2015 年 11 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Nov. 2015
第 32 卷 第 6 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 32 No. 6

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20150620

带有学习效应和退化效应的加工时间与资源有关的单机排序问题*

张俊杰，赵传立
(沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034)

摘要:研究了同时带有学习效应和退化效应的加工时间与资源有关的多窗口单机排序问题。工件实际的加工时间是关于分配资源量的凸函数,并且是关于开始加工时间的线性递增函数。每个工件都有一个交货期的窗口。若工件在此窗口中完工,则不会产生惩罚费用;否则工件在此窗口之前或之后完工,则会产生相应的提前或延误费用。目标是确定工件最优的加工顺序和最优的资源分配量,从而极小化总费用函数。考虑两个问题,第一个问题的目标函数是与提前、延误工件数、窗口的开始时间、窗口的大小、资源分配量以及最大完工时间有关的函数;第二个问题的目标函数是关于提前、延误、窗口的开始时间、窗口的大小、资源分配量以及最大完工时间的函数。针对这两个问题也分别给出了两个多项式时间算法。

关键词:排序;单机;学习效应;退化效应;加工时间可控;交货期窗口

中图分类号:O223 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2015)06-0020-08

在传统排序理论之中,其工件加工时间均是固定常数值。然而在实际问题之中,其工件加工时间可能会受到学习效应、退化效应或增加了一些额外资源影响而发生变化。Mosheiov 和 Sidney[1]研究了与工件有关的学习效应的单机排序问题,目标是极小化关于最大完工时间、总完工时间以及有关提前、延误和工期的总费用函数。Yin 等[2]讨论了带有学习效应依赖位置和时间的单机排序问题,目标是极小化最大完工时间、加权总完工时间及最大延误时间等。Wang 等[3]研究了同时带有安装时间、学习效应和退化效应的单机排序问题,目的是极小化最大完工时间、总完工时间、加权总完工时间等。Vickson[4]首先提出加工时间可控的排序模型。Kuo 和 Yang[5]研究了同时带有退化效应与公共工期的单机排序问题,目标是极小化关于提早、延误和公共工期的总费用函数,同时给出一个多项式时间算法。Choi 等[6]研究了带有可控的释放时间和加工时间的单机排序问题,目的是确定其加工时间减少的工件数量、工件实际释放时间和最优的工件排序,从而极小化关于最大完工时间和资源分配量的总费用函数。Shabtay 和 Steiner[7]针对加工时间可控的一些排序问题做出了详细的综述。

近几年来,考虑工期指派的加工时间可控的排序问题越来越受到人们的重视。Shabtay 和 Steiner[8]研究了带有工期指派的加工时间可控的单机排序问题,针对 CON、SLK 和 DIF 这 3 种工期指派问题给出了多项式时间算法。范雁鹏和赵传立[9]讨论了带有交货期和加工时间可控的单机排序问题,目标是确定最优的工件排序和最优的资源分配,从而极小化关于提前、延误、交货期的开始时间和交货期大小的总费用函数。范雁鹏和赵传立[10]考虑了同时带有学习效应和加工时间可控的排序问题,目的是确定最优的工件排序和最优的资源分配量,从而极小化关于提前、延误工件数、交货期开始时间、交货期窗口、资源分配和最大完工时间的总费用函数。Mosheiov 和 Oron[11]考虑了每个工件有一个交货期窗口的单机排序问题,目的是确定最优的工件排序极小化提前、延误、交货期窗口的位置与大小的总费用函数。Yin 等[12]研究了加工时间可控的多窗口单机排序问题,通过确定最优排序和最优资源分配,从而极小化相应的总费用函数。针对这些不同的问题也分别给出多项式时间算法。

本文研究了文献[12]的排序模型,将加工时间可控、学习效应和退化效应与多窗口相结合,目的是确定工件

* **收稿日期:**2014-11-21 **修回日期:**2015-07-18 **网络出版时间:**2015-9-28 12:02
资助项目:辽宁省教育厅项目:医学检验流程中若干混合流水作业排序问题研究(No. L2014433)
作者简介:张俊杰,女,研究方向为排序理论;E-mail:zjjcomeon@126.com;**通信作者:**赵传立,教授,E-mail:zhaochuanli@synu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150928.1202.012.html

的最优加工顺序和最优的资源分配量，从而极小化相应的总费用函数。考虑两个问题，第一个问题的目标函数是与提前、延误工件数量、窗口的开始时间、窗口的大小、资源分配量以及最大完工时间有关的函数；第二个问题的目标函数是关于提前、延误、窗口的开始时间、窗口的大小、资源分配量以及最大完工时间的函数。针对这两个问题也分别给出了两个多项式时间算法。

1 问题描述

考虑有 n 个工件$\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$在同一台机器上连续加工，所有工件都零时刻到达，机器在同一个时间内只能加工一个工件，而且不可中断加工。设$\overline{p_j}$是工件 J_j 的基本加工时间，若 J_j 排在第 r 个位置，其开始时间为 t，则其实际加工时间可以表示为

$$p_j=\left(\frac{\overline{p_j}r^{a_j}}{u_j}\right)^k+bt,u_j>0 \tag{1}$$

其中，k 是一个正数；$a_j\leqslant 0$ 是工件 J_j 的学习因子；$b\geqslant 0$ 是所有工件的共同退化率；$t\geqslant 0$ 是其开始时间；$u_j>0$ 是分配给工件 J_j 的资源量。

针对于每个工件 J_j，有一个相应的交货期窗口 $[d_j^1,d_j^2]$，其中 $d_j^1\leqslant d_j^2$。工件 J_j 窗口的开始时间表示为 $d_j^1=p_j+q^1$，结束时间表示为 $d_j^2=p_j+q^2$，其中 $q^2\geqslant q^1$，q^1 和 q^2 是与工件无关的常数。因为工件 J_j 的窗口大小表示为 $D_j=d_j^2-d_j^1=q^2-q^1\equiv D(j=1,2,\cdots,n)$，所以全部工件的窗口大小是相同的。$E_j=\max\{0,d_j^1-C_j\}$表示工件 J_j 的提前。$T_j=\max\{0,C_j-d_j^2\}$表示工件 J_j 的延误。如果 $T_j>0$，则 $U_j=1$；否则 $U_j=0$。$C_{\max}=\max\limits_{j=1,\cdots,n}\{C_j\}$表示工件的最大完工时间。$\alpha\geqslant 0,\gamma\geqslant 0,\delta\geqslant 0,\theta\geqslant 0$ 分别表示提前、窗口的开始时间、窗口的大小和最大完工时间的单位费用。$v_j\geqslant 0$ 表示资源的分配量的单位费用。若工件 J_j 发生误工，则 β_j 就表示误工造成的惩罚费用，β 表示的是延误时间的单位费用。两个问题的目标函数分别是：

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta_j U_j+\gamma d_j^1+\delta D_j+v_j u_j)+\theta C_{\max},$$

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j+v_j u_j)+\theta C_{\max}。$$

用三参数的表示法，本文考虑的问题可以记为如下形式：

$$1\mid p_j=\left(\frac{\overline{p_j}r^{a_j}}{u_j}\right)^k+bt\mid \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta_j U_j+\gamma d_j^1+\delta D_j+v_j u_j)+\theta C_{\max}, \tag{2}$$

$$1\mid p_j=\left(\frac{\overline{p_j}r^{a_j}}{u_j}\right)^k+bt\mid \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j+v_j u_j)+\theta C_{\max}。 \tag{3}$$

对于单机排序问题，Shabtay[13] 和 Shabtay 等[14] 考虑了实际加工时间如下的模型：

$$p_j=\left(\frac{a_j}{u_j}\right)^k, \tag{4}$$

其中 k 是一个正数，$a_j\geqslant 0$ 是工件 J_j 正常的加工时间，而且 $u_j>0$ 是分配给工件 J_j 的资源量；Cheng 等[15] 考虑了实际加工时间如下的模型：

$$p_j=a_j+bt, \tag{5}$$

其中 $b\geqslant 0$ 是所有工件的共同退化率，并且 $t\geqslant 0$ 是它的开始时间；Wang 等[16] 结合上述两种模型，从而提出了如下的模型：

$$p_j=\left(\frac{a_j}{u_j}\right)^k+bt, \tag{6}$$

其中 k 是一个正数，$a_j\geqslant 0$ 是工件 J_j 的正常加工时间，$b\geqslant 0$ 是所有工件的共同退化率，$t\geqslant 0$ 是它的开始时间，并且 $u_j>0$ 是分配给工件 J_j 的资源量。本文将文献[16]的加工时间模型与学习效应相结合，考虑加工时间为(1)式的模型。

2 问题 $1\mid p_j=\left(\frac{\overline{p_j}r^{a_j}}{u_j}\right)^k+bt\mid \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta_j U_j+\gamma d_j^1+\delta D_j+v_j u_j)+\theta C_{\max}$

文献[12]讨论了问题

$1 \mid \mid \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta_j U_j+\gamma d_j^1+\delta D+v_j u_j)$,$1 \mid p_j=\overline{p_j}-a_j u_j \mid \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta_j U_j+\gamma d_j^1+\delta D+v_j u_j)+\theta C_{\max}$。

给出了如下的引理,容易验证这些引理同样适用于问题(2)。

引理 1 对于问题(2),存在最优的工件排序 $\sigma=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$满足如下的性质:

1) 所有工件连续加工,机器无空闲状态,且第一个工件在零时刻开始加工;

2) 若 $C_{[j]}\leqslant d_{[j]}^1$,则 $C_{[j-1]}\leqslant d_{[j-1]}^1$;若 $C_{[j]}>d_{[j]}^2$,则 $C_{[j+1]}>d_{[j+1]}^2$;

3) q^1 的最优值等于 $C_{[k^*-1]}$,q^2 的最优值等于 $C_{[l^*-1]}$,其中 $k^*\leqslant l^*\leqslant n$,$k^*=\max\left\{\left|\frac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right|,0\right\}$。

引理 2 对于问题(2),存在最优排序 $\sigma=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$满足$\underline{l}=\max\{k^*,m_1\}\leqslant l^*\leqslant n-m_2-1=\bar{l}$,其中 m_1 是满足 $\min\{n(\gamma+\alpha\overline{p_j}),n\delta\}<\beta_j$ 的工件数;m_2 是满足 $\min\{n\gamma,n\delta\}>\beta_j$ 的工件数。

引理 3 对于问题(2),给定一个排序 $\sigma=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$,给定资源分配 $u_{[j]}$ 和 l 值,其目标函数值可以表示为

$$Z=\sum_{j=1}^{k^*-1}((n+1)\gamma+\theta+\alpha j)p_{[j]}+(n\delta+\gamma+\theta)\sum_{j=k^*}^{l-1}p_{[j]}+(\gamma+\theta)\sum_{j=l}^{n}p_{[j]}+\sum_{j=l+1}^{n}\beta_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]} \tag{7}$$

其中,$p_{[j]}$表示排在位置 j 的工件 $J_{[j]}$的实际加工时间。

给定一个排序 $\sigma=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$和资源分配 $u_{[j]}$,用$\overline{p_{[j]}}$表示排在位置 j 的工件 $J_{[j]}(j=1,2,\cdots,n)$的基本加工时间。工件的完工时间可以表示如下:

$$C_{[1]}=\left(\frac{\overline{p_{[1]}}1^{a_{[1]}}}{u_{[1]}}\right)^k,C_{[2]}=(1+b)\left(\frac{\overline{p_{[1]}}1^{a_{[1]}}}{u_{[1]}}\right)^k+\left(\frac{\overline{p_{[2]}}2^{a_{[2]}}}{u_{[2]}}\right)^k,\cdots,$$

$$C_{[j]}=\sum_{i=1}^{j}(1+b)^{j-i}\left(\frac{\overline{p_{[i]}}i^{a_{[i]}}}{u_{[i]}}\right)^k, \tag{8}$$

$$\cdots$$

$$C_{[n]}=\sum_{i=1}^{n}(1+b)^{n-i}\left(\frac{\overline{p_{[i]}}i^{a_{[i]}}}{u_{[i]}}\right)^k。$$

其中需要说明的是:若 $t=0$,则 $C_{[n]}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{p_{[i]}}i^{a_{[i]}}}{u_{[i]}}\right)^k$。

从而工件 $J_{[j]}$的实际加工时间可以表示如下:

$$p_{[j]}=\left(\frac{\overline{p_{[j]}}j^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^k+bC_{[j-1]}=\left(\frac{\overline{p_{[j]}}j^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^k+b\left(\sum_{i=1}^{j-1}(1+b)^{j-1-i}\left(\frac{\overline{p_{[i]}}i^{a_{[i]}}}{u_{[i]}}\right)^k\right)。 \tag{9}$$

根据引理3,将(9)式代入到(7)式中,目标函数可以经过推导整理成如下形式:

$$\begin{aligned}Z=&\sum_{j=1}^{n}w_{j(l)}p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}+\sum_{j=l+1}^{n}\beta_{[j]}=\sum_{j=1}^{n}w_{j(l)}\left[\left(\frac{\overline{p_{[j]}}j^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^k+b\left(\sum_{i=1}^{j-1}(1+b)^{j-1-i}\left(\frac{\overline{p_{[i]}}i^{a_{[i]}}}{u_{[i]}}\right)^k\right)\right]+\\&\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}+\sum_{j=l+1}^{n}\beta_{[j]}=\sum_{j=1}^{n}G_{j(l)}\left(\frac{\overline{p_{[j]}}j^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^k+\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}+\sum_{j=l+1}^{n}\beta_{[j]}。\end{aligned} \tag{10}$$

其中:

$$\begin{gathered}G_{1(l)}=w_{1(l)}+bw_{2(l)}+b(1+b)w_{3(l)}+\cdots+b(1+b)^{n-2}w_{n(l)},\\G_{2(l)}=w_{2(l)}+bw_{3(l)}+b(1+b)w_{4(l)}+\cdots+b(1+b)^{n-3}w_{n(l)},\\G_{3(l)}=w_{3(l)}+bw_{4(l)}+b(1+b)w_{5(l)}+\cdots+b(1+b)^{n-4}w_{n(l)},\cdots,G_{n-1(l)}=w_{n-1(l)}+bw_{n(l)},\\G_{n(l)}=w_{n(l)},\end{gathered} \tag{11}$$

并且,

$$w_{j(l)}=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1)+\theta,j=1,2,\cdots,k^*-1,\\\gamma+n\delta+\theta,j=k^*,\cdots,l-1,\\\gamma+\theta,j=l,\cdots,n。\end{cases} \tag{12}$$

引理 4 对于一个给定的 l 值,该问题的最优资源分配量为

$$u_{[j]}^*=\left(\frac{kG_{j(l)}}{v_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}}\times(\overline{p_{[j]}}j^{a_{[j]}})^{\frac{k}{k+1}} \tag{13}$$

证明　对(7)式中的 $u_{[j]}$ 进行求导,使其等于 0,从而整理可以得到 $u_{[j]}^{*}=\left(\frac{kG_{j(l)}}{v_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}}\times(\overline{p_{[j]}}j^{a_{[j]}})^{\frac{k}{k+1}}$。　证毕

根据引理 3,将(13)式代入到(7)式中,从而对于一个给定的 l 值,其目标函数值可以表示为:

$$Z=\bar{k}\sum_{j=1}^{n}\theta_{[j]}\xi_j+\sum_{j=l+1}^{n}\beta_{[j]} \tag{14}$$

其中:

$$\bar{k}=k^{-\frac{k}{k+1}}+k^{\frac{1}{k+1}},\theta_{[j]}=(v_{[j]}\overline{p_{[j]}})^{\frac{1}{k+1}},\xi_j=(G_{j(l)}j^{ka_{[j]}})^{\frac{1}{k+1}}。 \tag{15}$$

对于 $1\leqslant i,j\leqslant n$,设

$$c_{ij(l)}=\begin{cases}\bar{k}\theta_j\xi_i,i=1,\cdots,l,\\ \bar{k}\theta_j\xi_i+\beta_j,i=l+1,\cdots,n。\end{cases} \tag{16}$$

设 $x_{ij}\in\{0,1\}$,如果工件 J_j 在第 i 个位置上,那么 $x_{ij}=1$;否则 $x_{ij}=0$。那么对于一个给定的 l,该问题可以归结为如下的指派问题:

$$\min\quad Z_{(l)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij(l)}x_{ij},$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,j=1,2,\cdots,n;\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,i=1,2,\cdots,n;x_{ij}\in\{0,1\},i,j=1,2,\cdots,n。 \tag{17}$$

因此,对于问题 $1\mid p_j=\left(\frac{\overline{p_j}r^{a_j}}{u_j}\right)^k+bt\mid\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta_jU_j+\gamma d_j^1+\delta D_j+v_ju_j)+\theta C_{\max}$,可以给出下面的多项式时间算法。

算法 1　步骤 1,令 $Z^*=+\infty$,应用引理 2 计算出 $\underline{l}$ 与 $\bar{l}$ 的值,首先令 $l=\underline{l}$。步骤 2,如果 $l\leqslant\bar{l}$,那么执行:步骤 2.1,运用(16)式计算 $c_{ij(l)}$;步骤 2.2,将 $c_{ij(l)}$ 值代入到指派问题(17)中求得最优排序,记最优排序为 $\pi_{(l)}^*=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$,极小化的总费用为 $Z_{(l)}$;步骤 2.3,如果 $Z_{(l)}<Z^*$,那么令 $Z^*=Z_{(l)}$,$l^*=l$,$\pi^*=\pi_{(l)}^*$;步骤 2.4,令 $l=l+1$。步骤 3,应用(13)式计算最优资源分配量。步骤 4,应用(9)式计算最优的加工时间。

定理 1　问题 $1\mid p_j=\left(\frac{\overline{p_j}r^{a_j}}{u_j}\right)^k+bt\mid\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta_jU_j+\gamma d_j^1+\delta D_j+v_ju_j)+\theta C_{\max}$ 通过算法 1 可以求得最优的工件排序,它计算的复杂性为 $O(n^4)$ 。

证明　针对于一个给定的 l 值,指派问题(14)的解决需要的时间是 $O(n^3)$,然而步骤 2 整体需要至多 $O(n)$ 次的迭代;步骤 1、步骤 3 和步骤 4 均可以在线性的时间内完成。所以,算法 1 计算的复杂性为 $O(n^4)$。

证毕

例 1　考虑问题 $1\mid p_j=\left(\frac{\overline{p_j}r^{a_j}}{u_j}\right)^k+bt\mid\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta_jU_j+\gamma d_j^1+\delta D_j+v_ju_j)+\theta C_{\max}$,其中 $n=5$,其它参数如下:$\overline{p_1}=3$,$\overline{p_2}=4$,$\overline{p_3}=6$,$\overline{p_4}=5$,$\overline{p_5}=2$;$a_1=-0.4$,$a_2=-0.6$,$a_3=-0.3$,$a_4=-0.2$,$a_5=-0.5$;$v_1=3$,$v_2=7$,$v_3=5$,$v_4=6$,$v_5=4$;$\beta_1=48$,$\beta_2=27$,$\beta_3=30$,$\beta_4=42$,$\beta_5=45$;$\alpha=11$,$\gamma=5$,$\delta=8$,$\theta=7$,$k=2$,$b=2$。

由引理 1 的 3)得到:$k^*=\max\left\{\left\lceil\frac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil,0\right\}=\max\left\{\left\lceil\frac{5\times(8-5)}{11}\right\rceil,0\right\}=\left\lceil\frac{15}{11}\right\rceil=2$。

由引理 2 得到:$m_1=3$,$m_2=0$,$\underline{l}=\max\{k^*,m_1\}=3$,$\bar{l}=n-m_2-1=4$。

1) 令 $l=\bar{l}=3$,由(12)式可知 $w_{j(3)}=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1)+\theta,j=1,\\ \gamma+n\delta+\theta,j=2,\\ \gamma+\theta,j=3,4,5。\end{cases}$ 则有 $w_{1(3)}=48$,$w_{2(3)}=52$,$w_{3(3)}=12$,$w_{4(3)}=12$,$w_{5(3)}=12$。

由(11)式得到:$G_{1(3)}=1\,088$,$G_{2(3)}=364$,$G_{3(3)}=108$,$G_{4(3)}=36$,$G_{5(3)}=12$。

由(15)式得到:$\bar{k}=k^{-\frac{k}{k+1}}+k^{\frac{1}{k+1}}=2^{-\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}=1.89$,$\theta_{[1]}=(v_{[1]}\overline{p_{[1]}})^{\frac{1}{3}}=2.08$。

同理可以得到 $\theta_{[2]}=3.04$,$\theta_{[3]}=3.11$,$\theta_{[4]}=3.11$,$\theta_{[5]}=2.00$,则有 $\bar{k}\theta_{[1]}=3.93$,$\bar{k}\theta_{[2]}=5.75$,$\bar{k}\theta_{[3]}=5.88$,$\bar{k}\theta_{[4]}=5.88$,$\bar{k}\theta_{[5]}=3.78$。

而 $j^{ka_{[j]}}$ 的矩阵由表 1 得到。

表1 矩阵列表

a_j	工件	位置				
		1	2	3	4	5
−0.4	1	1	0.57	0.42	0.33	0.28
−0.6	2	1	0.44	0.27	0.19	0.14
−0.3	3	1	0.66	0.52	0.44	0.38
−0.2	4	1	0.87	0.64	0.57	0.53
−0.5	5	1	0.50	0.33	0.25	0.20

即 $j^{ka}{}_{[j]}=\begin{pmatrix}1 & 0.57 & 0.42 & 0.33 & 0.28\\1 & 0.44 & 0.27 & 0.19 & 0.14\\1 & 0.66 & 0.52 & 0.44 & 0.38\\1 & 0.87 & 0.64 & 0.57 & 0.53\\1 & 0.50 & 0.33 & 0.25 & 0.20\end{pmatrix}$。则有

$$\xi_j=(G_{j(3)}j^{ka}{}_{[j]})^{\frac{1}{k+1}}=(G_{j(3)}j^{2a}{}_{[j]})^{\frac{1}{3}}=\begin{pmatrix}10.29 & 5.92 & 3.57 & 2.28 & 1.50\\10.29 & 5.43 & 3.08 & 1.90 & 1.19\\10.29 & 6.22 & 3.83 & 2.51 & 1.66\\10.29 & 6.82 & 4.10 & 2.74 & 1.85\\10.29 & 5.67 & 3.29 & 2.08 & 1.34\end{pmatrix},$$

则 $\bar{k}\theta_{[j]}\xi_j=\begin{pmatrix}40.44 & 23.27 & 14.03 & 8.96 & 5.90\\59.17 & 31.22 & 17.71 & 10.93 & 6.84\\60.51 & 36.57 & 22.52 & 14.76 & 9.76\\60.51 & 40.10 & 24.11 & 16.11 & 10.88\\38.90 & 21.43 & 12.44 & 7.86 & 5.07\end{pmatrix}$，$\bar{k}\theta_{[j]}\xi_j+\beta_{[j]}=\begin{pmatrix}88.44 & 71.27 & 62.03 & 56.96 & 53.90\\86.17 & 58.22 & 44.71 & 37.93 & 33.84\\90.51 & 66.57 & 52.52 & 44.76 & 39.76\\102.51 & 82.10 & 66.11 & 58.11 & 52.88\\83.90 & 66.43 & 57.44 & 52.86 & 50.07\end{pmatrix}$。

由(16)式可知 $c_{ij(3)}=\begin{cases}\bar{k}\theta_j\xi_i, i=1,2,3,\\ \bar{k}\theta_j\xi_i+\beta_j, i=4,5,\end{cases}$ 则 $c_{ij(3)}=\begin{pmatrix}40.44 & 23.27 & 14.03 & 56.96 & 53.90\\59.17 & 31.22 & 17.71 & 37.93 & 33.84\\60.51 & 36.57 & 22.52 & 44.76 & 39.76\\60.51 & 40.10 & 24.11 & 58.11 & 52.88\\38.90 & 21.43 & 12.44 & 52.86 & 50.07\end{pmatrix}$。从而应用(17)式的指派方法得到：$Z_{(3)}=163.67$，$\pi_{(3)}=(1,5,4,2,3)$。

2）令 $l=l+1=4$。同1)可以得到 $Z_{(4)}=141.04$，$\pi_{(4)}=(1,5,3,4,2)$。

由于此时 $l=4=\bar{l}$，已经达到上限，所以循环停止。

因为 $Z_{(3)}>Z_{(4)}$，所以有 $Z^*=Z_{(4)}=141.01$，$\pi^*=\pi_{(4)}=(1,5,3,4,2)$。由(13)式得到：$u_1^*=\left(\frac{2G_{1(4)}}{v_1}\right)^{\frac{1}{3}}\times(\overline{p_1}1^{a_1})^{\frac{2}{3}}=19.97$。同理：$u_5^*=7.64$，$u_3^*=10.34$，$u_4^*=5.56$，$u_2^*=1.99$。

3 问题 $1\mid p_j=\left(\frac{\overline{p_j}r^{a_j}}{u_j}\right)^k+bt\mid\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j+v_ju_j)+\theta C_{\max}$

文献[11]讨论了问题 $1\mid\quad\mid\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j)$，给出了下面的引理，容易验证该引理同样适用于问题(3)。

引理5 对于问题(3)，存在最优排序 $\sigma=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$ 满足以下性质：1）若 $C_{[j]}\leqslant d_{[j]}^1$，则 $C_{[j-1]}\leqslant d_{[j-1]}^1$；2）若 $C_{[j]}\geqslant d_{[j]}^2$，则 $C_{[j+1]}\geqslant d_{[j+1]}^2$；3）在最优排序 $\sigma^*=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$ 中，存在某个 k 和 l 使得 $q^1=p_{[1]}+p_{[2]}+\cdots+p_{[k]}=\sum_{j=1}^{k}p_{[j]}$，$q^2=p_{[1]}+p_{[2]}+\cdots+p_{[k]}+p_{[k+1]}+\cdots+p_{[l]}=\sum_{j=1}^{l}p_{[j]}$；4）

在最优排序 $\sigma^{*}=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$ 中，$q^{1}=\sum_{j=1}^{k^{*}} p_{[j]}$，$q^{2}=\sum_{j=1}^{l^{*}} p_{[j]}$，其中 $k^{*}=\left\lceil\frac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil$，$l^{*}=\left\lceil\frac{n(\beta-\delta)}{\beta}\right\rceil$。

对于任意一个给定的排序 $\sigma=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$，由引理 5 的相关性质可以推导出总费用为

$$Z=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{j}+\beta T_{j}+\gamma d_{j}^{1}+\delta D_{j}+v_{j}u_{j})+\theta C_{\max}=\sum_{j=1}^{n} w_{j} p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n} v_{[j]} u_{[j]} 。\tag{18}$$

其中：

$$w_{j}=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1)+\theta, j=1,\cdots,k,\\ \gamma+n\delta+\theta, j=k+1,\cdots,l,\\ \beta(n-j)+\gamma+\theta, j=l+1,\cdots,n。\end{cases}\tag{19}$$

将(9)式代入到(18)式中可得：

$$Z=\sum_{j=1}^{n} w_{j}\left[\left(\frac{\overline{p_{[j]}} j^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^{k}+b\left(\sum_{i=1}^{j-1}(1+b)^{j-1-i}\left(\frac{\overline{p_{[i]}} i^{a_{[i]}}}{u_{[i]}}\right)^{k}\right)\right]+\sum_{j=1}^{n} v_{[j]} u_{[j]}=\sum_{j=1}^{n} W_{j}\left(\frac{\overline{p_{[j]}} j^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^{k}+\sum_{j=1}^{n} v_{[j]} u_{[j]}。\tag{20}$$

其中：

$$W_{1}=w_{1}+b w_{2}+b(1+b) w_{3}+\cdots+b(1+b)^{n-2} w_{n}, W_{2}=w_{2}+b w_{3}+b(1+b) w_{4}+\cdots+b(1+b)^{n-3} w_{n},$$
$$W_{3}=w_{3}+b w_{4}+b(1+b) w_{5}+\cdots+b(1+b)^{n-4} w_{n}, \cdots, W_{n-1}=w_{n-1}+b w_{n}, W_{n}=w_{n}。\tag{21}$$

引理 6　对于一个给定的排序，该问题的最优资源分配量为

$$u_{[j]}^{*}=\left(\frac{k W_{j}}{v_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \times(\overline{p_{[j]}} j^{a_{[j]}})^{\frac{k}{k+1}}。\tag{22}$$

证明　对(20)式中的 $u_{[j]}$ 进行求导，使其等于 0，从而整理可以得到 $u_{[j]}^{*}=\left(\frac{k W_{j}}{v_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}} \times(\overline{p_{[j]}} j^{a_{[j]}})^{\frac{k}{k+1}}$。　证毕

将(22)式代入到(20)式中，从而对于一个给定的排序，其目标函数值可以表示为：

$$Z=\bar{k} \sum_{j=1}^{n} \theta_{[j]} \xi_{j} 。\tag{23}$$

其中：

$$\bar{k}=k^{-\frac{k}{k+1}}+k^{\frac{1}{k+1}}, \theta_{[j]}=(v_{[j]} \overline{p_{[j]}})^{\frac{1}{k+1}}, \xi_{j}=(W_{j} j^{k a_{[j]}})^{\frac{1}{k+1}}。\tag{24}$$

对于 $1 \leqslant i, j \leqslant n$，设

$$\lambda_{ij}=\bar{k} \theta_{j} \xi_{i},\tag{25}$$

设 $y_{ij} \in\{0,1\}$，如果工件 J_{j} 在第 i 个位置上，那么 $y_{ij}=1$；否则 $y_{ij}=0$。那么该问题可以归结为如下的指派问题：

$$\begin{aligned}&\min \quad Z=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} y_{ij},\\ &\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} y_{ij}=1, j=1,2,\cdots,n; \sum_{j=1}^{n} y_{ij}=1, i=1,2,\cdots,n; y_{ij} \in\{0,1\}, i, j=1,2,\cdots,n 。\end{aligned}\tag{26}$$

因此，对于问题 $1\left|p_{j}=\left(\frac{\overline{p_{j}} r^{a_{j}}}{u_{j}}\right)^{k}+b t\right| \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{j}+\beta T_{j}+\gamma d_{j}^{1}+\delta D_{j}+v_{j} u_{j})+\theta C_{\max}$ 可以给出下面的多项式时间算法。

算法 2　步骤 1，置 $q^{1}=\sum_{j=1}^{k^{*}} p_{[j]}$，$q^{2}=\sum_{j=1}^{l^{*}} p_{[j]}$，其中 $k^{*}=\left\lceil\frac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil$，$l^{*}=\left\lceil\frac{n(\beta-\delta)}{\beta}\right\rceil$；步骤 2，利用(25)式计算 λ_{ij}；步骤 3，计算指派问题(26)来确定最优的工件排序；步骤 4，通过计算(22)式来确定最优的资源分配量；步骤 5，通过计算(9)式来确定最优的加工时间。

定理 2　问题 $1\left|p_{j}=\left(\frac{\overline{p_{j}} r^{a_{j}}}{u_{j}}\right)^{k}+b t\right| \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_{j}+\beta T_{j}+\gamma d_{j}^{1}+\delta D_{j}+v_{j} u_{j})+\theta C_{\max}$ 通过算法 2 可以确定最优的工件排序，它计算的复杂性为 $O(n^{3})$。

证明　由算法2可以知道,它主要计算在于步骤3的指派问题中,其计算复杂性为$O(n^3)$,而其他步骤均可在线性时间内解决,因此,算法2的计算复杂性为$O(n^3)$。　证毕

例2　考虑问题$1\mid p_j=\left(\dfrac{\overline{p}_j r^{a_j}}{u_j}\right)^k+bt\mid \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_j^1+\delta D_j+v_j u_j)+\theta C_{\max}$,其中$\beta=18$,其他参数与例1相同。

由引理5的4)得到:$k^*=\left\lceil\dfrac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil=\left\lceil\dfrac{5\times(8-5)}{11}\right\rceil=2$,$l^*=\left\lceil\dfrac{n(\beta-\delta)}{\beta}\right\rceil=\left\lceil\dfrac{5\times(18-8)}{18}\right\rceil=3$。由(19)式可知

$$w_j=\begin{cases}\alpha j+\gamma(n+1)+\theta, j=1,2,\\ \gamma+n\delta+\theta, j=3,\\ \beta(n-j)+\gamma+\theta, j=4,5。\end{cases}$$

则有$w_1=48$,$w_2=59$,$w_3=52$,$w_4=30$,$w_5=12$。

由(21)式得到:$W_1=1\ 666$,$W_2=559$,$W_3=184$,$W_4=54$,$W_5=12$。

由例1可知:$\overline{k\theta}_{[1]}=3.93$,$\overline{k\theta}_{[2]}=5.75$,$\overline{k\theta}_{[3]}=5.88$,$\overline{k\theta}_{[4]}=5.88$,$\overline{k\theta}_{[5]}=3.78$,$j^{ka}{}_{[j]}=\begin{pmatrix}1 & 0.57 & 0.42 & 0.33 & 0.28\\ 1 & 0.44 & 0.27 & 0.19 & 0.14\\ 1 & 0.66 & 0.52 & 0.44 & 0.38\\ 1 & 0.87 & 0.64 & 0.57 & 0.53\\ 1 & 0.50 & 0.33 & 0.25 & 0.20\end{pmatrix}$。所以有$\xi_j=(W_j j^{ka}{}_{[j]})^{\frac{1}{k+1}}=(W_j j^{2a}{}_{[j]})^{\frac{1}{3}}=\begin{pmatrix}11.85 & 6.83 & 4.26 & 2.61 & 1.50\\ 11.85 & 6.27 & 3.68 & 2.17 & 1.19\\ 11.85 & 7.17 & 4.57 & 2.87 & 1.66\\ 11.85 & 7.86 & 4.90 & 3.13 & 1.85\\ 11.85 & 6.54 & 3.93 & 2.38 & 1.34\end{pmatrix}$。

由(25)式得到:$\lambda_{ij}=\overline{k\theta}_j\xi_i=\begin{pmatrix}46.57 & 26.84 & 16.74 & 10.26 & 5.90\\ 68.14 & 36.05 & 21.16 & 12.48 & 6.84\\ 69.68 & 42.16 & 26.87 & 16.88 & 9.76\\ 69.68 & 46.22 & 28.81 & 18.40 & 10.88\\ 44.79 & 24.72 & 14.86 & 9.00 & 5.07\end{pmatrix}$。从而应用(26)式的指派方法得到:$Z^*=120.21$,$\pi^*=(1,5,2,3,4)$。由(22)式得到:$u_1^*=\left(\dfrac{2W_1}{v_1}\right)^{\frac{1}{3}}\times(\overline{p}_1 1^{a_1})^{\frac{2}{3}}=21.55$。

同理$u_5^*=8.24$,$u_2^*=6.08$,$u_3^*=6.95$,$u_4^*=3.75$。

4 结论

本文研究了同时带有学习效应和退化效应的加工时间与资源有关的多窗口单机排序问题,研究了工件实际的加工时间是关于分配资源量的凸函数,并且是关于开始加工时间的线性递增函数的情况。讨论了两个问题,分别给出了两个多项式时间算法。针对于其他资源分配的模型和交货期窗口的问题还有待更深入的讨论。

参考文献:

[1] Mosheiov G, Sidney J B. Scheduling with general job-dependent learning curves[J]. European Journal of Operational Research, 2003, 147: 665-670.

[2] Yin Y Q, Xu D H, Sun K B, et al. Some scheduling problems with general position-dependent and time-dependent learning effects[J]. Information Sciences, 2009, 179(4): 2416-2425.

[3] Wang J B, Jiang Y, Wang G. Single-machine scheduling with past-sequence-dependent setup times and effects of deterioration and learning[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2008, DOI 10.1007/s00170-008-1512-7.

[4] Vickson R G. Choosing the job sequence and processing times to minimize total processing plus flow cost on a single machine[J]. Operations Research, 1980, 28(5): 1155-1167.

[5] Kuo W H, Yang D L. A note on due-date assignment and single-machine scheduling with deteriorating jobs[J]. Journal of the Operational Research Society, 2008, 59: 857-859.

[6] Choi B C, Yoon S H, Chung S J. Single machine scheduling problem with controllable processing times and resource dependent release times[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 181: 645-653.

[7] Shabtay D, Steiner G. A survey of scheduling with controllable processing times[J]. Discrete Applied Mathematics, 2007, 155: 1643-1666.

[8] Shabtay D, Steiner G. The single-machine earliness-tardiness scheduling problem with due date assig- nment and re-

source-dependent processing times[J]. Annals of Operations Research, 2008, 159: 25-40.

[9] 范雁鹏,赵传立.带有交货期和加工时间可控的单机排序问题[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2013,30(3):5-8.
Fan Y P, Zhao C L. Single machine scheduling with date of delivery assignment and controllable processing times[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2013, 30(3): 5-8.

[10] 范雁鹏,赵传立.带有学习效应和加工时间可控的排序问题[J].沈阳师范大学学报:自然科学版,2014,32(2):192-196.
Fan Y P, Zhao C L. Scheduling problems with controllable processing times and learning effects[J]. Journal of Shenyang Normal University: Natural Science Edition, 2014, 32(2): 192-196.

[11] Mosheiov G, Oron D. Job-dependent due-window assignment based on a common flow allowance[J]. Foundations of Computing and Decision Sciences, 2010, 35(3): 185-195.

[12] Yin Y, Cheng T C E, WU C C, et al. Single-machine due window assignment and scheduling with a common flow allowance and controllable job processing time[J]. Journal of the Operational Research Society, 2014, 65(1): 1-13.

[13] Shabtay D. Single and two-resource allocation al gorithms for minimizing the maximal lateness in a single machine [J]. Computers & Operations Research, 2004, 31: 1303-1315.

[14] Shabtay D, Kaspi M. Minimizing the total weighted flow time in a single machine with controllable processing times[J]. Computers & Operations Research, 2004, 31: 2279-2289.

[15] Cheng T C E, Kang L Y, Ng C T. Due-date assignment and single machine scheduling with deteriorating jobs[J]. Journal of the Operational Research Society, 2004, 55: 198-203.

[16] Wang X R, Wang J J. Single-machine scheduling with convex resource dependent processing times and deteriorating jobs[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37: 2388-2393.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine Scheduling Problems with Resource-dependent Processing Times and Effects of Learning and Deterioration

ZHANG Junjie, ZHAO Chuanli

(College of Mathematics and System Science, Shengyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: We consider multiple due windows single machine scheduling problems with both learning and deterioration effect, in which the jobs have controllable processing times. The actual processing time of a job is a convex function of its resource allocation, and is a linear increasing function of its starting time. Each job has an own due window. If the job is completed within the due window, it will not be penalty. Otherwise the job completed before the starting time of the due window or after the ending time of it will have earliness or tardiness costs. The objective is to determine the optimal sequence of jobs and the optimal resource allocation so as to minimize the total cost. We study two versions of the problem. In the first version, the total cost includes earliness, tardiness, the starting time of due windows, the size of due windows, resource allocation and makespan; and in the second version it includes earliness, the number of tardy jobs, the starting time of due windows, the size of due windows, resource allocation and makespan costs. We provide polynomial algorithms for two versions, respectively.

Key words: scheduling; single machine; learning effect; deterioration effect; controllable processing times; due window

(责任编辑 黄 颖)