

由定义 3 可知，f 是一个关于 η 的 G-半预不变凸函数。然而，令 $x=-1$，$y=2$，$\lambda=0.5$，可以得到

$$f(x)=f(-1)=\ln 2,f(y)=f(2)=\ln 3,f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=\ln(|y+\lambda(-x-y)|+1)=\ln(2.5)=\ln(0.5\mathrm{e}^{\ln 2}+0.5\mathrm{e}^{\ln 3})=G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))]。$$

显然，f 关于 η 既不是严格 G-半预不变凸函数也不是半严格 G-半预不变凸函数。

2 严格 G-半预不变凸函数的一些基本性质

本小节将讨论严格 G-半预不变凸函数的几个性质。

说明：称函数 G 满足可加性，如果实值函数 G 满足 $G(x+y)=G(x)+G(y)$，x,y 属于该函数的定义域；称函数 G 满足正齐次性，如果实值函数 G 满足 $G(kx)=kG(x)$，$k>0$，x 属于该函数的定义域。

引理 1[13]　设 $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个连续实值函数，则 G^{-1} 是递增函数当且仅当 G 也是递增函数。

引理 2[14]　设 $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个连续实值函数，如果 G 递增且是凹的，则 G^{-1} 是凸的；如果 G 递增且是凸的，则 G^{-1} 是凹的。

定理 1　设 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半不变凸集，函数 $f,g:K\to\mathbf{R}$ 均是 K 上关于同一 η 的严格 G-半预不变凸函数，α 和 $k>0$ 均为任意常数，则

1）若 $G:I_f(K)\to\mathbf{R}$ 和 G^{-1} 满足可加性，则 $f+g$ 和 $f+\alpha$ 都是 K 上关于同一 η 的严格 G-半预不变凸函数；

2）若 $G:I_f(K)\to\mathbf{R}$ 和 G^{-1} 满足正齐次性，则 kf 是 K 上关于同一 η 的严格 G-半预不变凸函数。

证明　因为 f,g 均是关于同一 η 的严格 G-半预不变凸函数，对于 $\forall x,y\in K,x\neq y$ 和 $\lambda\in(0,1)$，有 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))]$，$g(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(g(x))+(1-\lambda)G(g(y))]$。

由以上两式以及 G 和 G^{-1} 的可加性，可得

$$\begin{gathered}(f+g)(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))=f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))+g(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<\\ G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))]+G^{-1}[\lambda G(g(x))+(1-\lambda)G(g(y))]=\\ G^{-1}[\lambda G((f+g)(x))+(1-\lambda)G((f+g)(y))]。\end{gathered}$$

故 $f+g$ 是 K 上关于同一 η 的严格 G-半预不变凸函数。同理可得 $f+\alpha$ 和 kf 都是 K 上关于同一 η 的严格 G-半预不变凸函数。　证毕

定理 2　若 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半不变凸集，函数 $f_i:K\to\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$ 均为关于同一 η 的严格 G-半预不变凸函数，若 $G:I_f(K)\to\mathbf{R}$ 和 G^{-1} 均具有可加性和正齐次性，$\lambda_i>0,i=1,\cdots,n$ 均为任意常数，则 $f=\sum_{i=1}^n\lambda_i f_i(x)$ 是 K 上关于同一 η 的严格 G-半预不变凸函数。

证明　利用定理 1 显然可得结论。　证毕

定理 3　设 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半不变凸集，f 是 K 上关于 η 的严格 G_1-半预不变凸函数，G_2 在 $I_f(K)$ 上是一个连续且严格递增函数，若 $g(t)=G_2G_1^{-1}$ 是 G_1 关于 f 的像上的凸函数，则函数 f 为关于 η 的严格 G_2-半预不变凸函数。

证明　由于 f 是严格 G_1-半预不变凸函数，则对 $\forall x,y\in K,x\neq y,\forall\lambda\in(0,1)$ 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G_1^{-1}[\lambda G_1(f(x))+(1-\lambda)G_1(f(y))]。$$

因为 G_2 在 $I_f(K)$ 是连续且严格递增函数，则由上式可得

$$G_2(f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda)))<G_2G_1^{-1}[\lambda G_1(f(x))+(1-\lambda)G_1(f(y))]。$$

由于 $g(t)=G_2G_1^{-1}$ 在 G_1 关于 f 的像上是凸的，于是对 $\forall x,y\in K,x\neq y,\forall\lambda\in(0,1)$ 有

$$\begin{gathered}G_2G_1^{-1}[\lambda G_1(f(x))+(1-\lambda)G_1(f(y))]\leqslant\lambda G_2G_1^{-1}G_1(f(x))+(1-\lambda)G_2G_1^{-1}G_1(f(y))=\\ \lambda G_2(f(x))+(1-\lambda)G_2(f(y))。\end{gathered}$$

又由引理 1 可知 G_2^{-1} 是增函数，则有

$$G_1^{-1}(\lambda G_1(f(x))+(1-\lambda)G_1(f(y)))\leqslant G_2^{-1}(\lambda G_2(f(x))+(1-\lambda)G_2(f(y)))。$$

综上可知，对 $\forall x,y\in K,x\neq y,\forall\lambda\in(0,1)$ 有 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G_2^{-1}(\lambda G_2(f(x))+(1-\lambda)G_2(f(y)))$ 成立，故 f 是关于 η 的严格 G_2-半预不变凸函数。　证毕

定理 4　设 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半不变凸集，函数 $f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上关于 η 为严格 G-半预不变凸函数，且对 $\forall x,y\in K$，都有 $f(y+\eta(x,y,1))\leqslant f(x)$ 成立，那么水平集 $S_\alpha=\{x\in K:f(x)\leqslant\alpha\}$ 是一个关于 η 的半不变凸集，其中 $\alpha\in\mathbf{R}$。

证明　设 $\forall x,y\in S_\alpha$ 且 $x\neq y$，则 $f(x)\leqslant\alpha,f(y)\leqslant\alpha$。

因为 K 是关于 η 的半不变凸集，则对 $\forall\lambda\in[0,1]$，有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in K$。由题设易知，当 $\lambda=0,1$ 时，有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in S_\alpha$ 成立。故只需要证明，对 $\forall\lambda\in(0,1)$ 有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in S_\alpha$ 即可。

据 f 的严格 G-半预不变凸性及引理 1 可知，对 $\forall\lambda\in(0,1)$ 有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))]\leqslant G^{-1}[\lambda G(\alpha)+(1-\lambda)G(\alpha)]=G^{-1}(G(\alpha))=\alpha。$$

综上可得，对 $\forall x,y\in S_\alpha,\lambda\in[0,1]$ 有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in S_\alpha$，即水平集 S_α 是一个关于 η 的半不变凸集。　证毕

3 严格 G-半预不变凸函数在非线性规划中的应用

本节将分别研究无约束条件和有约束条件的非线性规划问题及其 Mond-Weir 型对偶问题，获得在严格 G-半预不变凸性下的一些最优性结果和对偶理论。然后，给出例子说明主要的结果。

首先考虑如下无约束非线性规划问题(P_1)：

$$\min\quad f(x),$$
$$\mathrm{s.t.}\quad x\in K。$$

其中 K 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集，$f:K\to\mathbf{R}$。

定理5　对于问题(P_1)，设 K 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半不变凸集，f 在集合 K 上关于 η 是严格 G-半预不变凸函数，则问题(P_1)的每一个局部最优解都是它的全局最优解。如果对 $\forall x,y\in K$，有 $f(y+\eta(x,y,1))=f(x)$，则问题(P_1)最优解集是一个关于 η 半不变凸集。

证明　1) 若 $y\in K$ 是问题(P_1)的局部最优解，但不是全局最优解。则存在 $x\in K$ 满足 $f(x)<f(y)$。由于 f 是 K 上关于 η 的严格 G-半预不变凸函数，根据定义4可知，G 为实值递增函数，且有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))]。\tag{1}$$

由 G 为实值递增函数和引理1可知，G^{-1} 也为递增函数，从而再结合(1)式和 $f(x)<f(y)(0<\lambda<1)$，可得 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(y))+(1-\lambda)G(f(y))]=G^{-1}(G(f(y)))=f(y)$。

于是对于任意的 $\lambda\in(0,1)$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<f(y)。\tag{2}$$

当 λ 充分小时，则(2)式与 $y\in K$ 是局部最优解矛盾，故(P_1)的局部最优解是它的全局最优解。

2) 设 A 是问题(P_1)的最优解集，若 $\forall x,y\in A$，且 $x\neq y$，则 $f(x)=f(y)$。因为当 $\lambda=0,1$ 时，有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in A$ 成立。故要证明 A 是关于 η 的半不变凸集，只需证明对 $\forall\lambda\in(0,1)$ 有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in A$ 成立即可。

K 为半不变凸集，则 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in K$。现假设 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\notin A$，即

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))>f(x)=f(y)。\tag{3}$$

又由 f 是 K 上关于 η 的严格 G-半预不变凸函数及 $f(x)=f(y)$，可得到

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))]=G^{-1}[\lambda G(f(y))+(1-\lambda)G(f(y))]=$$
$$G^{-1}(G(f(y)))=f(y)=f(x)。$$

即 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<f(x)=f(y)$，这与(3)式矛盾，故 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in A$。因此，($\mathrm{P}_1$)的最优解集是一个关于 η 的半不变凸集。　证毕

下面举例说明定理5的正确性。

例4　设 $K=(-\infty,+\infty)$，$f=\arctan x^2$，$\eta(x,y,\lambda)=\lambda x-y$，$G(t)=\tan t$，$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$。

容易验证 $K=(-\infty,+\infty)$ 是关于 η 的半不变凸集、函数 f 是 K 上关于 η 的严格 G-半预不变凸函数。

取 $x=0$，显然 $x=0$ 是问题(P_1)的局部最优解，也是问题(P_1)的全局最优解，容易验证最优解集 $A=\{0\}$ 是关于 η 的半不变凸集。

下面考虑如下带约束非线性规划问题(P_2)：

$$\min\quad f(x),$$
$$\mathrm{s.t.}\quad g_i(x)\leqslant 0,i\in J=\{1,\cdots,m\},x\in K。$$

其中 K 是 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集，$f,g_i:K\to\mathbf{R}$，$i\in J$。(P_2)的可行解集为 $D=\{x\in K\mid g_i(x)\leqslant 0,i\in J\}$。

定理6　对于问题(P_2)，设 K 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半不变凸集，f 是 K 上关于 η 的严格 G-半预不变凸函数，$g_i(i\in J)$ 是 K 上关于同一 η 的严格 G_i-半预不变凸函数，且对 $\forall x,y\in K$，有 $g_i(y+\eta(x,y,1))\leqslant g_i(x)$，$f(y+\eta(x,y,1))=f(x)$，则问题($\mathrm{P}_2$)的可行解集 D 和最优解集 A 均是关于同一 η 的半不变凸集。

证明　1) 设 $\forall x,y\in D$，有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in K$ 且

$$g_i(x)\leqslant 0,g_i(y)\leqslant 0,\forall i\in J。\tag{4}$$

又 $g_i, i\in J$ 是 D 上关于 η 的严格 G_i-半预不变凸函数，则 $G_i, i\in J$ 均为递增函数，且对 $\forall x,y\in D, x\neq y, \lambda\in(0,1)$，有

$$g_i(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G_i^{-1}[\lambda G_i(g_i(x))+(1-\lambda)G_i(g_i(y))], \forall i\in J。\tag{5}$$

由 $G_i, i\in J$ 的递增性和引理 1 可得，$G_i^{-1}, i\in J$ 也均为递增函数，联合(4)式和(5)式对 $\forall i\in J$ 有

$$g_i(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G_i^{-1}[\lambda G_i(0)+(1-\lambda)G_i(0)]=G_i^{-1}(G_i(0))=0。$$

故对 $\forall i\in J, \forall\lambda\in(0,1)$，有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in D$。又因为当 $\lambda=0,1$ 时，有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in D$ 成立，所以 D 是关于 η 的半不变凸集。

2) 设 $\forall x,y\in A$，则 $f(x)=f(y)$。由 1)部分可得，$y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in D$。

假设 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\notin A$，则

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))>f(x)=f(y)。\tag{6}$$

因为 f 是 K 上关于 η 的严格 G-半预不变凸函数，则对 $\forall x,y\in A, x\neq y, \lambda\in(0,1)$，有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(y))]。\tag{7}$$

又由于 $f(x)=f(y)$，则由(7)式有

$$f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<G^{-1}[\lambda G(f(x))+(1-\lambda)G(f(x))]=G^{-1}[G(f(x))]=f(x)=f(y)。$$

这与(6)式矛盾，故 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in A$。又因为当 $\lambda=0,1$ 时，有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in A$ 成立，于是最优解集 A 是关于 η 的半不变凸集。　证毕

定理 7　对于问题(P_2)，设 K 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 的半不变凸集，f 是 K 上关于 η 的严格 G-半预不变凸函数，$g_i(i\in J)$是 K 上关于同一 η 的严格 G_i-半预不变凸函数。则问题(P_2)的每一个局部最优解均是它的全局最优解。

证明　(反证法)若 $y\in K$ 是问题(P_2)的局部最优解，但不是全局最优解。则存在 $x\in K$ 满足 $f(x)<f(y)$。由定理 6 可知，对 $\forall\lambda\in(0,1)$有 $y+\lambda\eta(x,y,\lambda)\in D$。类似定理 5 的证明过程可得，对于任意的 $0<\lambda<1$，有 $f(y+\lambda\eta(x,y,\lambda))<f(y)$。当 λ 充分小时，这与 $y\in K$ 是局部最优解矛盾，故可得(P_2)的局部最优解是它的全局最优解。　证毕

下面举例验证说明定理 6 和定理 7。

例 5　考虑如下带约束非线性规划问题(P_2)：

$$\begin{aligned}&\min\quad f(x)=\exp(\arctan|x|),\\&\text{s.t.}\quad g_1(x)=\arctan(|x|-1)\leqslant 0, g_2(x)=|x|-2\leqslant 0, x\in K=\mathbf{R}。\end{aligned}$$

其中 $G(t)=\tan(\ln t), t\in[1,e^{\frac{\pi}{2}})$，$G_1(t)=\tan t, t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，$G_2(t)=t, t\in[-2,+\infty)$，$\eta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\lambda x-y, x\neq 0;\\\lambda y-2y, x=0。\end{cases}$

据定义 4，容易验证 f 在集合 K 上关于 η 为严格 G-半预不变凸函数，g_1 在集合 K 上关于同一 η 是严格 G_1-半预不变凸函数，g_2 在集合 K 上关于同一 η 为严格 G_2-半预不变凸函数。

易得，可行解集为 $D=[-1,1]$，最优集解 $A=\{0\}$。显然，可行解集 $D=[-1,1]$及最优集解 $A=\{0\}$ 均是关于 η 的半不变凸。而且还可验证 $x=0$ 是问题(P_2)的局部最优解，也是(P_2)的全局最优解。

最后，将探究严格 G-半预不变凸函数在对偶问题中的一些应用，下面先给出相关概念。

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$x=y$ 表示 $x_i=y_i\ (i=1,2,\cdots,n)$；$x<y$ 表示 $x_i<y_i(i=1,2,\cdots,n)$；$x\leqq y$ 表示 $x_i\leqslant y_i(i=1,2,\cdots,n)$；$x\leqslant y$ 表示 $x\leqq y$，而 $x\neq y$。

定义 5[14]　对问题(P)：$\min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))$($x\in S$，$S$ 为所有满足问题(P)约束条件点的集合)，设 x^* 是问题的可行解。如果不存在(P)的可行解 x，使 $f(x)\leqslant f(x^*)$成立，那么称 x^* 是该问题的有效解(若 min 改成 max，$f(x)\leqslant f(x^*)$应改为 $f(x^*)\leqslant f(x)$)。

讨论如下多目标规划问题(FP)：

$$\begin{cases}\min\quad f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_p(x)),\\\text{s.t.}\quad h_j(x)\leqslant 0, j=1,\cdots,k, x\in K。\end{cases}$$

其中:$f_i:K\to\mathbf{R}(i=1,\cdots,p)$;$h_j:K\to\mathbf{R}(j=1,\cdots,k)$;$K$ 为关于 η 的半不变凸集。记(FP)的可行域为 $W_0=\{x\in K\mid h_j(x)\leqslant 0,j=1,\cdots,k\}$。

(FP)问题的 Mond-Weir 型对偶问题(FD)的形式如下。

$$\begin{aligned}&\max\quad f(y)=(f_1(y),f_2(y),\cdots,f_p(y)),\\&\text{s. t.}\quad \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j\nabla h_j(y)=0,\\&\qquad\quad \sum_{j=1}^{k}u_jh_j(y)\geqslant 0,\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\geqslant 0,u=(u_1,u_2,\cdots,u_k)\geqq 0\ 。\end{aligned}$$

令 $W_1=\{(\lambda,u,y)\in\mathbf{R}_+^p\times\mathbf{R}_+^k\times K\mid \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j\nabla h_j(y)=0,\sum_{j=1}^{k}u_jh_j(y)\geqslant 0,\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)\geqslant 0,\ u=(u_1,u_2,\cdots,u_k)\geqq 0\}$。

定理 8 (弱对偶)假设 x 是(FP)的可行解(即 $x\in W_0$),(λ,u,y)是(FD)的可行解(即$(\lambda,u,y)\in W_1$),$f_i(i=1,\cdots,p)$,$h_j(j=1,\cdots,k)$是关于同一 η 的严格 G-半预不变凸函数,如果 G 递增且是凹的,G^{-1} 和 G 具有可加性和正齐次性,于是有 $f(x)\geqslant f(y)$。

证明 反证法。假设 $f(x)<f(y)$,即 $f_i(x)<f_i(y)$。因为 $f_i(i=1,\cdots,p)$,$h_j(j=1,\cdots,k)$是严格 G-半预不变凸的,所以由定理2知 $\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i$,$\sum_{j=1}^{k}u_jh_j$ 也是严格 G-半预不变凸函数。根据严格 G-半预不变凸函数的定义及 G 的可加性和正齐次性,对 $\forall x,y\in K,x\neq y,t\in(0,1)$,有

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(y+t\eta(x,y,t))<G^{-1}\left[t\sum_{i=1}^{p}\lambda_iG(f_i(x))+(1-t)\sum_{i=1}^{p}\lambda_iG(f_i(y))\right]\ 。$$

由假设有 $f_i(y+t\eta(x,y,t))<G^{-1}[tG(f_i(x))+(1-t)G(f_i(y))]$,$i=1,2,\cdots,p$。

又因 G 递增且是凹的,由引理2知 G^{-1} 是凸的,所以有

$$f_i(y+t\eta(x,y,t))<tG^{-1}(G(f_i(x)))+(1-t)G^{-1}(G(f_i(y)))=t(f_i(x))+(1-t)(f_i(y)),i=1,2,\cdots,p。$$

于是 $\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(y+t\eta(x,y,t))<t\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(f_i(x))+(1-t)\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(f_i(y))$ 。

因此有 $\dfrac{\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(y+t\eta(x,y,t))-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(f_i(y))}{t}<\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(x)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(y)$。由 t 的任意性,故

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(y+t\eta(x,y,t))-\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(y)}{t}\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(x)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(y),$$

即
$$\bar{\eta}(x,y)\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla f_i(y)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(x)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(y)。\tag{10}$$

其中 $\bar{\eta}(x,y)=\lim_{t\to 0^+}\eta(x,y,t)$,下文中也是一样。

同理可得
$$\bar{\eta}(x,y)\sum_{j=1}^{k}u_j\nabla h_j(y)\leqslant\sum_{j=1}^{k}u_jh_j(x)-\sum_{j=1}^{k}u_jh_j(y)\ 。\tag{11}$$

(10)、(11)式相加可得

$$\bar{\eta}(x,y)(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j\nabla h_j(y))\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(x)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_if_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_jh_j(x)-\sum_{j=1}^{k}u_jh_j(y)\ 。$$

由$(\lambda,u,y)\in W_1$ 知,上式左端为0。因为 $x\in W_0$,$(\lambda,u,y)\in W_1$,所以 $h_j(x)\leqslant 0$,$\sum_{j=1}^{k}u_jh_j(y)\geqslant 0$。再由假设 $f(x)<f(y)$以及 $\lambda\geqslant 0$,$u\geqq 0$ 知,上式右端小于0,从而推得矛盾,故有 $f(x)\geqslant f(y)$成立。 证毕

引理 3[14] 设 x^* 是(FP)的有效解,则存在 $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_P^*)\geqslant 0$,$u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_k^*)\geqq 0$ 使得:1) $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^*\nabla f_i(x^*)+\sum_{j=1}^{k}u_j^*\nabla h_j(x^*)=0$;2) $\sum_{j=1}^{k}u_j^*h_j(x^*)=0$。

定理 9　（强对偶）设 x^* 是(FP)的有效解，(λ,u,y) 是(FD)的可行解（即 $(\lambda,u,y)\in W_1$），$f_i(i=1,\cdots,p)$，$h_j(j=1,\cdots,k)$ 是严格 G-半预不变凸函数，若 G 递增且是凹的，G^{-1} 和 G 满足可加性和正齐次性，则存在 $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_P^*)\geqslant 0$，$u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_k^*)\geqq 0$，使得 (λ^*,u^*,x^*) 是(FD)的有效解。

证明　由引理 3 知，存在 $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\cdots,\lambda_P^*)\geqslant 0$，$u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_k^*)\geqq 0$，使得 1)、2) 成立，从而 (λ^*,u^*,x^*) 是(FD)的可行解。由定理 8 知，对(FD)的可行解 (λ,u,y) 有 $f(x^*)\geqslant f(y)$。由定义 5 知 (λ^*,u^*,x^*) 是(FD)的有效解。　　证毕

定理 10　（逆对偶）设 x^* 是(FP)的可行解（即 $x^*\in W_0$），(λ,u,y) 是(FD)的可行解（即 $(\lambda,u,y)\in W_1$），$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x^*)<\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(y)$，且 $f_i(i=1,\cdots,p)$，$h_j(j=1,\cdots,k)$ 是关于同一 η 的严格 G-半预不变凸函数。如果 G 递增且是凹的，G^{-1} 和 G 满足可加性和正齐次性，则有 $x^*=y$，且 y 是(FP)的有效解。

证明　先证 $x^*=y$。如不然，假设 $x^*\neq y$。由于 f_i，h_j 均是严格 G-半预不变凸函数，G^{-1} 和 G 具有可加性和正齐次性，故 $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j$ 也是严格 G-半预不变凸函数，又因为 G 递增且是凹的，根据严格 G-半预不变凸函数的定义及定理 8 的推导过程有

$$\bar{\eta}(x^*,y)\Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j\nabla h_j(y)\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x^*)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(x^*)-\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(y),$$

由 $(\lambda,u,y)\in W_1$ 知，上式左端为 0，即有 $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x^*)+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(x^*)\geqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(y)$。因为 $x^*\in W_0$，所以 $h_j(x^*)\leqslant 0$，由上式可得 $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x^*)\geqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(y)$。

这与已知 $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x^*)<\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(y)$ 矛盾，故有 $x^*=y$。

下证 x^* 是(FP)的有效解。如果 x^* 不是(FP)的有效解，根据定义 5 可知，存在(FP)的可行解，满足 $f(x)\leqslant f(x^*)$，即 $f_i(x)\leqslant f_i(x^*)$。因为 $\lambda\geqslant 0$，所以 $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x^*)$。

由 $x\in W_0$，以及 $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x^*)<\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(y)$ 知

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x)+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(x)<\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(y) \tag{12}$$

因为 $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j$ 是严格 G-半预不变凸函数且 G 递增且是凹的，故由引理 2 及定理 8 的证明过程知

$$\bar{\eta}(x,y)\Big(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\nabla f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j\nabla h_j(y)\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x)-\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(y)+\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(x)-\sum_{j=1}^{k}u_j h_j(y)。$$

上式左端为 0，而据(12)式知上式右端小于 0，出现矛盾，则假设不成立。故 x^* 是(FP)的有效解。　　证毕

参考文献：

[1] Schaible S, Ziemba W T. Generalized concavity in optimization and economics[M]. London, UK: Academic Press Inc, 1981.

[2] Mishra S K, Giorgi G. Invexity and optimization, nonconvex optimizatiom and its applications[M]. Berlin: Spring, 2008.

[3] Hanson M A. On sufficiency of Kuhn-Tucker conditions [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 80(2): 545-550.

[4] Weir T, Mond B. Preinvex functions in multiobjective optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1988, 136(1): 29-38.

[5] Yang X M, Li D. On properties of preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 256(1): 229-241.

[6] Yang X M, Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 258 (1): 287-308.

[7] Antczak T. New optimality conditions and duality results of G type in differentiable mathematical programming[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2007, 66(7): 1617-

1632.

[8] Antczak T. G-preinvex functions in mathmatical programming[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2008,217(1):212-226.

[9] Peng Z Y. Semistrictly G-preinvexity and its applications [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 2012 (1):198-209.

[10] 彭再云,周选林,赵勇. 强 G-预不变凸函数的性质及应用[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2012,29(4):12-17.
Peng Z Y,Zhou X L,Zhao Y. Characteristics and applications of strongly G-preinvex functions[J]. Journal of Chonmgqing Normal University:Natural Science,2012,29 (4):12-17.

[11] Yang X Q,Chen G Y. A class of nonconvex functions and prevariational inequalities [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1992,169(2):359-373.

[12] Peng Z Y,Chang S S. Some properties of semi-G-preinvex functions[J]. Taiwan J Math,2013,17(3):873-884.

[13] 彭再云,孔祥熙. 强 G-半预不变凸性与非线性规划问题[J]. 广西师范大学学报:自然科学版,2013,31(1):48-53.
Peng Z Y,Kong X X. Strongly semi-G-preinvexity and in nonlinear programming[J]. Journal of Gungxi Normal University:Natural Science,2013,31(1):48-53.

[14] 张德辉,彭再云,龙宪军. 强 G-预不变凸性与多目标规划问题的对偶[J]. 北华大学学报:自然科学版,2012,13:517-523.
Zhang D H,Peng Z Y,Long X J. Strongly semi-G-preinvexity and duality for multi-objective programming[J]. Journal of Beihua University: Natural science, 2012, 13: 517-523.

Operations Research and Cybernetics

The Study of Strict *G*-Semi-preinvexity and Its Applications

LI Keke[1,2], PENG Zaiyun[2], WAN Xuan[3], TANG Ping[4]

(1. School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331;
2. College of Science, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074;
3. Department of Foundation, Chongqing Telecommunication Polytechnic College, Chongqing 402247;
4. School of Mathematics, Chongqing University of Art and Science, Chongqing 402160, China)

Abstract: A class of new generalized convex function—strictly G-semi-preinvex functions is given in this paper, which is an important class of generalized convex functions. It is a true generalization of strictly G-preinvex functions. Firstly, some examples are given to show the existence of strictly G-semi-preinvex functions and the relationships with the related generalized convex functions. Afterwards, some characters of strictly G-semi-preinvex functions are discussed. Finally, the applications of strict G-semi-preinvexity for without constraints and with inequality constraints in nonlinear programming problem and Mond-Weir type duality are given, respectively, then some duality theories and optimality results are obtained. The correctness of the conclusions that f, g_i are strictly G-semi-preinvex functions, respectively, then the feasible sets and the optimal solution sets of the problem (P_2) are semi-invex sets with respect to η, and the local optimal solution is the global optimal solution is verified by examples.

Key words: semi-invex sets; strictly G-semi-preinvex functions; nonlinear programming; duality

(责任编辑 黄 颖)