DOI:10.11721/cqnuj20150623

矩阵代数的一类导子的保交换性*

姜 景 连
(武夷学院 数学与计算机学院,福建 武夷山 354300)

摘要:设 $M_n(F)$ 是特征为 0 的域 F 上的 $n\times n$ 阶矩阵构成的代数,讨论 $M_n(F)$ 上的非退化导子的保交换性质,刻画了 $n>4$ 时这类导子的表达式中线性函数 f 与非退化矩阵 $\boldsymbol{S}$ 之间的关系:$f(\boldsymbol{X})=\frac{c}{|\boldsymbol{S}|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}A_{ij}(\mu_{jj}a_{jj}-a_{ii})$,其中 $\boldsymbol{S}=(a_{ij})_{n\times n}$,$\mu_{jj}=\begin{cases}1, 当\ j\neq i\ 时,\\ 0, 当\ j=i\ 时。\end{cases}$ 该结论推广了 Watkins 的研究成果。

关键词:矩阵代数;导子;非退化;保交换

中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)06-0081-03

矩阵空间上的线性保持问题主要研究矩阵空间上保持某些性质、关系、子集等不变量的线性映射结构,它是矩阵理论及其应用研究中一个比较活跃的研究课题,研究成果也较为丰富。如 Cao 等人[1]、Alieva 等人[2]研究了矩阵空间上保秩的线性映射,Li 等人[3]和 Ji[4]研究了矩阵空间上保相似的线性映射,Botta 等人在文献[5]中研究了保幂零的线性映射;Watkin 在文献[6]中对 $n(n>4)$ 阶矩阵空间上的保交换的线性变换进行了刻画;Marcoux 等人在文献[7]中研究了 $n(n\geqslant 2)$ 的上三角矩阵代数的保交换的线性变换;Cham 等人[8]以及 Radjav[9]则从不同角度研究了对称矩阵空间上的保交换的线性变换的性质。本文将对特征为 0 的域 F 上的全矩阵代数的非退化导子的保交换性质进行研究,主要刻画这类导子的表达式中的参数之间的关系,主要结论在定理 1 中给出,它推广了文献[6]的结果。

1 预备知识

为叙述方便,在下文中记 $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵,$\boldsymbol{E}_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是第 (i,j) 位置元素为 1,其余位置为 0 的 n 阶方阵。

引理 1　对 $\{i,j,k,l\}\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,$\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{kl}=\begin{cases}\boldsymbol{E}_{il}, 当\ j=k\ 时;\\ 0, 当\ j\neq k\ 时。\end{cases}$ 记 F 是特征为 0 的代数闭域,M_n 是域 F 上的全体 n 阶矩阵构成的线性空间。

定义 1[6]　设 L 是 $n\times n$ 阶矩阵空间 M_n 上的线性变换。$\forall\,\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n$,如果满足:

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\Rightarrow L(\boldsymbol{A})L(\boldsymbol{B})=L(\boldsymbol{B})L(\boldsymbol{A}),\tag{1}$$

则称 L 是 M_n 上的保持交换性的线性变换。

定义 2[10]　设 $\mathfrak{I}$ 是域 F 上的代数,D 是 $\mathfrak{I}$ 上 的一个线性变换,如果 D 满足:

$$D(a\cdot b)=D(a)\cdot b+a\cdot D(b),\tag{2}$$

则称 D 是代数 $\mathfrak{I}$ 的一个导子。

特别地,$\forall\,A,B\in\mathfrak{I}$,如果 D 满足(1)式,则称导子 D 是保持交换的。

引理 2[6]　设 L 是 $n(n>4)$ 阶矩阵空间 M_n 上的一个保交换的非退化线性变换,则存在常数 c 以及非退化矩

* **收稿日期**:2014-10-26　　**修回日期**:2015-03-29　　**网络出版时间**:2015-9-28 12:02
资助项目:福建省教育厅科技项目(No. JA14310)
作者简介:姜景连,女,副教授,研究方向为代数学,E-mail:jiangjl2013@sina.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150928.1202.010.html

阵 $\boldsymbol{S}$ 使得：

$$D(\boldsymbol{X})=c\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}+f(\boldsymbol{X})\boldsymbol{I}, \tag{3}$$

或

$$D(\boldsymbol{X})=c\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}+f(\boldsymbol{X})\boldsymbol{I}, \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{X}\in M_n$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的转置矩阵，$f:M_n\to F$ 是 M_n 上的一个线性函数。

容易证明 M_n 关于矩阵的加法、数量乘法、乘法构成一个域 F 上的代数，本文中记为 $M_n(F)$。下文中的线性函数 f 与引理2是一致的。本文主要讨论矩阵代数 $M_n(F)$ 上的非退化的导子的保交换性质。

2 主要结果

对(3)、(4)两式，记 $\boldsymbol{S}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{S}^*=(A_{ji})$ 是 $\boldsymbol{S}$ 的伴随矩阵，其中 A_{ji} 是矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的第(j,i)位置元素的代数余子式。对 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})\in M_n(F)$，易得 $f(\boldsymbol{X})=\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}f(\boldsymbol{E}_{ij})$，即 $f(\boldsymbol{X})$ 由 $f(\boldsymbol{E}_{ij})(i,j=1,2,\cdots,n)$ 决定。不妨设 $f(\boldsymbol{E}_{ij})=\lambda_{ij}$，这里 $\lambda_{ij}\in F$。

引理3 设 D 是矩阵代数 $M_n(F)$ 上的一个非退化的导子，如果 D 是保持交换的，那么：

1) 当 $n>4$ 时以下等式成立：

$$A_{i1}a_{i1}=A_{i2}a_{i2}=\cdots=A_{in}a_{in},i=1,2,\cdots,n。$$

2) 当 $n>4$ 时，$A_{ik}a_{ik}=\dfrac{|\boldsymbol{S}|}{n}$，$1\leqslant i,k\leqslant n$。其中 $|\boldsymbol{S}|$ 是非退化矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的行列式。

证明 1) 在(2)式中令 $a=E_{ii}$，$b=E_{jj}$，并将(3)式代入得：

$$\frac{c}{|\boldsymbol{S}|}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}a_{ij}E_{kj}+\lambda_{ii}E_{jj}+\frac{c}{|\boldsymbol{S}|}\sum_{k=1}^{n}A_{ji}a_{jk}E_{ik}+\lambda_{jj}E_{ii}=0。\tag{5}$$

则当 $i\neq j$ 时，比较(5)式两边矩阵的第(j,j)位置的元素得到：

$$\lambda_{ii}=-\frac{c}{|\boldsymbol{S}|}A_{ij}a_{ij}。\tag{6}$$

另外，当 $i=j$ 时比较第(i,i)位置的元素得到：

$$\lambda_{ii}=-\frac{c}{|\boldsymbol{S}|}A_{ii}a_{ii}。\tag{7}$$

综上所述，对于给定的 i，λ_{ii} 可以表示为(6)式或(7)式的形式，由此可得结果。

2) 可由1)直接得出。 证毕

引理4 设 D 是矩阵代数 $M_n(F)$ 上的一个非退化的导子，如果 D 是保持交换的，那么当 $n>4$ 且 $i\neq j$ 时，

$$\lambda_{ij}=-\frac{c}{|\boldsymbol{S}|}A_{ij}(a_{ii}-a_{jj})。$$

证明 当 $n>4$ 且 $i\neq j$ 时，在(2)式中令 $a=\boldsymbol{E}_{ii}$，$b=\boldsymbol{E}_{ij}$，得：$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{E}_{ii})D(\boldsymbol{E}_{ij})=D(\boldsymbol{E}_{ii})\boldsymbol{E}_{ij}$。

再将(3)式代入，则有：

$$\frac{c}{|\boldsymbol{S}|}\sum_{k\neq i}\sum_{l=1}^{n}A_{ik}a_{jl}\boldsymbol{E}_{kl}+\sum_{k\neq i}\lambda_{ij}\boldsymbol{E}_{kk}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}a_{ii}\boldsymbol{E}_{kj}+\lambda_{ii}\boldsymbol{E}_{ij},$$

并比较等式两端矩阵的第(i,j)位置的元素即得(将(4)式代入也可得证)。 证毕

定理1 设 D 是 $n(n>4)$ 阶矩阵代数 $M_n(F)$ 上的一个保交换的非退化的导子，则存在常数 $c\neq0$ 以及非退化矩阵 $\boldsymbol{S}$ 使得：$D(\boldsymbol{X})=c\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{S}+f(\boldsymbol{X})\boldsymbol{I}$，或 $D(\boldsymbol{X})=c\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}+f(\boldsymbol{X})\boldsymbol{I}$。其中 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})\in M_n(F)$，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的转置矩阵，f 是 $M_n(F)$ 上的线性函数。且1) $\boldsymbol{S}$ 满足：$A_{i1}a_{i1}=A_{i2}a_{i2}=\cdots=A_{in}a_{in}$，$i=1,2,\cdots,n$；2) $\forall\boldsymbol{X}=(x_{ij})\in M_n(F)$，$f(\boldsymbol{X})=\dfrac{c}{|\boldsymbol{S}|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}A_{ij}(\mu_{jj}a_{jj}-a_{ii})$，其中 $\mu_{jj}=\begin{cases}1,当\ j\neq i\ 时；\\0,当\ j=i\ 时。\end{cases}$

证明 由引理3、引理4可得。 证毕

参考文献:

[1] Cao C G, Tang X M. Linear maps preserving rank 2 on the space of alternate matrices and their applications[J]. Int J Math Sci, 2004(63): 3409-3417.

[2] Alieva A A, Guterman A E. Linear preservers of rank permutability[J]. Linear Algebra Appl, 2004, 384(6): 97-108.

[3] Li C K, Pierce S. Linear operators preserving a similarity class and related results[J]. Canad Math Bull, 1994, 37(3): 374-383.

[4] Ji G. Similarity-preserving linear maps on B(H)[J]. Linear Algebra Appl, 2003, 360(2): 249-257.

[5] Botta P, Pierce S, Watkins W. Linear transformations that preserve the nilpotent matrices[J]. Pacific J Math, 1983, 104(1): 39-46.

[6] Watkins W. Linear maps that preserve commuting pairs of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1976, 14(1): 29-35.

[7] Marcoux L W, Sourour A R. Commutativity preserving linear maps and lie automorphisms of triangular matrix algebras[J]. Linear Algebra Appl, 1999, 288(1): 89-104.

[8] Chan G H, Lim M H. Linear transformations on symmetric matrices that preserve commutativity[J]. Linear Algebra Appl, 1982, 47(82): 11-22.

[9] Radjavi H. Commutativity-preserving operators on symmetric matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1984, 61(84): 219-224.

[10] 苏育才,卢才辉,崔一敏. 有限维半单李代数简明教程[M]. 北京:科学出版社,2008.
Su Y C, Lu C H, Cui Y M. Finit dimensional semisimple Liealgebra [M]. Beijing: Science Press, 2008.

Commutativity Preserving of a Certain Derivations on Algebra of Matrices

JIANG Jinglian

(Department of Mathematics and Computer, Wuyi University, Wuyishan Fujian 354300, China)

Abstract: Let $M_n(F)$ be the algebra of $n\times n$ matrices with entries in an algebraically closed field F of characteristic 0. If a non-singular derivation D on $M_n(F)$ preserves commutativity, where $n>4$, then D can be determined by a non-singular matrix $\boldsymbol{S}$ and a linear function f, where the range of f be determined by $\boldsymbol{S}$: $f(\boldsymbol{X})=\frac{c}{|\boldsymbol{S}|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}A_{ij}(\mu_{jj}a_{jj}-a_{ii})$, where $\boldsymbol{S}=(a_{ij})_{n\times n}$, $\mu_{jj}=\begin{cases}1, & j\neq i;\\ 0, & j=i.\end{cases}$ This conclusion generalizes the research results of Watkins.

Key words: algebra of matrices; derivations; non-singular; commutativity preserving

(责任编辑 方 兴)