DOI:10.11721/cqnuj20150607

食饵具有疾病和庇护所效应的随机食饵-捕食者模型的渐近性质分析*

谭 杨[1],田佳桂[2],郭子君[3]
(1. 铜仁职业技术学院,贵州 铜仁 554300;2. 铜仁第三中学,贵州 铜仁 554300;
3. 华南农业大学 应用数学研究所,广州 510642)

摘要:研究了一类具有庇护所效应的随机食饵-捕食者模型的动态行为。假设捕食者为基于比率依赖型的功能反应,食饵按常数比例受到庇护。利用随机微分方程理论构造 V 函数,结合停时、Ito 公式等技巧和方法证明了模型解的全局存在性,即模型的解不会在有限时间内发生爆炸;解的有界性的证明说明该系统符合生物学行为;进一步,使用 V 函数判别随机稳定性的方法证明了系统无病平衡点在一定条件下的全局稳定性,该结论表明,在一定的条件假设下,系统中的感染食饵种群和捕食者种群会趋于灭绝,而易感食饵种群稳定在环境容纳量的数量规模。最后研究了随机系统围绕另一点的渐近性质,该点是相应确定性系统的平衡点,却不是随机系统的平衡点。

关键词:食饵-捕食者模型;庇护所效应;随机干扰;随机全局渐近稳定

中图分类号:O211.63 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2015)06-0088-06

1946 年,Crombic 通过实验的方法较早地将庇护所效应引入了食饵-捕食者模型。所谓的“庇护所效应”指的是,在一些食饵-捕食者体统中,食饵种群总是会进入一些所谓的安全区域,即不会被捕食者捕食的区域,体现出的作用就是有助于保持食饵种群的数量规模,一定程度上保持了自然群落的生物多样性。文献[1]建立了具有庇护所效应的食饵-捕食者模型,讨论了庇护所中食饵数量与现有食饵数量呈正比例的情形。文献[2-3]研究了具有庇护所效应的 Lotka-Volterra 食饵-捕食者模型,得出了庇护所效应能够增加系统的稳定性的结论。文献[4]研究了如下具有庇护所效应且捕食者仅捕食染病食饵的生态流行病模型的有界性、持久性和平衡点的局部与全局稳定性:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=rS\left(1-\dfrac{S+I}{K}\right)-\beta SI,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-cI-\dfrac{b(1-m)IY}{aY+(1-m)I},\\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=-\mu Y+\dfrac{pb(1-m)IY}{aY+(1-m)I}。\end{cases}\tag{1}$$

然而在现实情况中,种群的生存不可避免地受到环境随机因素的干扰,并且这样的干扰在很多情况下不能被忽略,对某些实际过程的分析有必要从通常的确定性观点转到随机的观点。文献[2-3]研究了随机白噪声干扰下,一类基于比率依赖的食饵-捕食者模型的解的存在、唯一性、有界性、矩估计等性质。文献[4]研究了一类尽食饵带疾病的食饵-捕食者模型,研究了该系统的无病平衡点、地方病平衡点的随机稳定性。文献[5]研究了一类随机 SIRS 模型的种群灭绝性及分布稳定性质。

1 建立模型

本文在模型(1)的基础上加入随机干扰因素,假设易感者种群与感染者种群的接触后的感染率 β 受到一定强度的随机干扰,即 $\beta\to\sigma+\dot{B}(t)$,$B(t)$ 为标准布朗运动。所见模型如下:

* **收稿日期:**2014-03-07 **修回日期:**2015-03-11 **网络出版时间:**2015-9-28 12:16
资助项目:国家自然科学基金(No. 30971694)
作者简介:谭杨,男,讲师,研究方向为生物数学模型,E-mail:553129685@qq.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150928.1216.042.html

$$\begin{cases}\mathrm{d}S(t)=\left[rS(t)\left(1-\dfrac{S(t)+I(t)}{K}\right)-\beta S(t)I(t)\right]\mathrm{d}t-\sigma S(t)I(t)\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}I(t)=\left[\beta S(t)I(t)-cI(t)-\dfrac{b(1-m)I(t)Y(t)}{aY(t)+(1-m)I(t)}\right]\mathrm{d}t+\sigma S(t)I(t)\mathrm{d}B(t),\\ \mathrm{d}Y(t)=\left[-\mu Y(t)+\dfrac{pb(1-m)I(t)Y(t)}{aY(t)+(1-m)I(t)}\right]\mathrm{d}t。\end{cases}\tag{2}$$

模型具体参数与条件假设：

1）S,I,Y 分别表示易感食饵种群、感染食饵种群、捕食者种群；

2）假设食饵种群满足 Logistic 增长方式，内禀增长率为 r，且 r 与是否染病无关，即感染食饵种群不影响生育情况；

3）食饵种群中的疾病按照双线性发生率 $\beta S(t)I(t)$ 进行传染，且假设感染食饵无法恢复正常，食饵染病后的死亡率为 c；

4）假设感染食饵与易感食饵之间的传染率为 β，且受到一定强度的白噪声干扰，即 $\beta\to\beta+\sigma\dot{B}(t)$，其中 $\sigma>0$ 为干扰强度，$\dot{B}(t)$ 为标准布朗运动；

5）捕食者只捕食染病食饵，且捕食者不会被传染食饵所带疾病；

6）函数 $h(I,Y)=\dfrac{IY}{aY+I}$ 为捕食者对食饵的基于比率依赖的功能反应函数，$m\in[0,1)$ 表示庇护所对常数比例的食饵起到一定的保护作用。

2 模型(2)的解的存在、唯一性

用文献[9]中的方法可以验证方程(2)存在局部解，而该解有可能在有限时间发生爆炸。本节采用类似文献[5,10-11]的方法证明模型(2)的解不会发生爆炸，即全局存在。

引理 1[9]　不等式 $au\leqslant 2(au+1-\ln(au))-(4-2\ln 2)$ 成立，$\forall a>0,u>0$。

定理 1　对任意给的初值 $(S(0),I(0),Y(0))\in\mathbf{R}_+^3$，模型(2)存在唯一解 $(S(t),I(t),Y(t))$，且该解依概率 1 存在于 $\mathbf{R}_+^3$ 中。

证明　设 $k_0>0$ 足够大，使得 $(S(0),I(0),Y(0))\in[1/k_0,k_0]$。对任意整数 $k\geqslant k_0$，定义停时 $\tau_k=\inf\{t\in[0,\tau_e):S(t),I(t),Y(t)\notin(1/k,k)\}$，其中 $\inf\varnothing=\infty$（$\varnothing$ 表示空集）。显然当 $k\to\infty$ 时 τ_k 不减。设 $\tau_\infty=\lim\limits_{k\to\infty}\tau_k$，$\tau_\infty\leqslant\tau_k$ a. s. 若能证明 $\tau_\infty=\infty$ a. s. 且 $(S(t),I(t),Y(t))\in\mathbf{R}_+^3$ a. s. $t>0$。否则，存在 $T>0$ 与 $\varepsilon\in(0,1)$ 使得

$$P(\tau_\infty\leqslant T)>\varepsilon,$$

则存在 $k_1\geqslant k_0$ 使得对任意 $k\geqslant k_1$ 有

$$P(\tau_k\leqslant T)\geqslant\varepsilon,\tag{3}$$

另外，对任意 $t\in[0,\tau_e)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}(S+I)}{\mathrm{d}t}=rS\left(1-\frac{S+I}{K}\right)-cI-\frac{b(1-m)IY}{aY+(1-m)I}\leqslant\max\left\{0,r(S+I)\left(1-\frac{S+I}{K}\right)\right\},$$

则由比较定理可得

$$S(t)+I(t)\leqslant\max\left\{S(0)+I(0),\frac{K(S(0)+I(0))\mathrm{e}^{rt}}{(\mathrm{e}^{rt}-1)(S(0)+I(0))+K}\right\}:=M_1。\tag{4}$$

再由假设 3)，则有 $S(t)+I(t)\leqslant M_1,t\in[0,\tau_e)$。

定义 $V=V_1+V_2+\dfrac{V_3}{p}$，$V_1=S+1-\ln S$，$V_2=I+1-\ln I$，$V_3=Y+1-\ln Y$。

由 Itô 引理有

$$\mathrm{d}V_1=\left(1-\frac{1}{S}\right)S\left\{\left[r\left(1-\frac{S+I}{K}\right)-\beta I\right]\mathrm{d}t-\sigma I\mathrm{d}B(t)\right\}+\frac{\sigma^2}{2}I^2\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\left[\left(r+\frac{r}{K}\right)S+\left(\beta+\frac{r}{K}\right)I+\frac{\sigma^2}{2}I^2-\beta SI\right]\mathrm{d}t-\sigma(S-1)I\mathrm{d}B(t),$$

$$\mathrm{d}V_2=\left(1-\frac{1}{I}\right)I\left[\left(\beta S-c-\frac{b(1-m)Y}{aY+(1-m)I}\right)\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}B(t)\right]+\frac{\sigma^2}{2}S^2\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\left(\beta SI+c+\frac{b(1-m)}{a}-\frac{b(1-m)Y}{aY+(1-m)I}+\frac{\sigma^2}{2}S^2\right)\mathrm{d}t+\sigma(I-1)S\mathrm{d}B(t),$$

$$\mathrm{d}V_3=\left(1-\frac{1}{Y}\right)Y\left(-\mu+\frac{pb(1-m)I}{aY+(1-m)I}\right)\mathrm{d}t\leqslant\left(pbY+\mu+\frac{pb(1-m)IY}{aY+(1-m)I}\right)\mathrm{d}t,$$

则

$$\mathrm{d}V\leqslant\left[\left(r+\frac{r}{K}\right)S+\left(\beta+\frac{r}{K}\right)I+bY+c+\frac{\mu}{p}+\frac{b(1-m)}{a}+\frac{\sigma^2}{2}(S^2+I^2)\right]\mathrm{d}t-$$

$$\sigma(S-1)I\mathrm{d}B(t)+\sigma(I-1)S\mathrm{d}B(t)\leqslant$$

$$\left[\left(r+\frac{r}{K}\right)S+\left(\beta+\frac{r}{K}\right)I+bY+c+\frac{\mu}{p}+\frac{b(1-m)}{a}+\frac{\sigma^2}{2}M_1^2\right]\mathrm{d}t-$$

$$\sigma(S-1)I\mathrm{d}B(t)+\sigma(I-1)S\mathrm{d}B(t)。$$

令

$$c_1=2\max\left\{r+\frac{r}{K},\beta+\frac{r}{K},pb\right\},$$

由引理1得

$$\left(r+\frac{r}{K}\right)S+\left(\beta+\frac{r}{K}\right)I+bY\leqslant2\left(r+\frac{r}{K}\right)V_1+2\left(\beta+\frac{r}{K}\right)V_2+2pb\frac{V_3}{p}\leqslant c_1V。$$

令 $c_2=c+\frac{\mu}{p}+\frac{b(1-m)}{a}+\frac{1}{2}\sigma^2K^2$,取 $c_3=\max\{c_1,c_2\}$,则有

$$\mathrm{d}V\leqslant c_3(1+V)\mathrm{d}t+\sigma[(I-1)S-(S-1)I]\mathrm{d}B(t),$$

当 $t_1\leqslant T$ 时,对上式两边从0到 $t_1\wedge\tau_k$ 积分并取期望得

$$EV(x(t_1\wedge\tau_k))\leqslant V(0)+E\int_0^{t_1\wedge\tau_k}c_3(1+V(x(t)))\mathrm{d}t\leqslant V(0)+c_3t_1+c_3E\int_0^{t_1\wedge\tau_k}V(x(t))\mathrm{d}t\leqslant$$

$$V(0)+c_3T+c_3\int_0^{t_1}EV(x(t_1\wedge\tau_k))\mathrm{d}t,$$

再由Gronwall不等式有

$$EV(x(T\wedge\tau_k))\leqslant(V(0)+c_3T)\mathrm{e}^{c_3T}。\tag{5}$$

设 $\Omega_k=\{\tau_k\leqslant T\}$,$k\geqslant k_1$,则 $P(\Omega_k)\geqslant\varepsilon$。对每一个 $\omega\in\Omega_k$,$S(\tau_k,\omega)$,$I(\tau_k,\omega)$ 或 $Y(\tau_k,\omega)$ 等于 k 或 $1/k$,所以 $V(S(\tau_k,\omega)I(\tau_k,\omega)Y(\tau_k,\omega))$ 不小于 $\min\{k+1-\ln k,1/k+1-\ln(1/k)\}:=M_2$,则由(3)式与(5)式有

$$(V(0)+c_3T)\mathrm{e}^{c_3T}\geqslant E[1_{\Omega_k}(\omega)V(\tau_k,\omega)]\geqslant\varepsilon M_2,$$

其中 1_{Ω_k} 为 Ω_k 的指示函数。令 $k\to\infty$ 有

$$\infty>(V(0)+c_3T)\mathrm{e}^{c_3T}=\infty,$$

因此有 $P(\tau_\infty=\infty)=1$。 证毕

3 模型(2)的解的有界性

在生态流行病学理论中,系统的有界性意味着该系统符合生物学行为,下面说明了模型的有界性。

对于模型(2)的解的有界性,由定理1证明中的(4)式可知,对任意的 $t\geqslant0$,

$$S(t)+I(t)\leqslant\max\left\{S(0)+I(0),\frac{K(S(0)+I(0))\mathrm{e}^{rt}}{(\mathrm{e}^{rt}-1)(S(0)+I(0))+K}\right\}:=M_1。$$

另外,对捕食者种群 $Y(t)$ 有

$$\mathrm{d}Y(t)=\left[-\mu Y(t)+\frac{pb(1-m)I(t)Y(t)}{aY(t)+(1-m)I(t)}\right]\mathrm{d}t\leqslant(-\mu Y(t)+pb(1-m)M_1)\mathrm{d}t,$$

由比较定理有易知

$$Y(t)\leqslant\left(Y(0)-\frac{pb(1-m)M_1}{\mu}\right)\mathrm{e}^{-\mu t}+\frac{pb(1-m)M_1}{\mu}\leqslant\max\left(Y(0),\frac{pb(1-m)M_1}{\mu}\right),$$

即捕食者种群有界。

4 系统(2)围绕平衡点 $E_1=(K,0,0)$ 的稳定性

对于模型(2)，点 $E_1=(K,0,0)$ 是系统(1)与(2)的无病平衡点，文献[4]研究了确定性系统(1)在该点的稳定性，下面研究随机系统(2)在该平衡点的稳定性。

引理 2[9]　若存在正向无界的函数 $V(x,t)\in C^{3,1}(\mathbf{R}^3\times[t_0,\infty];\mathbf{R}_+,t_0>0)$ 使得 $LV(x,t)$ 负定，则系统(2)的平衡点是随机全局渐近稳定的。

定理 2　$(S(t),I(t),Y(t))$ 为方程(2)的解，初值为 $(S(0),I(0),Y(0))\in\mathbf{R}^3_+$。若如下条件 $c-\beta K-\dfrac{M_1\beta\sigma^2K^2}{2(r+\beta K)}\geqslant 0$ 成立，则系统(2)的平衡点是随机全局渐近稳定的。

证明　定义 $V:\mathbf{R}^3_+\to\mathbf{R}_+$，$V=c_4\left(S-K-K\ln\dfrac{S}{K}\right)+pI+Y$，其中 $c_4>0$ 为待定正常数。则由 Itô 引理有

$$LV=c_4\left\{\left(1-\frac{K}{S}\right)S\left[r\left(1-\frac{S+I}{K}\right)-\beta I\right]+\frac{K\sigma^2}{2}I^2\right\}+pI\left(\beta S-c-\frac{b(1-m)Y}{aY+(1-m)I}\right)+Y\left(-\mu+\frac{pb(1-m)I}{aY+(1-m)I}\right)=$$

$-\dfrac{c_4r}{K}(S-K)^2-\left[c_4\left(\dfrac{r}{K}+\beta\right)-p\beta\right]SI+[c_4(r+K\beta)-cp]I+\dfrac{c_4K\sigma^2}{2}I^2-\mu y$。令 $c_4=\dfrac{p\beta K}{r+\beta K}$ 使得 $c_4\left(\dfrac{r}{K}+\beta\right)-p\beta=0$，则 $c_4(r+K\beta)-cp=p(\beta K-c)$。又 $I\leqslant M_1$，于是

$$LV\leqslant-\frac{p\beta r}{r+\beta K}(S-K)^2-p\left(c-\beta K-\frac{M_1\beta\sigma^2K^2}{2(r+\beta K)}\right)I-\mu Y,$$

即当 $c-\beta K-\dfrac{M_1\beta\sigma^2K^2}{2(r+\beta K)}\geqslant 0$ 时，由引理 2 可知，系统(2)的平衡点 $E_1=(K,0,0)$ 是随机全局渐近稳定的。　证毕

注　1)由于捕食者仅能捕食受感染食饵，则当感染种群 $I(t)\to 0$ 时，必有捕食者种群 $Y(t)\to 0$，这样情形下，感染种群与捕食者种群均趋于灭绝，原系统只剩下易感食饵种群；2)条件 $c-\beta K-\dfrac{\sigma^2K^3}{2(r+\beta K)}\geqslant 0$ 与庇护效应系数 m 无关，该条件并未反映出系统是否具备庇护所效应，该条件较粗。

5 模型(2)的解的其他渐近性质

容易看出，当 $K\beta r-cr>0$ 时，点 $\bar{E}=(\bar{S},\bar{I},0)$ 是确定性系统(1)的平衡点，其中 $\bar{S}=\dfrac{c}{\beta}$，$\bar{I}=\dfrac{K\beta r-cr}{K\beta^2}$，而该点并不是相应随机系统(2)的平衡点。本节研究模型(2)的解围绕确定性模型(1)的平衡点 $\bar{E}=(\bar{S},\bar{I},0)$ 的渐近行为。

定理 3　设 $K\beta r-cr>0$ 与 $d-pb>0$ 成立。则对任意初值 $(S(0),I(0),Y(0))\in\mathbf{R}^3_+$，模型(2)的解满足如下性质

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t[(S(u)-\bar{S})^2+(I(u)-\bar{I})^2+Y^2(u)]\,\mathrm{d}u\leqslant\frac{D}{M},$$

其中，$D=\dfrac{1}{2}\sigma^2K^2(\bar{S}+a_2\bar{I})+\dfrac{b(1-m)\bar{I}}{a}$，$M=\min\left\{\dfrac{r}{2K},\dfrac{c_7c}{4},\dfrac{(\mu-pb)}{2}\right\}$，$c_5=\dfrac{K\beta}{r+K\beta}$，$c_7$ 满足 $c_7\left[r+\dfrac{r\bar{I}}{K}+\dfrac{(Kr-Kc-3r\bar{S}-r\bar{I})^2}{2K^2c}\right]-\dfrac{r}{K}=-\dfrac{r}{2K}$。

证明　定义 $V(S,I,Y)=V_1+V_2+V_3+V_4$，其中，$V_1=S-\bar{S}-\bar{S}\ln\dfrac{S}{\bar{S}}$，$V_2=c_5\left(I-\bar{I}-\bar{I}\ln\dfrac{I}{\bar{I}}\right)$，$V_3=\dfrac{c_6}{2}Y^2$，$V_4=\dfrac{c_7}{2}(S-\bar{S}+I-\bar{I})^2$。由 Itô 引理有

$$\mathrm{d}V_1=\left\{\left(1-\frac{\bar{S}}{S}\right)S\left[r\left(1-\frac{S+I}{K}\right)-\beta I\right]+\frac{1}{2}\bar{S}\sigma^2I^2\right\}\mathrm{d}t-\sigma(S-\bar{S})I\mathrm{d}B(t)=$$

$$\left[-\frac{r}{K}(S-\bar{S})^2-\left(\frac{r}{K}+\beta\right)(S-\bar{S})(I-\bar{I})+\frac{1}{2}\bar{S}\sigma^2I^2\right]\mathrm{d}t-\sigma(S-\bar{S})I\mathrm{d}B(t),$$

$$\mathrm{d}V_2=\left[c_5\left(1-\frac{\bar{I}}{I}\right)I\left(\beta S-c-\frac{b(1-m)Y}{aY+(1-m)I}\right)+\frac{1}{2}c_5\bar{I}\sigma^2S^2\right]\mathrm{d}t+c_5\sigma(I-\bar{I})S\mathrm{d}B(t)\leqslant$$

$$c_5\left[\beta(S-\bar{S})(I-\bar{I})+\frac{b(1-m)\bar{I}}{a}+\frac{1}{2}\bar{I}\sigma^2S^2\right]\mathrm{d}t+c_5\sigma(I-\bar{I})S\mathrm{d}B(t),$$

$$\mathrm{d}V_3=c_6\left(-\mu+\frac{pb(1-m)I}{aY+(1-m)I}\right)Y^2\mathrm{d}t\leqslant-c_6(\mu-pb)Y^2\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}V_4=c_7(S-\bar{S})(I-\bar{I})\left[rS\left(1-\frac{S+I}{K}\right)-\frac{b(1-m)IY}{aY+(1-m)I}-cI\right]\mathrm{d}t=$$

$$c_7(S-\bar{S})(I-\bar{I})\left[r(S-\bar{S})-c(I-\bar{I})-\frac{r(S^2-\bar{S}^2)}{K}-\frac{r(SI-\bar{S}\bar{I})}{K}-\frac{b(1-m)IY}{aY+(1-m)I}\right]\mathrm{d}t,$$

又因为

$$S(S-\bar{S})(I-\bar{I})=[I(S-\bar{S})^2-\bar{I}(S-\bar{S})^2+\bar{S}(S-\bar{S})(I-\bar{I})],$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V_4}{\mathrm{d}t}\leqslant c_7\left\{\left(r-\frac{r\bar{S}}{K}-\frac{3r\bar{I}}{K}\right)(S-\bar{S})^2-c(I-\bar{I})^2-\frac{b(1-m)IY}{aY+(1-m)I}(I-\bar{I})+\right.$$

$$\left.\left(r-c-\frac{3r\bar{S}}{K}-\frac{r\bar{I}}{K}\right)(S-\bar{S})(I-\bar{I})-\frac{b(1-m)IY}{aY+(1-m)I}(S-\bar{S})\right\},$$

又

$$\left(r-c-\frac{3r\bar{S}}{K}-\frac{r\bar{I}}{K}\right)(S-\bar{S})(I-\bar{I})\leqslant\frac{(Kr-Kc-3r\bar{S}-r\bar{I})^2}{2K^2c}(S-\bar{S})^2+\frac{c}{2}(I-\bar{I})^2,$$

$$-\frac{c_7b(1-m)IY}{aY+(1-m)I}(S-\bar{S})\leqslant\frac{c_7b(1-m)I}{aY+(1-m)I}\left[\frac{r\bar{S}}{bK}(S-\bar{S})^2+\frac{bK}{4r\bar{S}}Y^2\right]\leqslant\left[\frac{r\bar{S}}{K}(S-\bar{S})^2+\frac{b^2K}{4r\bar{S}}Y^2\right],$$

$$-\frac{c_7b(1-m)IY}{aY+(1-m)I}(I-\bar{I})\leqslant\frac{c_7b(1-m)I}{aY+(1-m)I}\left[\frac{c}{4b}(I-\bar{I})^2+\frac{b}{c}Y^2\right]\leqslant c_7\left[\frac{c}{4}(I-\bar{I})^2+\frac{b^2}{c}Y^2\right],$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}V_4}{\mathrm{d}t}\leqslant c_7\left\{\left[r-\frac{3r\bar{I}}{K}+\frac{(Kr-Kc-3r\bar{S}-r\bar{I})^2}{2K^2c}\right](S-\bar{S})^2-\frac{c}{4}(I-\bar{I})^2+\left(\frac{b^2}{c}+\frac{b^2K}{4r\bar{S}}\right)Y^2\right\}。$$

令 $\beta-c_5\left(\frac{r}{K}+\beta\right)=0$,即 $c_5=\frac{K\beta}{r+K\beta}$,则

$$LV\leqslant\left\{c_7\left[r-\frac{3r\bar{I}}{K}+\frac{(Kr-Kc-3r\bar{S}-r\bar{I})^2}{2K^2c}\right]-\frac{r}{K}\right\}(S-\bar{S})^2-\frac{c_7c}{4}(I-\bar{I})^2-$$

$$\left[c_6(\mu-pb)-c_7\left(\frac{b^2}{c}+\frac{b^2K}{4r\bar{S}}\right)\right]Y^2+\frac{1}{2}\bar{S}\sigma^2M_1^2+\frac{b(1-m)\bar{I}}{a}+\frac{1}{2}c_5\bar{I}\sigma^2M_1^2,$$

易知可以取到 c_7,使得 $c_7\left[r+\frac{r\bar{I}}{K}+\frac{(Kr-Kc-3r\bar{S}-r\bar{I})^2}{2K^2c}\right]-\frac{r}{K}=-\frac{r}{2K}$,取定 c_7 后,当 $\mu-pb>0$ 时,可取 c_6,使其满足$\left[c_6(\mu-pb)-c_7\left(\frac{b^2}{c}+\frac{b^2K}{4r\bar{S}}\right)\right]=\frac{\mu-pb}{2}$。

则有

$$\mathrm{d}V\leqslant\left[-\frac{r}{2K}(S-\bar{S})^2-\frac{c_7c}{4}(I-\bar{I})^2-\frac{(\mu-pb)}{2}Y^2+D\right]\mathrm{d}t+M(t),\tag{6}$$

其中 $D=\frac{1}{2}\sigma^2M_1^2(\bar{S}+c_5\bar{I})+\frac{b(1\text{-}m)\bar{I}}{a}$,$M(t)=-\sigma(S-\bar{S})I\mathrm{d}B(t)+c_5\sigma(I-\bar{I})S\mathrm{d}B(t)$。

对上式(6)两边从 0 到 t 积分并取期望,得

$$0\leqslant EV\leqslant E(V(0))-E\int_0^t\left[\frac{r}{2K}(S(u)-\bar{S})^2+\frac{c_7c}{4}(I(u)-\bar{I})^2+\frac{(\mu-pb)}{2}Y^2(u)\right]\mathrm{d}u+Dt,$$

即有

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t\left[\frac{r}{2K}(S(u)-\bar{S})^2+\frac{c_7c}{4}(I(u)-\bar{I})^2+\frac{(d-pb)}{2}Y^2(u)\right]\mathrm{d}u\leqslant D,$$

令 $M=\min\left\{\frac{r}{2K},\frac{c_7c}{4},\frac{(\mu-pb)}{2}\right\}$,则

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}E\int_0^t[(S(u)-\bar{S})^2+(I(u)-\bar{I})^2+Y^2(u)]\mathrm{d}u\leqslant\frac{D}{M}。$$

证毕

参考文献:

[1] Collings J B. Bifurcation and stability analysis of temperatures dependent mite predator-prey interaction model incorporating a prey refuges[J]. Bull Math Biol,1995,57(1):63-76.

[2] Hausrath A. Analysis of a model predator-prey system with refuges[J]. Math Anal Appl,1994,181(2):531-545.

[3] Huang Y J,Chen F D,Li Z. Stability analysis of a prey-predator model with Holling type III reponse function incorporating a prey refuges[J]. Applied Mathematics and Computation,2006,182(1):672-683.

[4] Pal A K,Samanta G P. Stability analysis of an eco-epidemiological model incorporating a prey refuge[J]. Nonlinear Anal Model Control,2010,15(4):473-491.

[5] 郭子君. 基于比率依赖的两种群捕食者-食饵系统的随机模型[J]. 中山大学学报:自然科学版,2010,49(2):48-53.
Guo Z J. A stochastic models on predator-prey system of two species with ratio-dependence[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni,2010,49(2):48-53.

[6] 史超,谭杨,郭子君. 基于比率依赖的两种群捕食者-食饵系统的随机模型的渐近性质[J]. 中山大学学报:自然科学版,2013,52(3):67-72.
Shi C,Tan Y,Guo Z J. Asymptotic behavior of a stochastic models on predator-prey system of two species with ratio-dependence[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni,2013,52(2):67-72.

[7] Mukherjee D. Stability analysis of a stochastic model for prey-predator system with disease in the prey[J]. Nonlinear Anal Model Control,2003,8(2):83-92,95.

[8] Lahrouz A,Omari L. Extinction and stationary distribution of a stochastic SIRS epidemic model with non-linear incidence[J]. Statustics & Probability Letters,2013,83(4):960-968.

[9] Mao X. Stochastic differential equations and applications[M]. Horwood:Chichester,1997.

[10] Mao X,Marion G,Renshaw E. Environmental noise suppresses explosion in population dynamics[J]. Stochastic Process Appl,2002,97(1):95-110.

[11] Dalal N,Greenhalgh D,Mao X. A stochastic model for internal HIV dynamics[J]. J Math Anal Appl,2008,341:1084-1101.

Asymptotic Behavior of a Stochastic Model on Predator-prey System with Refuge and Disease in the Prey

TAN Yang[1], TIAN Jiagui[2], GUO Zijun[3]

(1. Tongren Polytechnic College Tongren Guizhou 554300;

2. Tongren No. 3 Middle School, Tongren Guizhou 554300;

3. Institute of Applied Mathematics, SouthNChina Agricultural University Guangzhou 510642, China)

Abstract: A stochastically mathematical model of prey using refuges in a predator-prey system with disease in the prey population was proposed and analyzed. First showed that the model has a unique global positive solution by using stopping time and Ito formula, that is to say the solution of the model will not explode to infinite in a finite time. In addition, the global stability of the disease-free equilibrium, the conclusion showed that the infected prey and predator population will be extinction under some condition; the susceptible prey population will keep on the value K (the environmental carrying capacity). At last, the asymptotic behavior around the other equilibrium of the deterministic system was examined that was not the equilibrium of the stochastic system.

Key words: predator-prey model; refuge effect; random disturbance; stochastic global stability

(责任编辑 游中胜)