DOI:10.11721/cqnuj20150611

关于 Diophantine 方程组 $x+1=3pqu^2$,$x^2-x+1=3v^2$ 的整数解*

管 训 贵

(泰州学院 数理学院,江苏 泰州 225300)

摘要:设 p,q 是互异的奇素数,$p\equiv q\equiv 1 \pmod 6$,主要利用递归序列、Pell 方程和四次 Diophantine 方程解的性质证明了 Diophantine 方程组 $x+1=3pqu^2$,$x^2-x+1=3v^2$ 除开 $pq=7\times 13$ 有非平凡解外,仅有平凡解。

关键词:三次和四次 Diophantine 方程;Pell 方程;整数解;递归序列

中图分类号:O156 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2015)06-0077-04

1 引言及主要结论

方程 $x^3+1=Dy^2$($D>0$,且 D 无平方因子)是一类重要的三次 Diophantine 方程,在研究它时,方程组

$$x+1=3Du^2,x^2-x+1=3v^2 \tag{1}$$

起着非常重要的作用。关于(1)式的整数解,目前已有一些结果。1981 年,柯召等[1]用初等方法(Pell 方程法)证明了当 $D>2$,D 无平方因子且不能被 3 或 $6k+1$ 型的素数整除时,方程(1)无正整数。当 $D>1$,D 无平方因子且能被 $6k+1$ 型的素数整除时,情况比较复杂,对于具体的 D,文献[2-8]已有一些零散的结果。本文用递归序列、Pell 方程的解的性质和 Maple 小程序,得出当 D 含互异的两个 $6k+1$ 型的素因子时方程(1)的解的情况。

2 若干引理

引理 1[9] 设 p 是一个奇素数,则丢番图方程 $4x^4-py^2=1$ 除开 $p=3$,$x=y=1$ 和 $p=7$,$x=2$,$y=3$ 外,无其他的正整数解。

引理 2[9] 方程 $x^2-3y^4=1$ 仅有整数解 $(x,y)=(\pm 2,\pm 1),(\pm 7,\pm 2),(\pm 1,0)$。

引理 3[9] 设 p 是一个奇素数,则丢番图方程 $x^4-py^2=1$ 除开 $p=5$,$x=3$,$y=4$ 和 $p=29$,$x=99$,$y=1\ 820$ 外,无其他的正整数解。

定理 1 设 p,q 为互异的奇素数,$p\equiv q\equiv 1 \pmod 6$,则 Diophantine 方程组

$$x+1=3pqu^2,x^2-x+1=3v^2,\gcd(u,v)=1 \tag{2}$$

只有当 $pq=7\times 13$ 时除平凡解 $(x,u,v)=(-1,0,\pm 1)$ 外还有非平凡解 $(x,u,v)=(4\ 367,\pm 4,2\ 521)$,其他情形方程组仅有平凡解 $(x,u,v)=(-1,0,\pm 1)$。

3 定理 1 的证明

证明 将(2)式的第一式代入第二式得 $(2v)^2-3(2pqu^2-1)^2=1$,故有

$$2v+(2pqu^2-1)\sqrt{3}=\pm(x_n+y_n\sqrt{3})=\pm(2+\sqrt{3})^n,n\in \mathbf{Z},$$

* **收稿日期**:2013-09-21 **修回日期**:2015-03-20 **网络出版时间**:2015-9-28 12:16

资助项目:江苏省教育科学“十二五”规划课题资助项目(No. D201301083);泰州学院重点课题资助项目(No. TZXY2014ZDKT007);云南省教育厅科研基金(No. 2014Y462)

作者简介:管训贵,男,副教授,研究方向为初等数论,E-mail:tzszgxg@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150928.1216.034.html

这里 $2+\sqrt{3}$ 是 Pell 方程 $X^2-3Y^2=1$ 的基本解,因此有 $2pqu^2-1=\pm y_n(n\in\mathbf{Z})$,即 $2pqu^2=\pm y_n+1$。又 $y_{-n}=-y_n$,所以只需考虑:

$$2pqu^2=y_n+1。\tag{3}$$

容易验证下列各式成立:

$$x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n,x_0=1,x_1=2,\tag{4}$$

$$y_{n+2}=4y_{n+1}-y_n,y_0=0,y_1=1,\tag{5}$$

$$x_{n+1}=2x_n+3y_n,y_{n+1}=x_n+2y_n,\tag{6}$$

$$x_{2n}=x_n^2+3y_n^2,y_{2n}=2x_ny_n,x_n^2-3y_n^2=1,\tag{7}$$

$$x_{n-1}=2x_n-3y_n,y_{n-1}=-x_n+2y_n。\tag{8}$$

由(5)式知,若 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$,则 $y_n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$,此时(3)式不成立。

若 $n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$,则 $y_n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 8)$,于是 $2pqu^2=y_n+1\equiv 2(\mathrm{mod}\ 8)$,即 $pqu^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$。易知,$u$ 为奇数,故 $pq\equiv 1,5(\mathrm{mod}\ 8)$。若 $pq\equiv 3,7(\mathrm{mod}\ 8)$,则(2)式无整数解。由此可知:当 p,q 满足下列 8 种情形之一,(2)式无整数解。

①$p\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24)$

①$p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24)$;②$p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 19(\mathrm{mod}\ 24)$;

③$p\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 24)$;④$p\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 13(\mathrm{mod}\ 24)$;

⑤$p\equiv 13(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24)$;⑥$p\equiv 13(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 19(\mathrm{mod}\ 24)$;

⑦$p\equiv 19(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 24)$;⑧$p\equiv 19(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 13(\mathrm{mod}\ 24)$。

剩下 8 种情形,分别是:

①$p\equiv q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 24)$;②$p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 13(\mathrm{mod}\ 24)$;

③$p\equiv q\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24)$;④$p\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 19(\mathrm{mod}\ 24)$;

⑤$p\equiv 13(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 24)$;⑥$p\equiv q\equiv 13(\mathrm{mod}\ 24)$;

⑦$p\equiv 19(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24)$;⑧$p\equiv q\equiv 19(\mathrm{mod}\ 24)$。

由 p,q 的对称性,只需考虑以下情形:

(Ⅰ)$p\equiv q\equiv 1(\mathrm{mod}\ 24)$;(Ⅱ)$p\equiv 1(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 13(\mathrm{mod}\ 24)$;

(Ⅲ)$p\equiv q\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24)$;(Ⅳ)$p\equiv 7(\mathrm{mod}\ 24),q\equiv 19(\mathrm{mod}\ 24)$;

(Ⅴ)$p\equiv q\equiv 13(\mathrm{mod}\ 24)$;(Ⅵ)$p\equiv q\equiv 19(\mathrm{mod}\ 24)$。

令 $n=4m+1(m\in\mathbf{Z})$,则由(6)式和(7)式可得

$$2pqu^2=y_{4m+1}+1=x_{4m}+2y_{4m}+1=x_{2m}^2+3y_{2m}^2+4x_{2m}y_{2m}+1=$$
$$2x_{2m}(x_{2m}+2y_{2m})=2x_{2m}y_{2m+1},\text{即 }pqu^2=x_{2m}y_{2m+1}。$$

又因 $\gcd(x_{2m},y_{2m+1})=\gcd(x_{2m},x_{2m}+2y_{2m})=\gcd(x_{2m},2y_{2m})=1$,所以下列情形之一成立:

$$x_{2m}=pqa^2,y_{2m+1}=b^2,u=ab,\gcd(a,b)=1;\tag{9}$$

$$x_{2m}=a^2,y_{2m+1}=pqb^2,u=ab,\gcd(a,b)=1;\tag{10}$$

$$x_{2m}=pa^2,y_{2m+1}=qb^2,u=ab,\gcd(a,b)=1;\tag{11}$$

$$x_{2m}=qa^2,y_{2m+1}=pb^2,u=ab,\gcd(a,b)=1。\tag{12}$$

将(9)式的第二式代入 $x_{2m+1}^2-3y_{2m+1}^2=1$,得 $x_{2m+1}^2-3b^4=1$。根据引理 2 知,$b^2=0,1,4$,即 $y_{2m+1}=0,1,4$,仅有 $y_{2m+1}=1$ 成立,则 $m=0$。但由(4)式及(9)式的第一式知,$x_2\neq pqa^2$,所以(9)式不成立。

将(10)式的第一式代入 $x_{2m}^2-3y_{2m}^2=1$,得 $a^4-3y_{2m}^2=1$。根据引理 3 知,$a^2=1$,即 $x_{2m}=1$,则 $m=0$,但由(5)式及(10)式的第二式知,$y_1\neq pqb^2$,所以(10)式不成立。

对于(11)式,由(6)式得,$y_{2m+1}=x_{2m}+2y_{2m}$,故有 $qb^2=pa^2+2y_{2m}$,即

$$qb^2-pa^2=2y_{2m}。\tag{13}$$

因 x_{2m} 0(mod 2),p 为奇素数,故 a 为奇数,则 $a^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 8)$;而 y_{2m+1} 0(mod 2),q 为奇素数,故 b 为奇数,则 $b^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ 8)$。又 $y_{2m}\equiv 0,4(\mathrm{mod}\ 8)$,故 $2y_{2m}\equiv 0(\mathrm{mod}\ 8)$。对(13)式两边取模 8,得 $q-p\equiv 0(\mathrm{mod}\ 8)$,即 $q\equiv$

$p\pmod 8$)，故情形(Ⅱ)、(Ⅳ)不成立。

由(8)式得，$x_{2m}=2x_{2m+1}-3y_{2m+1}$，故有 $pa^2=2x_{2m+1}-3qb^2$，即

$$2x_{2m+1}=pa^2+3qb^2。$$

因为 a,b 为奇数，故 $a^2,b^2\equiv 1,9\pmod{24}$。而 $x_{2m+1}\equiv 1,7\pmod{24}$，即 $2x_{2m+1}\equiv 2,14\pmod{24}$。又当 $p\equiv q\pmod{24}$ 时，$qa^2+3pb^2\equiv 4,12\pmod{24}$，故情形(Ⅰ)、(Ⅲ)、(Ⅴ)、(Ⅵ)不成立。

对于(12)式，仿(11)式的讨论知，情形(Ⅰ)～(Ⅵ)不成立。

因此，若 $n\equiv 1\pmod 4$，则(2)式无整数解。

若 $n\equiv -1\pmod 4$，令 $n=4m-1(m\in\mathbb{Z})$，则由(6)～(8)式可得

$$2pqu^2=y_{4m-1}+1=-x_{4m}+2y_{4m}+1=-(x_{2m}^2+3y_{2m}^2)+4x_{2m}y_{2m}+1=$$
$$2y_{2m}(2x_{2m}-3y_{2m})=2y_{2m}x_{2m-1}，即\ pqu^2=x_{2m-1}y_{2m}。$$

又因为 $\gcd(x_{2m-1},y_{2m})=\gcd(2x_{2m}-3y_{2m},y_{2m})=\gcd(2x_{2m},y_{2m})=2$，所以下列情形之一成立：

$$x_{2m-1}=2a^2,y_{2m}=2pqb^2,u=2ab,\gcd(a,b)=1;\tag{14}$$
$$x_{2m-1}=2pqa^2,y_{2m}=2b^2,u=2ab,\gcd(a,b)=1;\tag{15}$$
$$x_{2m-1}=2qa^2,y_{2m}=2pb^2,u=2ab,\gcd(a,b)=1;\tag{16}$$
$$x_{2m-1}=2pa^2,y_{2m}=2qb^2,u=2ab,\gcd(a,b)=1。\tag{17}$$

将(14)式的第一式代入 $x_{2m-1}^2-3y_{2m-1}^2=1$，得 $4a^4-3y_{2m-1}^2=1$。根据引理 1 知，$a^2=1$，此时 $x_{2m-1}=2$，则 $m=1$或 0，其中 $m=0$ 时给出 $b=0,u=0$，得方程(2)的平凡解 $(x,u,v)=(-1,0,\pm 1)$。

由(15)式的第二式得 $x_my_m=b^2$，考虑到 $\gcd(x_m,y_m)=1$，有 $x_m=c^2,y_m=d^2$，故 $(c^2)^2-3d^4=1$，根据引理 2 知，$c^2=1$，此时 $x_m=1$，则 $m=0$，推出(15)式的第一式不成立。

由(16)式的第二式得 $x_my_m=pb^2$，考虑到 $\gcd(x_m,y_m)=1$，有

$$x_m=c^2,y_m=pd^2,b=cd,\gcd(c,d)=1;\tag{18}$$

或

$$x_m=pc^2,y_m=d^2,b=cd,\gcd(c,d)=1。\tag{19}$$

若(18)式成立，则有

$$c^4-3(pd^2)^2=1。\tag{20}$$

由引理 3 知，方程(20)仅有整数解 $(c,d)=(\pm 1,0)$，此时 $y_{2m}=0$，则 $m=0$，推出(16)式的第一式不成立。

若(19)式成立，则有

$$(pc^2)^2-3d^4=1。\tag{21}$$

由引理 2 知，方程(21)仅有整数解 $(p,c,d)=(1,\pm 1,0)$，$(2,\pm 1,\pm 1)$ 和 $(7,\pm 1,\pm 2)$，但 p 是奇素数，故 $p=7$，$x_m=7$，则 $m=2$。此时 $n=7$，所以由(3)式，得 $14qu^2=y_7+1=2\ 912$，即 $qu^2=208$，故 $u=\pm 4$，$q=13$，从而得到了 $p=7$ 时方程组(2)的非平凡解 $(x,u,v)=(4\ 367,\pm 42\ 521)$。

由(17)式的第二式得 $x_my_m=qb^2$，仿(16)式的讨论知，$q=7$，$p=13$。此时方程组(2)的非平凡解仍是 $(x,u,v)=(4\ 367,\pm 4,2\ 521)$。

综上，方程组(2)只有当 $pq=7\times 13$ 时除平凡解 $(x,u,v)=(-1,0,\pm 1)$ 外还有非平凡解 $(x,u,v)=(4\ 367,\pm 4,2\ 521)$，其他情形方程组仅有平凡解 $(x,u,v)=(-1,0,\pm 1)$。　证毕。

参考文献：

[1] 柯召，孙琦. 关于丢番图方程 $x^3\pm 1=Dy^2$[J]. 中国科学，1981，12：1453-1457.
Ke Z，Sun Q. On the Diophantine equation $x^3\pm 1=Dy^2$[J]. Scientia Sinica Mathemation，1981，12：1453-1457.

[2] 杜先存，管训贵，杨慧章. 关于不定方程 $x^3+1=91y^2$[J]. 内蒙古师范大学学报：自然科学版，2013，42(4)：397-399.
Du X C，Guan X G，Yang H Z. On the Diophantine equation $x^3+1=91y^2$[J]. Journal of Inner Mongolia Normal University：Natural Science Edition，2013，42(4)：397-399.

[3] 杜先存，万飞，杨慧章. 关于丢番图方程 $x^3\pm 1=1267y^2$ 的

整数解[J].数学的实践与认识,2013,43(15):288-292.

Du X C, Wan F, Yang H Z. On the Diophantine equation $x^3 \pm 1 = 1267y^2$[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2013,43(15):288-292.

[4] 瞿云云,包小敏.关于不定方程 $x^3+1=119y^2$[J].西南师范大学学报:自然科学版,2009,34(1):9-11.

Qu Y Y, Bao X M. On the Diophantine equation $x^3+1=119y^2$[J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science Edition,2009,34(1):9-11.

[5] 李双志,罗明.关于不定方程 $x^3+1=201y^2$[J].西南师范大学学报:自然科学版,2010,35(1):11-14.

Li S Z, Luo M. On the Diophantine equation $x^3+1=201y^2$[J]. Journal of Southwest China Normal University: Natural Science Edition,2010,35(1):11-14.

[6] 潘家宇. 关于丢番图方程 $x^3 \pm 1 = Dy^2$[J]. 河南科学,1997,15(4):379-382.

Pan J Y. On the Diophantine equation $x^3 \pm 1 = Dy^2$[J]. Henan Science,1997,15(4):379-382.

[7] 倪谷炎. 关于不定方程 $x^3+1=Dy^2$[J].哈尔滨工业大学学报:自然科学版,1999,15(3):13-15.

Ni G Y. On the Diophantine equation $x^3+1=Dy^2$[J]. Journal of Harbin Normal University: Natural Science Edition,1999,15(3):13-15.

[8] 杜先存,管训贵,李玉龙.关于 Diophantine 方程 $x^3+1=13qy^2$ 的整数解[J].重庆师范大学学报:自然科学版,2014,31(6):66-68.

Du X C, Guan X G, Li Y L. The integer solutions of the Diophantine equation $x^3+1=13qy^2$[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science,2014,31(6):66-68.

[9] 曹珍富.丢番图方程引论[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989.

Cao Z F. Introduction to Diophantine equations[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press,1989.

On the System of Diophantine Equations $x+1=3pqu^2$ and $x^2-x+1=3v^2$

GUAN Xungui

(School of Mathematics and Physics, Taizhou Normal College, Taizhou Jiangsu 225300, China)

Abstract: Let p, q be different odd primes, $p \equiv q \equiv 1 \pmod 6$. We use recurrent sequence, some properties of the solutions to Pell equation and quartic Diophantine equations to prove the Diophantine equations $x+1=3pqu^2$, $x^2-x+1=3v^2$ has only trivial solutions $(x,u,v)=(-1,0,\pm 1)$ with the exceptions that $pq=7\times 13$.

Key words: cubic and quartic Diophantine equation; Pell equation; integer solution; recurrent sequence

(责任编辑 游中胜)