DOI:10.11721/cqnuj20150608

非奇异 H-矩阵的参数改进迭代判定法*

肖 丽 霞
(内蒙古民族大学 数学学院,内蒙古 通辽 028043)

摘要:非奇异 H-矩阵是一类应用广泛的特殊矩阵。利用广义严格 α-链对角占优矩阵的定义及性质,根据矩阵自身元素、行和以及列和,提出了含参数 α 的迭代公式,推广和改进了已有的相关结果,并通过数值算例说明了结果的优越性。

关键词:非奇异 H-矩阵;α-链对角占优矩阵;正对角矩阵;迭代法
中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)06-0094-04

1 基本定义

非奇异 H-矩阵是一类被广泛应用于数值代数、控制论、经济数学等领域的特殊矩阵。对非奇异 H-矩阵使用直接法或迭代法进行判别一直以来都是重要的研究课题,并已取得了一定的研究成果[1-8]。本文根据广义严格 α-链对角占优矩阵的定义及其性质,对文献[1]的迭代算法进行了推广和改进,得到了含参数 α 的迭代公式,并通过数值算例说明了结果的优越性。设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$ 为 n 阶复(实)方阵,$N=\{1,2,\cdots,n\}$,记 $R_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$,$Q_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ji}|$,$i\in N$。

若 $\forall i\in N$,$|a_{ii}|>R_i(\boldsymbol{A})$成立,那么 $\boldsymbol{A}$ 被称为严格对角占优矩阵,记为 $\boldsymbol{A}\in D$;若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{AX}\in D$成立,那么 $\boldsymbol{A}$ 被称为广义严格对角占优矩阵,记为 $\boldsymbol{A}\in D^*$。

定义 1[2]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$,若存在 $\alpha\in[0,1]$,使 $\forall i\in N$,$|a_{ii}|>R_i(\boldsymbol{A})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A})^{1-\alpha}$成立,则称 $\boldsymbol{A}$ 为严格 α-链对角占优矩阵,记为 $\boldsymbol{A}\in D(\alpha)$。

定义 2[2]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$,若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{AX}\in D(\alpha)$成立,则称 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格 α-链对角占优矩阵,记为 $\boldsymbol{A}\in D^*(\alpha)$。

文献[1]中提出如下迭代算法:

算法 1[1]　输入:已知矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \mathbf{C}^{n\times n}$和任意正数 ε。

输出:对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}^{(1)}\boldsymbol{D}^{(2)}\cdots\boldsymbol{D}^{(m)}\in D_A$,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H-矩阵。

1) 若 $\exists i\in N$,$a_{ii}=0$ 或 $N_1'(\boldsymbol{A})=\varnothing$,输出"$\boldsymbol{A}$ 不是非奇异 H-矩阵",停止;否则继续执行;

2) 令 $\boldsymbol{A}^{(0)}=\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{D}^{(0)}=\boldsymbol{I}$,$m=1$;

3) 计算 $\boldsymbol{A}^{(m)}=\boldsymbol{A}^{(m-1)}\boldsymbol{D}^{(m-1)}=(a_{ij}^{(m)})$;

4) 若 $N_1'(\boldsymbol{A}^{(m)})=N$,输出"$\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H-矩阵",停止;否则继续执行;

5) 令 $d=(d_i)$,计算 $d_i=\begin{cases}1-\dfrac{|a_{ii}^{(m)}|-R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})}{|a_{ii}^{(m)}|+\varepsilon},i\in N_1'(\boldsymbol{A}^{(m)}),\\ 1,i\in N_2'(\boldsymbol{A}^{(m)});\end{cases}$

6) 令 $\boldsymbol{D}^{(m)}=\mathrm{diag}(d)$,$m=m+1$,转到步骤 3)。

注 1　其中记:$N_1'(\boldsymbol{A})=\{i\in N,|a_{ii}|>R_i(\boldsymbol{A})\}$,$N_2'(\boldsymbol{A})=\{i\in N,0<|a_{ii}|\leqslant R_i(\boldsymbol{A})\}$。

2 主要结果

算法 1 的结果与 ε 的选取有关,ε 的值为迭代执行前已被确定的常数,不会根据每次迭代执行的情况进行调

* **收稿日期**:2014-07-22　　**修回日期**:2015-05-02　　**网络出版时间**:2015-9-28 12:16
资助项目:国家自然科学基金(No.11361038);内蒙古民族大学科学研究基金资助项目(No.NMDYB1438)
作者简介:肖丽霞,讲师,研究方向为数值代数,E-mail:xiaolixia616@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20150928.1216.036.html

整，且很难预先选出迭代效果较好的 ε。算法 2 在这方面进行了改进，去掉了参数 ε。根据定义，若 $\boldsymbol{A}\in D(\alpha)$，则当 $\alpha=1$ 时，$\boldsymbol{A}\in D$，即严格 α-链对角占优矩阵定义的条件弱于严格对角占优矩阵定义的条件。利用此点，本文将算法 1 的迭代法推广到更一般的含参数 α 的情况，并引进如下符号：

$$N_1(\boldsymbol{A})=\{i\in N,|a_{ii}|>R_i(\boldsymbol{A})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A})^{1-\alpha}\},N_2(\boldsymbol{A})=\{i\in N,0<|a_{ii}|\leqslant R_i(\boldsymbol{A})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A})^{1-\alpha}\}。$$

算法 2　输入：已知矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，参数 $\alpha\in[0,1]$。

输出：对角矩阵 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{(0)}\boldsymbol{X}^{(1)}\cdots\boldsymbol{X}^{(m-1)}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H-矩阵。

1）若 $\exists i\in N,a_{ii}=0$，输出"$\boldsymbol{A}$ 不是非奇异 H-矩阵"，停止；否则，继续执行；

2）令 $m=0,\boldsymbol{A}^{(0)}=\boldsymbol{A}$；

3）若 $N_2(\boldsymbol{A}^{(m)})=\varnothing$，输出"$\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H-矩阵"，停止；否则，继续执行；

4）令 $x^{(m)}=(x_i^{(m)})$，计算 $x_i^{(m)}=\begin{cases}\dfrac{R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha}}{|a_{ii}^{(m)}|},i\in N_1(\boldsymbol{A}^{(m)}),\\ 1,i\in N_2(\boldsymbol{A}^{(m)});\end{cases}$

5）令 $\boldsymbol{X}^{(m)}=\mathrm{diag}(x^{(m)})$；

6）计算 $\boldsymbol{A}^{(m+1)}=\boldsymbol{A}^{(m)}\boldsymbol{X}^{(m)}=(a_{ij}^{(m+1)})$，$m=m+1$，转到步骤 3）。

引理 1[2]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H-矩阵的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}\in D^*(\alpha)$。

引理 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若对 $\forall\alpha\in[0,1]$，$N_1(\boldsymbol{A})=\varnothing$，则 $\boldsymbol{A}\notin D^*(\alpha)$。

证明　反证法。假设 $\boldsymbol{A}\in D^*(\alpha)$，则存在 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AX}\in D(\alpha)$，其中 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，$b_{ij}=a_{ij}x_j$，则 $\forall i\in N$，有 $|b_{ii}|>R_i(\boldsymbol{B})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{B})^{1-\alpha}$，$|a_{ii}|x_i>\Big(\sum\limits_{t\in N,\neq i}|a_{it}|x_t\Big)^{\alpha}\Big(\sum\limits_{t\in N,\neq i}|a_{ti}|x_i\Big)^{1-\alpha}$。

令 $x_k=\min\limits_{i\in N}\{x_i\}$，当 $i=k$ 时，

$$|a_{kk}|x_k>\Big(\sum_{t\in N,\neq k}|a_{kt}|x_t\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{t\in N,\neq k}|a_{tk}|x_k\Big)^{1-\alpha}\geqslant\Big(\sum_{t\in N,\neq k}|a_{kt}|x_k\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{t\in N,\neq k}|a_{tk}|x_k\Big)^{1-\alpha},$$

可得 $|a_{kk}|>\Big(\sum\limits_{t\in N,\neq k}|a_{kt}|\Big)^{\alpha}\Big(\sum\limits_{t\in N,\neq k}|a_{tk}|\Big)^{1-\alpha}=R_k(\boldsymbol{A})^{\alpha}Q_k(\boldsymbol{A})^{1-\alpha}$，因此 $k\in N_1(\boldsymbol{A})$，$N_1(\boldsymbol{A})\neq\varnothing$，与已知矛盾，假设不成立。　　证毕

引理 3[3]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H-矩阵的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}\in D^*$。

引理 4[4]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{AX}\in D^*$ 成立，则 $\boldsymbol{A}\in D^*$。

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H-矩阵的充分必要条件为存在 $\alpha\in[0,1]$，使算法 2 迭代有限次产生一个严格 α-链对角占优矩阵后并停止。

证明　充分性。假设算法 2 迭代 m 次产生一个严格 α-链对角占优矩阵 $\boldsymbol{A}^{(m)}=(a_{ij}^{(m)})$ 后停止，由 $\boldsymbol{A}^{(m)}=\boldsymbol{A}^{(m-1)}\boldsymbol{X}^{(m-1)}$ 递推得

$$\boldsymbol{A}^{(m)}=\boldsymbol{AX}^{(0)}\boldsymbol{X}^{(1)}\cdots\boldsymbol{X}^{(m-1)}=\boldsymbol{AF}^{(m)},\tag{1}$$

这里 $\boldsymbol{F}^{(m)}=\boldsymbol{X}^{(0)}\boldsymbol{X}^{(1)}\cdots\boldsymbol{X}^{(m-1)}$ 是一个正对角矩阵，则 $\boldsymbol{A}\in D^*(\alpha)$，由引理 1 可知，$\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H-矩阵。

必要性。反证法。已知 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵，假设不存在 $\alpha\in[0,1]$，使算法 2 迭代有限次后停止，即对 $\forall\alpha\in[0,1]$，算法 2 迭代无限次，且生成无穷序列：$\{\boldsymbol{A}^{(m)}\}$，$\{a_{ii}^{(m)}\}$，$\{N_1(\boldsymbol{A}^{(m)})\}$，$\{\boldsymbol{X}^{(m)}\}$。令 $m=0,1,\cdots$，由算法 2 步 4），$\forall i\in N_1(\boldsymbol{A}^{(m)})$，$x_i^{(m)}=\dfrac{R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha}}{|a_{ii}^{(m)}|}$，则 $0<x_i^{(m)}<1$，$\forall i\in N_1(\boldsymbol{A}^{(m)})$，因此 $0<x_i^{(m)}\leqslant 1$，$\forall i\in N$，又因为 $a_{ij}^{(m)}=a_{ij}^{(m-1)}x_j^{(m-1)}$，所以对 $\forall i\in N_1(\boldsymbol{A}^{(m)})$，得

$$\begin{aligned}|a_{ii}^{(m+1)}|&=|a_{ii}^{(m)}|x_i^{(m)}=|a_{ii}^{(m)}|\frac{R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha}}{|a_{ii}^{(m)}|}=R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha}=\\&\Big(\sum_{t\in N,\neq i}|a_{it}^{(m)}|\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{t\in N,\neq i}|a_{ti}^{(m)}|\Big)^{1-\alpha}>\Big(\sum_{t\in N,\neq i}|a_{it}^{(m)}|x_t^{(m)}\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{t\in N,\neq i}|a_{ti}^{(m)}|x_i^{(m)}\Big)^{1-\alpha}=\\&\Big(\sum_{t\in N,\neq i}|a_{it}^{(m+1)}|\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{t\in N,\neq i}|a_{ti}^{(m+1)}|\Big)^{1-\alpha}=R_i(\boldsymbol{A}^{(m+1)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m+1)})^{1-\alpha},\end{aligned}$$

即 $i\in N_1(\boldsymbol{A}^{(m+1)})$，则 $N_1(\boldsymbol{A}^{(m)})\subseteq N_1(\boldsymbol{A}^{(m+1)})$，递推得 $N_1(\boldsymbol{A})=N_1(\boldsymbol{A}^{(0)})\subseteq N_1(\boldsymbol{A}^{(1)})\subseteq\cdots\subseteq N_1(\boldsymbol{A}^{(m)})\subseteq\cdots$，因此存在一个最小的整数 l，使 $N_1(\boldsymbol{A}^{(l)})=N_1(\boldsymbol{A}^{(l+p)})$，$\forall p=0,1,2,\cdots$ 成立。不失一般性，令 $l=0,p=m$，并设

$$N_1(\boldsymbol{A}^{(m)})=N_1(\boldsymbol{A}^{(0)})=N_1(\boldsymbol{A})=\{1,2,\cdots,k\},k<n,m=0,1,\cdots。\tag{2}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{X}^{(m)}$ 的对角元素 $0<x_i^{(m)}\leqslant 1$，明显有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{(0)}\geqslant\boldsymbol{A}^{(1)}\geqslant\cdots\geqslant\boldsymbol{A}^{(m)}\geqslant\cdots\geqslant 0$，则无穷矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}^{(m)}\}$ 单调递减且有界，可得 $\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{A}^{(m)}=\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}^{(m)}=\boldsymbol{B}>0$，这里 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{F}=\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{F}_m$ 为正对角矩阵。由(1)式和(2)式知，$\boldsymbol{F}^{(m)}=\mathrm{diag}(f_1^{(m)},f_2^{(m)},\cdots,f_k^{(m)},1,1,\cdots,1)$，则 $\boldsymbol{F}=\mathrm{diag}(f_1,f_2,\cdots,f_k,1,1,\cdots,1)$，其中 $f_i=\lim\limits_{m\to\infty}f_i^{(m)}$，$i=1,2,\cdots,k$。

下面证明：$\forall\alpha\in[0,1]$，$\forall i\in N_1(\boldsymbol{A})$，$\lim\limits_{m\to\infty}(|a_{ii}^{(m)}|-R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha})=0$ 成立。

反证法。假设 $\exists\alpha\in[0,1]$，$\exists i\in N_1(\boldsymbol{A})$，使 $\lim\limits_{m\to\infty}(|a_{ii}^{(m)}|-R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha})\neq 0$ 成立，由(2)式知 $i\in N_1(\boldsymbol{A}^{(m)})$，$m=0,1,\cdots$，可得 $|a_{ii}^{(m)}|>R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha}$，则存在正数 ε_0，使 $|a_{ii}^{(m)}|-R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha}>\varepsilon_0$ 成立，则有

$$|a_{ii}^{(m+1)}|=|a_{ii}^{(m)}|x_i^{(m)}=|a_{ii}^{(m)}|\frac{R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha}}{|a_{ii}^{(m)}|}=R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha}=$$
$$|a_{ii}^{(m)}|-(|a_{ii}^{(m)}|-R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha})<|a_{ii}^{(m)}|-\varepsilon_0,$$

递推可得 $|a_{ii}^{(0)}|>|a_{ii}^{(1)}|+\varepsilon_0>\cdots>|a_{ii}^{(m)}|+m\varepsilon_0$。令 $m\to\infty$，则 $|a_{ii}^{(0)}|\to\infty$，与已知矛盾，所以假设不成立。可知 $\forall\alpha\in[0,1]$，$\forall i\in N_1(\boldsymbol{A})$，$\lim\limits_{m\to\infty}(|a_{ii}^{(m)}|-R_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{A}^{(m)})^{1-\alpha})=0$ 成立。由此 $\forall\alpha\in[0,1]$，有：

$$|b_{ii}|-R_i(\boldsymbol{B})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{B})^{1-\alpha}=0,\ \forall i\in N_1(\boldsymbol{A});\ |b_{ii}|-R_i(\boldsymbol{B})^{\alpha}Q_i(\boldsymbol{B})^{1-\alpha}\leqslant 0,\ \forall i\in N_2(\boldsymbol{A})。$$

即 $\forall\alpha\in[0,1]$，$N_1(\boldsymbol{B})=\varnothing$，根据引理2，$\boldsymbol{B}\notin D^*(\alpha)$，由引理1可知矩阵 $\boldsymbol{B}$ 不是非奇异 H-矩阵。

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵，可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^{-1}\in D^*$，其中 $\boldsymbol{F}^{-1}$ 为正对角矩阵，由引理4得，$\boldsymbol{B}\in D^*$，即矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为非奇异 H-矩阵，与上述结论矛盾，因此“不存在 $\alpha\in[0,1]$，使算法2迭代有限次后停止”的假设不成立。设算法2迭代 m 次停止，由算法步3)得，$N_2(\boldsymbol{A}^{(m)})=\varnothing$，$\boldsymbol{A}^{(m)}\in D(\alpha)$。因此，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异 H-矩阵，则存在 $\alpha\in[0,1]$，使算法2迭代有限的 m 次后产生一个严格 α-链对角占优矩阵 $\boldsymbol{A}^{(m)}$ 并停止。 证毕

3 数值算例

例1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&4&1\\1&5&2\\5&0&5\end{pmatrix}$，令 $\alpha=0.8$，使用算法2进行计算，$\boldsymbol{A}^{(0)}=\boldsymbol{A}$，$N_1(\boldsymbol{A}^{(0)})=\{2,3\}$，$N_2(\boldsymbol{A}^{(0)})=\{1\}$，$x_1^{(0)}=1.000\ 0$，$x_2^{(0)}=\dfrac{R_2(\boldsymbol{A}^{(0)})^{\alpha}Q_2(\boldsymbol{A}^{(0)})^{1-\alpha}}{|a_{22}^{(0)}|}=\dfrac{3^{0.8}\times 4^{0.2}}{5}=0.635\ 5$，$x_3^{(0)}=\dfrac{R_3(\boldsymbol{A}^{(0)})^{\alpha}Q_3(\boldsymbol{A}^{(0)})^{1-\alpha}}{|a_{33}^{(0)}|}=\dfrac{5^{0.8}\times 3^{0.2}}{5}=0.902\ 9$，$X^{(0)}=\mathrm{diag}(1.000\ 0,0.635\ 5,0.902\ 9)$，$\boldsymbol{A}^{(1)}=\boldsymbol{A}^{(0)}X^{(0)}=\begin{pmatrix}4.000\ 0&2.542\ 0&0.902\ 9\\1.000\ 0&3.177\ 5&1.805\ 8\\5.000\ 0&0.000\ 0&4.514\ 5\end{pmatrix}$，$N_1(\boldsymbol{A}^{(1)})=\{1,2,3\}$，$N_2(\boldsymbol{A}^{(1)})=\varnothing$，因此迭代1次可判定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 H-矩阵。若使用算法1判别需迭代3次。

例2 使用 Matlab 对算法1和算法2分别编程以实现对下列矩阵的验证，结果如表1。

表1 对算法1和算法2的验证结果

矩阵	算法1	算法2		验证结果
	迭代次数($\varepsilon=0.01$)	α	迭代次数	
$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}10&0&10&0\\6&4&0&1\\1&1&6&0\\1&0&0&2\end{pmatrix}$	3	0.4, 0.5, 0.6, 0.7	0	非奇异 H-矩阵
$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}3&1&0&-1\\1&-4&-1&1\\-1&-2&1.7&0\\2&1&0&-3\end{pmatrix}$	3	0.4, 0.5	1	非奇异 H-矩阵

续表 1

矩阵	算法 1 迭代次数(ε=0.01)	算法 2 α	算法 2 迭代次数	验证结果
$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}3&1&0&2\\1&2.5&19&0\\1&0&20&2\\1&1&1&10\end{pmatrix}$	3	0.1	1	非奇异 H-矩阵
$\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}3&2&2&1\\0.5&5&5&1\\0.5&1&9&9\\1&1&1&8.5\end{pmatrix}$	4	0.2，0.3，0.4	0	非奇异 H-矩阵
$\boldsymbol{A}_5=\begin{pmatrix}10&3&1&1&1\\9&9&1&1&0\\1&1&9&3&1\\1&1&6&8&1\\4&4&4&4&9\end{pmatrix}$	6	0.7	2	非奇异 H-矩阵

参考文献：

[1] Li B S，Li L，Harada M，et al. An iterative criterion for H-matrices[J]. Linear Algebra Appl，1998，271：179-190.

[2] Sun Y X. An improvement on a theorem by Ostrowski and its applications[J]. Northeastern Math J，1991，7(4)：497-502.

[3] 李继成，黄廷祝，雷广耀. H-矩阵的实用判定[J]. 应用数学学报，2003，26(3)：413-419.
Li J C，Huang T Z，Lei G Y. Practical criteria for H-matrices[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica，2003，26(3)：413-419.

[4] Berman A，Plemmons R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. Philadelphia：SIAM Press，1994.

[5] Berman A，Plemmons R J. Nonnegative matrix in the mathematical sciences[M]. New York：Academic Press，1979：26-62.

[6] Xie Q M，He A Q，Liu J Z. On the iterative criterion method for H-matrices[J]. Appl Math Comput，2007，190：1-5.

[7] 周伟伟，徐仲，陆全，等. 非奇 H -矩阵的迭代判定准则[J]. 工程数学学报，2013，30(5)：715-720.
Zhou W W，Xu Z，Lu Q，et al. Iterative codes for nonsingular H-matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics，2013，30(5)：715-720.

[8] 高慧敏，陆全，徐仲，等. 非奇 H-矩阵的一组细分迭代判定条件[J]. 数学杂志，2013，33(2)：329-337.
Gao H M，Lu Q，Xu Z，et al. A set of Subdividing and iterative criteria for nonsingular H-matrices[J]. J of Math，2013，33(2)：329-337.

An Improved Iterative Criterion with Parameter for Nonsingular H-matrices

XIAO Lixia

(School of Mathematics，Inner Mongolia University for the Nationalities，Tongliao Inner Monglia 028043，China)

Abstract：The nonsingular H-matrix is a special class of matrices with wide applications. In this paper，based on the concept and properties of the generalized strictly α-chain diagonal dominance matrices，according to the elements，row sums and column sums of the matrices，an iterative criterion with parameter α is provided，which extends and improves some related results. Some numerical examples are used to show the advantages of the result.

Key words：nonsingular H-matrix；α-chain diagonally dominant matrix；positive diagonal matrix；iterative method

(责任编辑　黄　颖)