DOI:10.11721/cqnuj20150604

基于广义 Fibonacci 和 Lucas 数的准循环矩阵研究*

邓　勇
(喀什大学 数学与统计学院，新疆 喀什 844006)

摘要：基于广义 Fibonacci 与 Lucas 数列，以及它们的形如$\{u_{kn}\}$和$\{v_{kn}\}$($k>0$ 为奇数)的子数列，定义了若干新的准循环矩阵，研究了其行列式的计算问题。进而获得了一些高次 Pell 方程的解。

关键词：广义 Fibonacci 数列；广义 Lucas 数列；准循环矩阵；Pell 方程；行列式
中图分类号：O156　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1672-6693(2015)06-0072-05

1 预备知识

从理论上说，矩阵与行列式在数学中占有重要地位。例如，线性方程组求解、二次型变换，包括各种向量空间和代数结构的研究等最终都要转化成矩阵的问题。因此，研究各种矩阵的性质和求逆方法至关重要[1]。从应用上看，在复杂的噪声环境中高速传输数据是通信系统需重点考虑的问题。要保证传输的可靠性，信道编码的纠错能力和低编码的复杂度是解决该问题的关键。而准循环矩阵恰是校验和生成这种编码的有效方法之一[2]。因此，对准循环矩阵作深入研究，无疑会对通信领域的发展产生积极影响。本文将研究由广义 Fibonacci 和 Lucas 数所构成的若干准循环矩阵的行列式计算和高次 Pell 方程的求解问题。

广义 Fibonacci 数列$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$和 Lucas 数列$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$被分别定义为

$$\begin{cases}u_0=0,u_1=1\\ u_{n+1}=Au_n+Bu_{n-1},n=2,3,\cdots\end{cases}\tag{1}$$

和

$$\begin{cases}v_0=2,v_1=A\\ v_{n+1}=Av_n+Bv_{n-1},n=2,3,\cdots\end{cases}\tag{2}$$

其中 A,B 是非负整数且 $A^2+4B\neq 0$。文献[3]证明了对 $\forall k\geqslant 0,n>1$，它们的子列$\{u_{kn}\}$和$\{v_{kn}\}$分别满足递推关系：

$$u_{kn}=v_k u_{k(n-1)}-(-B)^k u_{k(n-2)},v_{kn}=v_k v_{k(n-1)}-(-B)^k v_{k(n-2)}。\tag{3}$$

文献[4]给出了广义 Fibonacci 和 Lucas 数列的通项公式分别为 $u_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$ 和 $v_n=\alpha^n+\beta^n$。其中 $\alpha,\beta=\dfrac{A\pm\sqrt{A^2+4B}}{2}$。由这两个通项公式不难验证：对某个固定的 $k>0$，分别有

$$u_{-kn}=(-1)^{kn+1}u_{kn},u_{2kn}=v_{kn}u_{kn}。\tag{4}$$

形如

$$\begin{bmatrix}x_1 & Dx_n & Dx_{n-1} & \cdots & Dx_3 & Dx_2\\ x_2 & x_1 & Dx_n & \cdots & Dx_4 & Dx_3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} & \cdots & x_1 & Dx_n\\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_2 & x_1\end{bmatrix}\overset{\text{def}}{=}R(D;x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的矩阵称为 $n\times n$ 阶准循环矩阵，简记为 $\boldsymbol{R}$。也就是说，准循环矩阵是把循环矩阵主对角线上方(不包括主对角

* **收稿日期：**2015-02-11　　**修回日期：**2015-04-20　　**网络出版时间：**2015-9-28 12:19
资助项目：国家社会科学基金西部项目(No. 11XTJ001)；数学与应用数学专业院级综合改革试点项目(No. KSZG1203)
作者简介：邓勇，男，教授，硕士生导师，研究方向为矩阵及其数值计算，E-mail：dengy-ks@sohu.com
网络出版地址：http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150928.1219.044.html

元)的每个元素乘以倍数 D 而得到的矩阵。经典 Pell 方程 $x^2-dy^2=\pm1(d\in\mathbf{Z}^+)$ 可改写为 $\det\left(\begin{bmatrix} x & dy \\ y & x\end{bmatrix}\right)=\pm1$ 的形式。类似地，n 次 Pell 方程可写为

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & Dx_n & Dx_{n-1} & \cdots & Dx_3 & Dx_2 \\ x_2 & x_1 & Dx_n & \cdots & Dx_4 & Dx_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & x_{n-3} & \cdots & x_1 & Dx_n \\ x_n & x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_2 & x_1 \end{bmatrix}=\pm1。$$

文献[5]利用某些 $n\times n$ 阶准循环矩阵的行列式，将求解 $n=2$ 次经典 Pell 方程的问题推广到了 $n>2$ 次 Pell 方程，即证明了当 $n>2$ 时，n 次 Pell 方程有解且

$$\det(\boldsymbol{R}(L_n;F_{2n-1},F_{2n-2},\cdots,F_n))=1。\tag{5}$$

其中 L_n 和 F_n 分别为第 n 个 Lucas 和 Fibonacci 数。进一步，他又证明了

$$\det(\boldsymbol{R}(L_n;F_{2n-1+k},F_{2n-2+k},\cdots,F_{n+k}))=(-1)^{n-1}L_nF_k^n+F_{k-1}^n,k\in\mathbf{Z}。$$

文献[6]研究了一些 n 次 Pell 方程与广义 Fibonacci 和 Lucas 数列之间的关系，并据此推广了文献[5]中已有的结果。例如，若在(3)，(4)式中取 $k=1$，则当 $n>1$ 时有

$$\det(\boldsymbol{R}(v_n;u_{2n-1},u_{2n-2},\cdots,u_n))=B^{n(n-1)}。\tag{6}$$

由文献[7-8]的结果，不难证明下列两个命题。

命题 1　若 $n>0$，则

$$\det\boldsymbol{R}=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_id^{i-1}\varepsilon^{k(i-1)}\right),\tag{7}$$

其中 $d=\sqrt[n]{D}$，$\varepsilon=\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}}$ 且(7)式右边的每个乘积因子 $\sum_{i=1}^{n}x_id^{i-1}\varepsilon^{k(i-1)}$ 均为 $\boldsymbol{R}$ 的特征值。

命题 2　两个准循环矩阵的和、差、积和逆(如果存在)仍是准循环矩阵。

2 主要结果

本节将讨论基于广义 Fibonacci 与 Lucas 数列以及其子数列的准循环矩阵行列式的计算问题。为此先介绍一个辅助引理并用 b 表示 $(-B)^k$。

引理 1　广义 Fibonacci 和 Lucas 子数列 $\{u_{kn}\}$ 和 $\{v_{kn}\}$ $(k,n\in\mathbf{Z}^+)$ 满足下列递推关系：(i) $v_ku_{k(2n-1)}-v_{kn}u_{kn}=bu_{k(2n-2)}$；(ii) $u_{k(2n-1)}-v_{kn}u_{k(n-1)}=b^{n-1}u_k$；(iii) $u_{kn}^2-u_{k(n+1)}u_{k(n-1)}=b^{n-1}u_k^2$。

由广义 Fibonacci 和 Lucas 数列的通项公式即可推证。

定理 1　若 $n\geqslant2$，则

$$\det(\boldsymbol{R}(v_{kn};u_{k(2n-1)},u_{k(2n-2)},\cdots,u_{kn}))=b^{n(n-1)}u_k^n\tag{8}$$

证明　当 $n=2$ 时，因 $\det(\boldsymbol{R}(v_{2k};u_{3k},u_{2k}))=\begin{vmatrix} u_{3k} & v_{2k}u_{2k} \\ u_{2k} & u_{3k}\end{vmatrix}=u_{3k}^2-v_{2k}u_{2k}^2=b^2u_k^2$，故结论成立；当 $n>2$ 时，考虑上三角形矩阵

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 1 & -v_k & b & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -v_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -v_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{9}$$

由矩阵乘法并利用引理 1，可得

$$\boldsymbol{RT}=\begin{bmatrix} u_{k(2n-1)} & -bu_{k(2n-2)} & b^nu_k & 0 & \cdots & 0 \\ u_{k(2n-2)} & -bu_{k(2n-3)} & 0 & b^nu_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b^nu_k \\ u_{k(n+1)} & -bu_{kn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{kn} & -bu_{k(n-1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\tag{10}$$

于是

$$\det \boldsymbol{R}=(\det\boldsymbol{R})(\det\boldsymbol{T})=\det(\boldsymbol{RT})=(bu_{kn}^2-bu_{k(n+1)}u_{k(n-1)})\det\begin{bmatrix} b^n u_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b^n u_k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b^n u_k \end{bmatrix}=$$

$$(bu_{kn}^2-bu_{k(n+1)}u_{k(n-1)})(b^n u_k)^{n-2}=b^{n(n-1)}u_k^n。$$ 证毕

推论1　若 $n\geqslant 2$,则 $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}u_{k(2n-j)}(\sqrt[n]{v_{kn}})^{j-1}\varepsilon^{k(j-1)}\right)=b^{n(n-1)}u_k^n$,其中 $\varepsilon=\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}}$。

不难证明广义 Fibonacci 和 Lucas 数列及其子数列的下列恒等式[9-10]:

1) $-bu_{k(2n-3)}+v_k u_{k(2n-2)}-u_{k(2n-1)}=0,\cdots,-bu_{kn}+v_k u_{k(n+1)}-u_{k(n+2)}=0$;

2) $u_{k(2n-1)}-v_{kn}u_{k(n-1)}=b^{n-1}u_k$;

3) $\boldsymbol{E}_n^{n+1}=v_{kn}\boldsymbol{E}_n$ 且 $\boldsymbol{E}_n^n=v_{kn}\boldsymbol{I}_n$,其中 $\boldsymbol{E}_n=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & v_{kn} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$。

定理2　若 $n\geqslant 3$,则 $\boldsymbol{R}(v_{kn};u_{k(2n-1)},u_{k(2n-2)},\cdots,u_{kn})$ 可逆且其逆矩阵 $\boldsymbol{R}^{-1}$ 由

$$\boldsymbol{R}^{-1}(v_{kn};u_{k(2n-1)},u_{k(2n-2)},\cdots,u_{kn})=-\frac{1}{b^n u_k}(-b\boldsymbol{I}_n+v_k\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{E}_n^2) \tag{11}$$

给出。其中 $\boldsymbol{I}_n$ 是 $n\times n$ 阶单位矩阵,$\boldsymbol{E}_n$ 如前所定义。

证明　由定理1,因 $\det(\boldsymbol{R}(v_{kn};u_{k(2n-1)},u_{k(2n-2)},\cdots,u_{kn}))\neq 0$,故 $\boldsymbol{R}$ 的逆矩阵存在。由于

$$\boldsymbol{R}(v_{kn};u_{k(2n-1)},u_{k(2n-2)},\cdots,u_{kn})=u_{k(2n-1)}\boldsymbol{I}_n+u_{k(2n-2)}\boldsymbol{E}_n+\cdots+u_{kn}\boldsymbol{E}_n^{n-1}。$$

于是

$$\boldsymbol{R}(v_{kn};u_{k(2n-1)},u_{k(2n-2)},\cdots,u_{kn})\boldsymbol{R}^{-1}(v_{kn};u_{k(2n-1)},u_{k(2n-2)},\cdots,u_{kn})=$$

$$(u_{k(2n-1)}\boldsymbol{I}_n+u_{k(2n-2)}\boldsymbol{E}_n+\cdots+u_{kn}\boldsymbol{E}_n^{n-1})\left(-\frac{1}{b^n u_k}\right)(-(-B)^k\boldsymbol{I}_n+v_k\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{E}_n^2)=$$

$$(-bu_{k(2n-1)}\boldsymbol{I}_n+(u_{2kn}-u_{kn}v_{kn})\boldsymbol{E}_n+(v_k u_{kn}-u_{k(n+1)})v_{kn}\boldsymbol{I}_n)\left(-\frac{1}{b^n u_k}\right)=$$

$$-b(u_{k(2n-1)}-v_{kn}u_{k(n-1)})\boldsymbol{I}_n\left(-\frac{1}{b^n u_k}\right)=-b(b^{n-1}u_k)\boldsymbol{I}_n\left(-\frac{1}{b^n u_k}\right)=\boldsymbol{I}_n。$$ 证毕

3 定理1的推广

对 $\forall t\in\mathbf{Z}$,$\boldsymbol{R}_{k,n,t}=\boldsymbol{R}(v_{kn};u_{k(2n-1+t)},u_{k(2n-2+t)},\cdots,u_{k(n+t)})$ 称为基于广义 Fibonacci 与 Lucas 数列的 $n\times n$ 阶伪准循环矩阵。显然,$\det \boldsymbol{R}_{k,n,0}=b^{n(n-1)}u_k^n$。本节将把定理1的结果推广到 $\boldsymbol{R}_{k,n,t}$ 上。为便于后面的讨论,令

$$\boldsymbol{g}_{k,n,t}=\begin{bmatrix} u_{k(2n+t-1)} & -bu_{k(2n+t-2)} & -b^{n+1}u_{k(t-1)} & \cdots & 0 \\ u_{k(2n+t-2)} & -bu_{k(2n+t-3)} & b^n u_{kt} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -b^{n+1}u_{k(t-1)} \\ u_{k(n+t+1)} & -bu_{k(n+t)} & \vdots & \ddots & b^n u_{kt} \\ u_{k(n+t)} & -bu_{k(n+t-1)} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

与

$$\boldsymbol{h}_{k,n,t}=\begin{bmatrix} u_{k(2n+t-1)} & b^n u_{kt} & -b^{n+1}u_{k(t-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{k(2n+t-2)} & 0 & b^n u_{kt} & -b^{n+1}u_{k(t-1)} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & b^n u_{kt} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -b^{n+1}u_{k(t-1)} \\ u_{k(n+t+1)} & 0 & 0 & \cdots & \ddots & b^n u_{kt} \\ u_{k(n+t)} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

引理2　矩阵 $\boldsymbol{g}_{k,n,t}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{g}_{k,n,t}$ 满足递推关系

$$\det \boldsymbol{g}_{k,n,t}=(-1)^n b^{n^2-n+t}u_k u_{k(n-1)}u_{kt}^{n-2}-b^{2n-1}u_{k(t-1)}\det \boldsymbol{g}_{k,n-1,t} \tag{12}$$

证明　由于

$$\det \boldsymbol{g}_{k,n,t}=-b^{n(n-2)+1}\begin{vmatrix} u_{k(2n+t-1)} & u_{k(2n+t-2)} & -bu_{k(t-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{k(2n+t-2)} & u_{k(2n+t-3)} & u_{kt} & -bu_{k(t-1)} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & u_{kt} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -bu_{k(t-1)} \\ u_{k(n+t+1)} & u_{k(n+t)} & \cdots & \cdots & \ddots & u_{kt} \\ u_{k(n+t)} & u_{k(n+t-1)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

所以，用 $\det \boldsymbol{g}_{k,n,t}$ 第一列的 v_k 倍减去第二列，可得

$$\det \boldsymbol{g}_{k,n,t}=-b^{n(n-2)+1}\begin{vmatrix} bu_{k(2n+t-3)} & u_{k(2n+t-2)} & -bu_{k(t-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ bu_{k(2n+t-4)} & u_{k(2n+t-3)} & u_{kt} & -bu_{k(t-1)} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & u_{kt} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -bu_{k(t-1)} \\ u_{k(n+t-1)} & u_{k(n+t)} & \cdots & \cdots & \ddots & u_{kt} \\ bu_{k(n+t-2)} & u_{k(n+t-1)} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}。$$

如此继续下去，经过 $n+t-1$ 次两列之间的减法之后，最终可得

$$\det \boldsymbol{g}_{k,n,t}=-b^{n(n-2)+n+t}\begin{vmatrix} u_{kn} & u_{k(n-1)} & -bu_{k(t-1)} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{k(n-1)} & u_{k(n-2)} & u_{kt} & -bu_{k(t-1)} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & u_{kt} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -bu_{k(t-1)} \\ u_{2k} & u_{1} & \cdots & \cdots & \ddots & u_{kt} \\ u_{k} & u_{0} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}。$$

将上面的行列式按第一行展开，并利用 $u_0=0$，可得

$$\det \boldsymbol{g}_{k,n,t}=b^{n^2-n+t}u_{k(n-1)}\begin{vmatrix} u_{k(n-1)} & u_{kt} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & -bu_{k(t-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{kt} \\ u_k & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}+b^{n^2-n+t+1}u_{k(t-1)}\begin{vmatrix} u_{k(n-1)} & u_{k(n-2)} & -bu_{k(t-1)} & \cdots & 0 \\ u_{k(n-2)} & u_{k(n-3)} & u_{kt} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & -bu_{k(t-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & u_{kt} \\ u_k & u_0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=$$

$$(-1)^n b^{n^2-n+t}u_{k(n-1)}u_k u_{kt}^{n-2}+b^{n^2-n+t+1}u_{k(t-1)}\left(\frac{-1}{b^{n^2-3n+t+2}}\right)\det \boldsymbol{g}_{k,n-1,t}=$$

$$(-1)^n b^{n^2-n+t}u_{k(n-1)}u_k u_{kt}^{n-2}-b^{2n-1}u_{k(t-1)}\det \boldsymbol{g}_{k,n-1,t}。$$

证毕

引理 3　若 $k>0$ 为奇数，则有

$$\det \boldsymbol{g}_{k,n,t}=\frac{(-1)^{kn}}{u_k}[b^{n^2-n+1}u_{k(n-1)}u_{kt}^n+b^{n^2}u_{k(t-1)}^n u_k-b^{n^2-n+1}u_{k(t-1)}u_{kn}u_{kt}^{n-1}]。\tag{13}$$

证明　当 $n=2$ 时，(13)式的左边为 $\det \boldsymbol{g}_{k,2,t}=\begin{vmatrix} u_{3+t} & -bu_{2+t} \\ u_{2+t} & -bu_{1+t}\end{vmatrix}=-b(u_{3+t}u_{1+t}-u_{2+t}^2)=b^{t+2}u_k^2$。在(13)式右边取 $n=2$，可得

$$\frac{(-1)^{2k}}{u_k}[b^3u_ku_{kt}^2+b^4u_{k(t-1)}^2u_k-b^3u_{k(t-1)}u_{2k}u_{kt}]=b^3(u_{kt}^2+bu_{k(t-1)}^2-u_{k(t-1)}v_ku_{kt})=b^3(u_{kt}^2-u_{k(t+1)}u_{k(t-1)})=b^{t+2}u_k^2。$$

即结论对 $n=2$ 成立。

假设结论对 $n-1$ 成立，下证结论对 n 也成立。由归纳假设和(12)式，对奇数 k，有

$$\det \boldsymbol{g}_{k,n,t}=(-1)^n b^{n^2-n+t}u_{k(n-1)}u_ku_{kt}^{n-2}-b^{2n-1}u_{k(t-1)}\frac{(-1)^{k(n-1)}}{u_k}\times$$

$$[b^{n^2-3n+3}u_{k(n-2)}u_{kt}^{n-1}+b^{(n-1)^2}u_{k(t-1)}^{n-1}u_k-b^{n^2-3n+3}u_{k(t-1)}u_{k(n-1)}u_{kt}^{n-2}]=(-1)^{k(n-1)+1}b^{n^2}u_{k(t-1)}^n+$$

$$(-1)^{k(n-1)}b^{n^2-n+1}\frac{u_{k(t-1)}u_{kt}^{n-1}u_{kn}}{u_k}+u_{kt}^{n-2}u_{k(n-1)}\left[(-1)^{kn}b^{n^2-n+t}u_k-(-1)^{k(n-1)}b^{n^2-n+1}\frac{u_{k(t+1)}u_{k(t-1)}}{u_k}\right]=$$

$$(-1)^{k(n-1)+1}b^{n^2}u_{k(t-1)}^n+(-1)^{k(n-1)}b^{n^2-n+1}\frac{u_{k(t-1)}u_{kt}^{n-1}u_{kn}}{u_k}+(-1)^{kn}b^{n^2-n+1}\frac{u_{kt}^{n-2}u_{k(n-1)}}{u_k}[b^{t-1}u_k^2+u_{k(t+1)}u_{k(t-1)}]=$$

$$\frac{(-1)^{kn}}{u_k}[b^{n^2-n+1}u_{k(n-1)}u_{kt}^n+b^{n^2}u_{k(t-1)}^nu_k-b^{n^2-n+1}u_{k(t-1)}u_{kn}u_{kt}^{n-1}]。$$

证毕