运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20150613

两台平行机环境下加工时间退化的可拒绝排序问题*

王洪芳, 罗成新
(沈阳师范大学 数学与系统科学学院, 沈阳 110034)

摘要:研究两台平行机环境下加工时间线性退化的可拒绝排序问题,工件的实际加工时间是关于该工件开始加工时间的线性函数,每个工件都有一个独立的截止工期,在截止工期之前或之后完工的任务将分别受到提前和误工工件惩罚。工件允许被拒绝,如果工件被拒绝则需要支付一定的拒绝费用。目标是分别确定接受工件和拒绝工件的任务集合,找到接受任务的最优排序和每个被接受工件的最优任务工期最小化工期、误工工件惩罚、总完工时间以及被拒绝工件的惩罚费用之和。证明了此 NP 难问题可以通过动态规划方法求得最优解,并通过动态规划运用简化执行空间的方法给出了复杂度为 $O(n^5D^2/\varepsilon^2)$ 的全多项式近似策略(FPTAS),其中 n 表示工件的数量,ε 是允许误差界。

关键词:平行机;误工工件惩罚;工期;退化效应;全多项式近似策略;拒绝
中图分类号:O223　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)06-0015-05

经典排序中工件的加工时间是固定的常数,但在实际生产中,工件等待或机器逐渐老化等原因都会引起工件加工时间的增长,即任务的实际加工时间与该工件的开始加工时间有关[1-2]。在以往的传统排序问题中,要求所有工件都被加工,不允许被拒绝,但为了满足某种目的可能会拒绝一部分加工时间过长而利润较小的工件。文献[3]研究了带有释放时间和拒绝的单机排序问题,目标函数是最大完工时间与拒绝惩罚的和,证明该问题是 NP 难的,并给出了 FPTAS。文献[4]研究了带有恶化和拒绝工件的平行机排序问题,目标函数为被接受工件的排序费用与被拒绝工件的惩罚费用之和,其中排序费用分为 $C_{\max}$, $\sum C_j$, $\sum w_jC_j$ 等 3 种情况。文献[5]研究单机条件下加工时间退化问题,目标函数是最小化工期函数、误工工件惩罚以及总完工时间的费用之和,并证明问题按 SPT 规则排序可求得最优解。

本文将文献[5]研究的问题进一步拓展到平行机环境下,并且工件允许被拒绝。由文献[8]可知目标函数是总完工时间和拒绝惩罚费用之和的单机问题是 NP 难的,因而两台平行机环境下,这里的问题至少是 NP 难的。首先运用动态规划方法证明伪多项式时间内可求得问题的最优解,并运用简化执行空间的方法给出一个全多项式近似策略。

1 问题描述

给定 n 个独立的任务 $\{J_1, J_2, \cdots, J_n\}$,在零时刻已全部到达,需要在两台平行机 M_1、M_2 上加工,每台机器一次只能加工一个工件且加工过程不允许中断。工件 J_j 的实际加工时间为 $P_j = a_j + bt$,$t \geqslant 0$ 表示工件的开始加工时间,a_j 是工件的正常加工时间,b 是工件的退化率。d_j 是 J_j 的工期,$E_j = \max\{0, d_j - C_j\}$,$U_j$ 是误工指示变量,如果 $C_j > d_j$,则 $U_j = 1$,否则 $U_j = 0$,其中 C_j 表示 J_j 的完工时间。e_j 是工件 J_j 的拒绝费用。目的是确定接受工件和拒绝工件的任务集合,找到被接受工件的最优任务排序 S^* 和最优任务工期 d_j^* 最小化工期、误工工件惩罚、总完工时间以及被拒绝工件的惩罚费用之和,即目标函数

$$Z = \alpha \sum_{j \in \bar{R}} d_j + \beta \sum_{j \in \bar{R}} U_j + \sum_{j \in \bar{R}} C_j + \sum_{j \in R} e_j ,$$

其中,α、β 是工期、误工工件惩罚的单位费用,R 表示所有被拒绝工件组成的任务集合,$\bar{R}$ 表示所有被加工工件组

* 收稿日期:2014-12-17　　修回日期:2015-04-20　　网络出版时间:2015-9-28 12:16
资助项目:国家自然科学基金(No. 11171050)
作者简介:王洪芳,女,研究方向为应用数学,E-mail:332518357@qq.com;通信作者:罗成新,教授,E-mail:luochengxin@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150928.1216.030.html

成的任务集合。用三参数表示法可以将研究的问题表示为

$$P_2 \mid p_j = a_j + bt, d = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \mid \alpha \sum_{j \in \bar{R}} d_j + \beta \sum_{j \in \bar{R}} U_j + \sum_{j \in \bar{R}} C_j + \sum_{j \in R} e_j 。\tag{1}$$

2 最优解的性质

性质1 存在最优排序,工件从零时刻开始加工,并且相邻工件之间没有空闲。

证明 性质显然成立。 证毕

性质2 存在一个最优排序,在此排序中没有任务提前完工。

证明 假设最优排序 S 中机器 M_1 上存在一个工件 J_i 是提前完工的,即 $E_i > 0$,不妨设 $d_i - C_i = \Delta > 0$。现在构造一个排序 S' 与 S 相同,但 J_i 的工期 $d_i = C_i$。因此两种排序的目标值的差为

$$Z(S) - Z(S') = Z_i(d_i = C_i + \Delta) - Z_i(d_i = C_i) = \alpha(C_i + \Delta - C_i) + \gamma(C_i - C_i) = (\alpha + \gamma)\Delta > 0,$$

与 S 是最优排序矛盾,因此在最优排序中没有任务是提前完工的。 证毕

性质3 对于确定的完工时间,存在任务的最优工期满足 $d_i^* = 0$ 或 $d_i^* = C_i$。

证明 把问题分成两种情况讨论:

情况1 $d_i < C_i$:这时 $U_i = 1$,因此可以令 $d_i = C_i$ 而目标值不增加。

情况2 $d_i > C_i$:这时 $U_i = 0$,因此设 $d_i = 0$ 使目标总费用最小。 证毕

性质4 最优排序中,每台机器上的工件皆按 a_j 非减的顺序(SPT规则)排列。

证明 假设最优排序 S 中机器 M_1 上存在两个相邻工件 J_j, J_{j+1}, J_j 在 J_{j+1} 前加工,$a_j > a_{j+1}$,目标函数值为 Z,现交换两个工件的顺序得到新的排序 S',目标函数值为 Z',将排在 J_j, J_{j+1} 前的总完工时间记为 P_A,这时由文献[2]可知,机器 M_1 上的工件按SPT规则可以得到最优排序。同理,机器 M_2 上的工件经过不断交换直至满足SPT规则而目标函数值不增加,因而可以得出最优排序满足两台机器上的工件皆按 a_j 非减的顺序排列,所以性质4成立。 证毕

由上述最优解的性质,可以把目标函数化简为

$$Z = \sum_{j \in \bar{R}} \min\{\alpha C_j, \beta\} + \sum_{j \in \bar{R}} C_j + \sum_{j \in R} e_j 。\tag{2}$$

3 动态规划

首先将所有工件按 a_k 非减的顺序排列,即 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, $V_k = \{[u_1, u_2, F_k]\}$ 表示加工前 k 个工件时得到的状态向量集合, u_1, u_2 分别表示机器 M_1, M_2 上的最大完工时间, F_k 表示此时的最优目标函数值。假设加工前 $k-1$ 个工件时得到的状态向量集合为 V_{k-1},设 $[u_1', u_2', F_{k-1}] \in V_{k-1}$,当工件 J_k 在机器 M_1 上加工时,有

$$[u_1, u_2, F_k] = [u_1' + a_k + bu_1', u_2', F_{k-1} + \min\{\alpha(u_1' + a_k + bu_1'), \beta\} + u_1' + a_k + bu_1'],$$

当工件 J_k 在机器 M_2 上加工时

$$[u_1, u_2, F_k] = [u_1', u_2' + a_k + bu_2', F_{k-1} + \min\{\alpha(u_2' + a_k + bu_2'), \beta\} + u_2' + a_k + bu_2'],$$

当 J_k 被拒绝时

$$[u_1, u_2, F_k] = [u_1', u_2', F_{k-1} + e_k] 。$$

初始条件为

$$V_1 = \{[a_1, 0, \min\{\alpha a_1, \beta\} + a_1], [0, a_1, \min\{\alpha a_1, \beta\} + a_1], [0, 0, e_1]\},$$

目标函数的最优值为

$$Z^* = \min_{[u_1, u_2, F_n] \in V_n} F_n 。$$

当所有工件都在同一台机器上加工时,可以得到最大完工时间的上界 $C_{\max}$,则 $u_1, u_2 \leqslant C_{\max}$,设 $a_{\max} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{a_i\}$,那么

$$C_{\max} \leqslant a_{\max} \cdot \frac{(1+b)^n - 1}{b} = O(a_{\max} \cdot (1+b)^n) 。\tag{3}$$

因而动态规划方法的时间复杂性为伪多项式 $O(n\log n + nC_{\max}^2) = O(n\log n + na_{\max}^2(1+b)^{2n})$。

4 简化执行空间构造 FPTAS

极小化问题 X 的一族算法 A_ε，对于任意 $0<\varepsilon\leqslant 1$，如果算法 A_ε 得到的目标值不超过该问题最优解的 $(1+\varepsilon)$ 倍且运算的复杂性是输入规模和 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的多项式时间，则这一族算法就称为极小化问题 X 的全多项式时间近似策略。

由定义可知 $\lambda,\mu\leqslant C_{\max}$，因而 $[\lambda,\mu]$ 对应着正方形区域 $[0,C_{\max}]\times[0,C_{\max}]$ 内的几何点。分别从水平和竖直两个方向把这个正方形划分成许多小区域，两个方向上的坐标依次记为 $\Delta^i(i=1,2,\cdots,L)$，其中 $\Delta^L\leqslant C_{\max}$。

算法 A_ε：

1）首先将所有工件按 a_k 非减的顺序排列，设 $V_0^{\#}=\{[0,0,0]\}$，

2）对于每一个状态向量 $[u_1',u_2',F_{k-1}]\in V_{k-1}^{\#}$。

当工件 J_k 在机器 M_1 上加工时，

$$[u_1,u_2,F_k]=[u_1'+a_k+bu_1',u_2',F_{k-1}+\min\{\alpha(u_1'+a_k+bu_1'),\beta\}+u_1'+a_k+bu_1'];$$

当工件 J_k 在机器 M_2 上加工时，

$$[u_1,u_2,F_k]=[u_1',u_2'+a_k+bu_2',F_{k-1}+\min\{\alpha(u_2'+a_k+bu_2'),\beta\}+u_2'+a_k+bu_2'];$$

当 J_k 被拒绝时，$[u_1,u_2,F_k]=[u_1',u_2',F_{k-1}+e_k]$。删除 $V_{k-1}^{\#}$。把 $[\lambda,\mu,W_k]$ 放入 $V_k^{\#}$ 中，其中 $\lambda\in[\Delta^i,\Delta^{i+1}](i=1,2,\cdots,n)$，$\mu\in[\Delta^j,\Delta^{j+1}](j=1,2,\cdots,n)$，$W_k$ 表示 $[\lambda,\mu]$ 所属小区域内所有可能解对应的目标函数值最小者，如果两个不同状态向量的目标函数值 F_k 相同，则任意选择其中一个状态向量加入到 $V_k^{\#}$ 中。

3）算法 A_ε 得到的目标函数值为 $Z_{A_\varepsilon}=\min_{[u_1,u_2,W_n]\in V_n^{\#}}W_n$。

引理 1[10]　对于任意的 $0\leqslant z\leqslant 1$，有 $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\leqslant 1+2z$。

引理 2　设 $[u_1,u_2,F_k]\in V_k$，算法 A_ε 输出的 $[u_1^{\#},u_2^{\#},W_k^{\#}]\in V_k^{\#}$ 满足

$$u_1^{\#}\leqslant\Delta^k u_1,u_2^{\#}\leqslant\Delta^k u_2,W_k^{\#}\leqslant\Delta^k F_k。$$

证明　$[\lambda,\mu]$ 对应着正方形区域 $[0,C_{\max}]\times[0,C_{\max}]$ 内的几何点，因而把这个正方形分别从水平和竖直两个方向划分成许多小区域，两个方向上的坐标依次记为 $\Delta^i(i=1,2,\cdots,L)$，其中 $\Delta^L\leqslant C_{\max}$，$\Delta=1+\frac{\varepsilon}{2n}$，所以由(3)式可知

$$L=|\log_\Delta(C_{\max})|=|\ln(C_{\max})/\ln\Delta|\leqslant\left|\left(1+\frac{2n}{\varepsilon}\right)\ln(C_{\max})\right|=O\left(\frac{n^2}{\varepsilon}D\right),\tag{4}$$

其中

$$D=\max\{\ln a_{\max},\ln(1+b)\}。\tag{5}$$

由归纳法知，当 $k=0$ 时，有 $V_0^{\#}=V_0$，问题是平凡的，此时引理 2 成立。假设前 $k-1$ 个状态向量坐标都满足引理 2，则有 $[u_1',u_2',F'_{k-1}]\in V_{k-1}$，$[u_1'^{\#},u_2'^{\#},F'^{\#}_{k-1}]\in V_{k-1}^{\#}$，满足 $u_1'^{\#}\leqslant\Delta^{k-1}u_1'$，$u_2'^{\#}\leqslant\Delta^{k-1}u_2'$，$F'^{\#}_{k-1}\leqslant\Delta^{k-1}F'_{k-1}$。现在考虑第 k 个工件，设 $[u_1,u_2,F_k]\in V_k$，下面分成 3 种情况进行讨论。

情形 1：

$$[u_1,u_2,F_k]=[u_1'+bu_1'+a_k,u_2',F'_{k-1}+\min\{\alpha(u_1'+bu_1'+a_k),\beta\}+u_1'+bu_1'+a_k]。$$

情形 2：

$$[u_1,u_2,F_k]=[u_1',u_2'+bu_2'+a_k,F'_{k-1}+\min\{\alpha(u_2'+bu_2'+a_k),\beta\}+u_2'+bu_2'+a_k]。$$

情形 3：

$$[u_1,u_2,F_k]=[u_1',u_2',F'_{k-1}+e_k]。$$

在情形 1 下，因为 $[u_1',u_2',F'_{k-1}]\in V_{k-1}$，$[u_1'^{\#},u_2'^{\#},F'^{\#}_{k-1}]\in V_{k-1}^{\#}$ 满足

$$u_1'^{\#}\leqslant\Delta^{k-1}u_1',u_2'^{\#}\leqslant\Delta^{k-1}u_2',F'^{\#}_{k-1}\leqslant\Delta^{k-1}F'_{k-1},$$

根据算法 A_ε 有

$$V_k^{\#}=[u_1'^{\#}+bu_1'^{\#}+a_k,u_2'^{\#},F'^{\#}_{k-1}+\min\{\alpha(u_1'^{\#}+bu_1'^{\#}+a_k),\beta\}+u_1'^{\#}+bu_1'^{\#}+a_k]。$$

这个向量在简化执行空间过程中可能会被删除，因此令 $V_k^{\#}=\{[\lambda,\mu,W_k]\}$，这时 W_k 对应着 $[\lambda,\mu]$ 所在小区域内

所有可行解的最小目标函数值。这时有

$$\lambda\leqslant\Delta(u_1'^{\#}+bu_1'^{\#}+a_k)\leqslant\Delta(\Delta^{k-1}u_1'+b\Delta^{k-1}u_1'+a_k)\leqslant\Delta^k(\Delta u_1'+bu_1'+a_k)=\Delta^k u_1,$$

$$\mu\leqslant\Delta u_2'^{\#}\leqslant\Delta\cdot\Delta^{k-1}u_2'=\Delta^k u_2,$$

$$W_k\leqslant F_{k-1}'^{\#}+\min\{\alpha(\Delta u_1'^{\#}+b\Delta u_1'^{\#}+a_k),\beta\}+\Delta u_1'^{\#}+b\Delta u_1'^{\#}+a_k\leqslant$$

$$\Delta^{k-1}F_{k-1}'+\min\{\alpha(\Delta^k(u_1'+bu_1'+a_k)),\beta\}+\Delta^k(u_1'+bu_1'+a_k)\leqslant$$

$$\Delta^k(F_{k-1}'+\min\{\alpha(u_1'+bu_1'+a_k),\beta\}+(u_1'+bu_1'+a_k))\leqslant\Delta^k F_k,$$

因此在情形1条件下,引理2成立。情形2条件下,证明过程同情形1类似。情形3条件下,工件 J_k 被拒绝,因而 $[u_1,u_2,F_k]=[u_1',u_2',F_{k-1}'+e_k]$,$[u_1^{\#},u_2^{\#},F_k^{\#}]=[u_1'^{\#},u_2'^{\#},F_{k-1}'^{\#}+e_k]$,向量 $[u_1^{\#},u_2^{\#},F_k^{\#}]=[u_1'^{\#},u_2'^{\#},F_{k-1}'^{\#}+e_k]$ 在简化执行空间过程中可能会被删除,因此令

$$V_k^{\#}=\{[\lambda,\mu,W_k]\},$$

此时 W_k 仍对应着同一小区域内的最小目标函数值。因此有

$$\lambda\leqslant\Delta u_1'^{\#}\leqslant\Delta^k u_1'=\Delta^k u_1,\mu\leqslant\Delta u_2'^{\#}\leqslant\Delta^k u_2'=\Delta^k u_2,$$

$$W_k\leqslant F_{k-1}'^{\#}+e_k\leqslant\Delta^{k-1}F_{k-1}'+e_k\leqslant\Delta^{k-1}(F_{k-1}'+e_k)=\Delta^{k-1}F_k\leqslant\Delta^k F_k。$$

通过上述3种情况可知引理2的正确性。 证毕

定理1 对任意 $\varepsilon>0$,设问题的最优解为 Z^*,那么算法 A_ε 输出的目标值 Z_{A_ε} 满足

$$Z_{A_\varepsilon}\leqslant(1+\varepsilon)Z^*$$

证明 通过定义,设最优解 $[u_1^*,u_2^*,F_n^*]\in V_n$,算法 A_ε 输出的目标值为 $[u_1^{\#},u_2^{\#},W_n^{\#}]\in V_n^{\#}$,由引理2可知,

$$u_1^{\#}\leqslant\Delta^n u_1^*,u_2^{\#}\leqslant\Delta^n u_2^*,W_n^{\#}\leqslant\Delta^n F_n^*,$$

所以

$$W_n^{\#}\leqslant\Delta^n F_n^*=\left(1+\frac{\varepsilon}{2n}\right)^n F_n^*\leqslant(1+\varepsilon)F_n^*,$$

因此定理1成立。 证毕

定理2 算法 A_ε 的时间复杂性为 $O\left(\frac{n^5}{\varepsilon^2}D^2\right)$。

证明 因为算法 A_ε 的第一步是将所有工件按SPT规则排序,需要多项式 $O(n\log n)$ 时间。算法 A_ε 的第二步通过把问题解的可行域划分为至多 L^2 个区域,一共需要迭代 n 次,在每一次迭代过程中,状态向量的数量至多为 L^2 个,因而算法 A_ε 的第二步生成的状态向量 $V_k^{\#}$ $(k\in\{1,2,\cdots,n\})$,$|V_k|\leqslant L^2$,所以由(4)、(5)式有

$$\sum_{k=1}^{n}|V_k|\leqslant nL^2=O\left(\frac{n^5}{\varepsilon^2}D^2\right)。$$ 证毕

推论1 算法 A_ε 是一个全多项式时间近似策略。

证明 综合上述结果,算法 A_ε 的时间复杂性为 $O\left(\frac{n^5}{\varepsilon^2}D^2\right)$,是关于输入规模和 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的多项式时间,因而构造了一个全多项式时间近似策略。 证毕

5 结语

本文研究两台平行机环境下加工时间线性退化的可拒绝排序问题,工件的实际加工时间是关于该工件开始加工时间的线性函数,工件允许被拒绝。目的是分别确定接受工件和拒绝工件的任务集合,找到最优的任务排序和每个被接受工件的最优任务工期最小化工期、误工工件惩罚、总完工时间以及被拒绝工件的惩罚费用之和。并对此NP难问题给出了复杂度为 $O\left(\frac{n^5}{\varepsilon^2}D^2\right)$ 的全多项式近似策略(FPTAS)。

参考文献:

[1] Ji M, He Y. Scheduling linear deteriorating jobs with an availability constraint on a single machine[J]. Theoretical

Computer Science,2006,362:115-126.

[2] Brown S,Yechiali U. Scheduling deteriorating jobs on a single processor[J]. Operation Research,1990,38:495-498.

[3] Zhang L Q,Lu L F,Yuan J J. Single machine scheduling with release dates and rejection[J]. European Journal of Operational Research,2009,198:975-978.

[4] Li S S,Yuan J J. Parallel-machine scheduling with deteriorating jobs and rejection[J]. Theoretical Computer Science,2010,411:3642-3650.

[5] 吴丹. 几类加工时间可变的排序问题[D]. 沈阳:沈阳师范大学,2014:5-19.

Wu D. Several scheduling problems with varying processing times[D]. ShenYang:Shenyang Normal University,2014:5-19.

[6] Kacem I. Fully polynomial time approximation scheme for the total weighted tardiness minimization with a common due date[J]. Discrete Applied Mathematics,2010,158:1035-1040.

[7] Kacem I,Mzhjoub A R. Fully polynomial time approximation scheme for the weighted flow-time minimization on a single machine with a fixed non-availability internal[J]. Computers and Industrial Engineering,2009,56:1708-1712.

[8] Kovailyov M Y,Kubiak W. A fully polynomial approximation scheme for the weighted earliness- tardiness problem [J]. Operations Research,1999,47:757-761.

[9] 郭海双,梁佳雯,张劭昀. Matlab 遗传算法工具箱 GADS 优化及应用[J]. 电子设计工程,2015,23(10):27-29.

Guo H S,Liang J W,Zhang S Y. Optimization and examples in Matlab GA toolbox GADS[J]. SAMSON,2015,23(10):27-29.

[10] 张敏娇,罗成新. 带有拒绝工件和机器维修区间的单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2012,29(6):15-19.

Zhang M J,Luo C X. Single-machine scheduling problem with rejection jobs and a fixed machine non-availiability interval [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science,2012,29(6):15-19.

[11] Shabtay D,Steiner G. Two due date assignment problems in scheduling a single machine[J]. Operations Research Letters,2006,34:683-691.

[12] Shabtay D. Due date assignments and scheduling a single machine with a general earliness/tardiness cost function [J]. Computer Operation Research,2008,35:1539-1545.

[13] Baker K R,Scudder G D. Sequencing with earliness and tardiness penalties[J]. Operations Research,1990,38:22-36.

Operations Research and Cybernetics

Parallel-machine Scheduling Problem with Deteriorating Jobs and Rejection

WANG Hongfang, LUO Chengxin

(School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: In this paper, we study parallel-machine due-date assignment problem and scheduling with linear deteriorating jobs, the actual processing time of each job is a linear function of the starting time. Each job has an independent due-date; jobs completed before or after the due-date are penalized according to their earliness or tardiness values. Rejection is allowed in this problem, if a job is rejected, a certain amount of rejection fee must be paid. The objective is to determine the optimal scheduling and due-date of the accepted jobs to minimize the sum of due-dates, the weighted number of tardiness jobs, the total completion time and the rejection cost. We show that the NP-hard problem can be solved by a dynamic programming, finally, a fully polynomial-time approximation scheme in $O(n^5 D^2/\varepsilon^2)$ is given for the problem, where n is the number of the jobs, ε is the error bound, $D=\max\{\ln a_{\max}, \ln(1+b)\}$.

Key words: parallel-machine; the weighted number of tardiness jobs; due-date; deteriorating effect; fully polynomial-time approximation scheme; rejection

(责任编辑 游中胜)