2015 年 11 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Nov. 2015
第 32 卷 第 6 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 32 No. 6

DOI:10.11721/cqnuj20150609

对具有脉冲接种和分布时滞的 SEIR 传染病模型的定性分析*

许碧云，杨志春
(重庆师范大学 数学学院，重庆 401331)

摘要:脉冲免疫接种是一种很有效的控制传染病传播的方法,并且脉冲接种更接近现实生活中的实际情况。考虑了对所有的新生儿都进行脉冲接种,从而提出一类具有脉冲接种和分布时滞的 SEIR 传染病模型。然后,利用脉冲模型比较原理和分析技巧,获得系统无病周期的存在性,并利用脉冲比较原理得到了该模型的全局稳定性。最后,再次利用脉冲模型比较原理和振荡情形的讨论,从而获得模型的持久性。

关键词:传染病模型;分布时滞;周期解;吸引性;持续性
中图分类号:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2015)06-0098-05

传染病是有病毒、细菌等病原微生物和寄生虫感染人体后产生的具有传染性的疾病,给人类的生存带来了很多的危害,严重影响着人类的生活和社会经济。在疾病传播过程中,其爆发通常具有潜伏期,即出现时滞效应。近年来,具有时滞的传染病模型受到关注[1-3]。由于具有分布时滞的传染病模型表示在一个固定的时间段内染病者数量的累积,因而更贴近实际。如文献[4]建立一类具有分布时滞和饱和接触率的传染病模型。另一方面,对于像麻疹、乙肝、结核等传染病来说,采用脉冲接种是一种非常有效的控制疾病的策略[5]。这一理论最早是由 Auger 等人提出,随后被应用到不同类型的传染病模型中[6-10]。

在文献[4]的 SEIR 传染病模型的基础上,建立如下具有脉冲接种和分布时滞的 SEIR 传染病模型:

$$\begin{cases} S'(t)=-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha S(t)}+\mu(E(t)+R(t))+p\mu I(t)-k[\mu(S(t)+E(t)+R(t))+p\mu I(t)],t\neq nT,\\ E'(t)=\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha S(t)}-\beta\displaystyle\int_0^\tau f(s)S(t-s)I(t-s)e^{-\mu s}\mathrm{d}s+q\mu I(t)-\mu E(t),t\neq nT,\\ I'(t)=\beta\displaystyle\int_0^\tau f(s)S(t-s)I(t-s)e^{-\mu s}\mathrm{d}s-(\gamma+\mu)I(t),t\neq nT,\\ R'(t)=\gamma I(t)-\mu R(t)+k[\mu(S(t)+E(t)+R(t))+p\mu I(t)],t\neq nT,\\ S(t^+)=S(t)-m\mu(S(t)+E(t)+R(t))-pmI(t),t=nT,\\ E(t^+)=E(t),t=nT,\\ I(t^+)=I(t),t=nT,\\ R(t^+)=R(t)+m\mu(S(t)+E(t)+R(t))+pmI(t),t=nT。\end{cases} \tag{1}$$

其中 $S(t)$表示 t 时刻人群中易感者的数量,$E(t)$表示 t 时刻人群中潜伏者的数量,$I(t)$表示 t 时刻人群中染病者的数量,$R(t)$表示 t 时刻人群中恢复者的数量;μ 为人群的出生率与死亡率;γ 为染病者到恢复者的转移率;$0<k<1$为预防接种率;$p\mu I(t)$是 t 时刻出生的染病者的新生儿没有被垂直感染的数量($0<p<1$);$q\mu I(t)$是 t 时刻出生的染病者的新生儿被垂直感染后直接进入到潜伏者人群的数量($0<q<1$ 和 $p+q=1$);τ 是潜伏期,$m(0<m<1)$是转到易感染者的新生儿被成功接种的比例,$\dfrac{\beta}{1+\alpha S}$为饱和接触率系数;分布时滞传染率为 $\beta\int_0^\tau f(s)S(t-s)I(t-s)e^{-\mu s}\mathrm{d}s$,$f(t)$ 是非负的函数且满足$\int_0^\tau f(s)\mathrm{d}s=1$,$\int_0^\tau sf(s)\mathrm{d}s<\infty$ 。

由模型(1)式可得到 t 时刻人口总数 $N(t)=S(t)+E(t)+R(t)+I(t)$,满足 $N'(t)\equiv0(t\geqslant0)$,那么总的人口规模是一个常数,不失一般性,可设 $N(t)=1$,从而模型(1)的不变集为

* **收稿日期**:2014-12-01　　**修回日期**:2015-06-23　　**网络出版时间**:2015-9-28 12:16
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11471061);重庆市自然科学基金(No. CSTC2014jcyjA40004);重庆市高校创新团队资助计划(No. KJTD201308)
作者简介:许碧云,女,研究方向为微分方程及其应用,E-mail:791338349@qq.com;**通信作者**:杨志春,教授,E-mail:yangzhch@126.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20150928.1216.040.html

$$\Omega=\{(S,E,I,R)\in\mathbf{R}^4 \mid 0\leqslant S,E,I,R\leqslant 1,\text{且 } S+E+I+R=1\}。$$

基于生物意义，假设初始条件满足：

$$(\varphi_1(\theta),\varphi_2(\theta),\varphi_3(\theta),\varphi_4(\theta))\in C_+=C([-\tau,0],\mathbf{R}_+^4),\varphi_i(\theta)>0(i=1,2,3,4)。$$

在 Ω 内，模型(1)可以化简为如下形式：

$$\begin{cases}S'(t)=-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha S(t)}+(1-k)\mu-\mu S(t)-\mu q(1-k)I(t),t\neq nT,\\ E'(t)=\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha S(t)}-\beta\displaystyle\int_0^\tau f(s)S(t-s)I(t-s)e^{-\mu s}\mathrm{d}s+q\mu I(t)-\mu E(t),t\neq nT,\\ I'(t)=\beta\displaystyle\int_0^\tau f(s)S(t-s)I(t-s)e^{-\mu s}\mathrm{d}s-(\gamma+\mu)I(t),t\neq nT,\\ R'(t)=\gamma I(t)-\mu R(t)+k\mu-qk\mu I(t),t\neq nT,\\ S(t^+)=S(t)-m\mu+q\mu mI(t),t=nT,\\ E(t^+)=E(t),t=nT\\ I(t^+)=I(t),t=nT,\\ R(t^+)=R(t)+m\mu-q\mu mI(t),t=nT。\end{cases}\tag{2}$$

在模型(2)的第一个和第三个式子里并未出现 $E(t)$ 和 $R(t)$，下面将讨论系统：

$$\begin{cases}S'(t)=-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{1+\alpha S(t)}+(1-k)\mu-\mu S(t)-\mu q(1-k)I(t),t\neq nT,\\ I'(t)=\beta\displaystyle\int_0^\tau f(s)S(t-s)I(t-s)e^{-\mu s}\mathrm{d}s-(\gamma+\mu)I(t),t\neq nT,\\ S(t^+)=S(t)-m\mu+q\mu mI(t),t=nT,\\ I(t^+)=I(t),t=nT。\end{cases}\tag{3}$$

引理 1[11]　考虑脉冲系统：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=a-bX(t),t\neq nT,\\ X(t^+)=X(t)+A,t=nT。\end{cases}\tag{4}$$

则方程(4)存在全局渐近稳定周期解：$\overline{X}(t)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{A}{1-e^{-bT}}e^{-b(t-nT)}$，$nT<t\leqslant(n+1)T$。

引理 2[12]　考虑微分方程自治系统 $X'(t)=a_1\int_0^\tau f(s)X(t-s)\mathrm{d}s-a_2X(t)$，$a_1,a_2$ 是两个常数。如果 $0<a_1<a_2$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}X(t)=0$。

1 无病周期解的存在性和稳定性

为了寻找模型(3)的无病周期解，令 $I(t)=0$。可得：

$$\begin{cases}S'(t)=(1-k)\mu-\mu S(t),t\neq nT,\\ S(t^+)=S(t)-m\mu,t=nT。\end{cases}\tag{5}$$

由引理 1，模型(5)的周期解为

$$\overline{S}(t)=(1-k)-\frac{m\mu}{1-e^{-\mu T}}e^{-\mu(t-nT)},nT<t\leqslant(n+1)T,\text{且 } S^*=(1-k)-\frac{m\mu}{1-e^{-\mu T}}。$$

定理 1　假设 $R_1<1$，其中 $R_1=\beta\left[(1-k)-\dfrac{m\mu(1-q)}{1-e^{-\mu T}}\right]\times\dfrac{1}{\gamma+\mu}$，那么模型(3)的无病周期解 $(\overline{S}(t),0)$ 是全局渐近稳定的。

证明　在 Ω 内，由模型(3)的第一个方程和第三个方程可得：$\begin{cases}S'(t)\leqslant(1-k)\mu-\mu S(t),t\neq nT,\\ S(t^+)\leqslant S(t)-m\mu(1-q),t=nT。\end{cases}$ 考虑下面的脉冲比较方程：

$$\begin{cases}X'(t)=(1-k)\mu-\mu X(t),t\neq nT,\\ X(t^+)=X(t)-m\mu(1-q),t=nT。\end{cases}\tag{6}$$

由引理 1 求得模型(6)的全局渐近稳定的周期解：

$$\overline{X}(t)=(1-k)-\frac{m\mu(1-q)}{1-e^{-\mu T}}e^{-\mu(t-nT)},nT<t\leqslant(n+1)T,\text{且 } X^*=(1-k)-\frac{m\mu(1-q)}{1-e^{-\mu T}}。$$

由脉冲比较定理得

$$S(t)<\overline{X}(t)+\varepsilon_1\leqslant(1-k)-\frac{m\mu(1-q)}{1-e^{-\mu T}}+\varepsilon_1=S^M,nT<t\leqslant(n+1)T。\tag{7}$$

当 $R_1<1$ 时,存在一个充分小的 ε_2,使得

$$\beta\left[(1-k)-\frac{m\mu(1-q)}{1-e^{-\mu T}}+\varepsilon_2\right]<\gamma+\mu。\tag{8}$$

由模型(3)的第二个方程及(7)式可得 $I'(t)\leqslant\beta s^M\int_0^\tau f(s)e^{-\mu s}I(t-s)\mathrm{d}s-(\gamma+\mu)I(t)$ 。

考虑下面比较系统

$$y'(t)=\beta s^M\int_0^\tau f(s)y(t-s)\mathrm{d}s-(\gamma+\mu)y(t)\ 。\tag{9}$$

由(7),(8)式知,$\beta s^M<\gamma+\mu$。由引理 2 可得,$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$。令$(S(t),I(t))$是模型(3)满足初始条件(1)的一个解且满足对所有 $s\in[-\tau,0]$,有 $I(s)=\varphi_2(s)>0$。$y(t)$是(9)式满足初始条件 $y(s)=\varphi_2(s)>0(s\in[-\tau,0])$的解。由比较定理可得,$\limsup\limits_{t\to\infty}I(t)\leqslant\limsup\limits_{t\to\infty}y(t)=0$。故有$\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=0$。因此,对于足够小的 ε_3,存在 $t>n_1T$,有 $I(t)<\varepsilon_3$ 。

由模型(3)的第一个方程和第三个方程,构造两个比较方程:

$$\begin{cases}S'(t)\leqslant(1-k)\mu-\mu S(t),t\neq nT,\\ S(t^+)\leqslant S(t)-m\mu(1-q\varepsilon_3),t=nT。\end{cases}\tag{10}$$

$$\begin{cases}S'(t)\geqslant(1-k)\mu(1-q\varepsilon_3)-(\mu+\beta\varepsilon_3)S(t),t\neq nT,\\ S(t^+)\geqslant S(t)-m\mu,t=nT。\end{cases}\tag{11}$$

分别考虑(10),(11)式的脉冲比较方程得:

$$\begin{cases}Z_1'(t)=(1-k)\mu-\mu Z_1(t),t\neq nT,\\ Z_1(t^+)=Z_1(t)-m\mu(1-q\varepsilon_3),t=nT。\end{cases}\tag{12}$$

$$\begin{cases}Z_2'(t)=(1-k)\mu(1-q\varepsilon_3)-(\mu+\beta\varepsilon_3)Z_2(t),t\neq nT,\\ Z_2(t^+)=Z_2(t)-m\mu,t=nT。\end{cases}\tag{13}$$

由引理 1 及(12),(13)式存在的周期解为:

$$\overline{Z}_1(t)=(1-k)-\frac{m\mu(1-q\varepsilon_3)}{1-e^{-\mu T}}e^{-\mu(t-nT)},nT<t\leqslant(n+1)T,$$

$$\overline{Z}_2(t)=\frac{(1-k)\mu(1-q\varepsilon_3)}{(\mu+\beta\varepsilon_3)}-\frac{m\mu}{1-e^{-(\mu+\beta\varepsilon_3)T}}e^{-(\mu+\beta\varepsilon_3)(t-nT)},nT<t\leqslant(n+1)T。$$

由比较定理可得,存在一个充分小的 ε_4,使得 $\overline{Z}_2(t)-\varepsilon_4\leqslant S(t)\leqslant\overline{Z}_1(t)+\varepsilon_4,nT<t\leqslant(n+1)T$。因为 ε_3 和 ε_4 都是任意小的,故$\lim\limits_{t\to\infty}S(t)=\overline{S}(t)$ 。故模型(3)的无病周期解$(\overline{S}(t),0)$是全局吸引的。 证毕

2 模型的持久性

定理 2 若 $R_2>1$,且 $\gamma>qk\mu$,则模型(3)是持久的,其中 $R_2=\frac{\beta T(\tau)}{\gamma+\mu}\left[(1-k)-\frac{m\mu}{1-e^{-\mu T}}\right]$, $T(\tau)=\int_0^\tau f(s)e^{-\mu s}\mathrm{d}s$ 。

证明 先证明 $S(t)$有下界。在 Ω 内,由模型(3)的第一个方程,第三个方程得:

$$\begin{cases}S'(t)\geqslant(1-k)\mu(1-q)-(\mu+\beta)S(t),t\neq nT,\\ S(t^+)\geqslant S(t)-m\mu,t=nT。\end{cases}$$

考虑如下脉冲比较方程$\begin{cases}X'(t)=(1-k)\mu(1-q)-(\mu+\beta)X(t),t\neq nT,\\ X(t^+)=X(t)-m\mu,t=nT。\end{cases}$对于任意小的 ε_5,存在 T_1,当 $t>T_1$ 时,有 $S(t)\geqslant\frac{(1-k)\mu(1-q)}{\beta+\mu}-\frac{m\mu}{1-e^{-(\mu+\beta)T}}-\varepsilon_5=m_s>0$。故有$\liminf\limits_{t\to\infty}S(t)\geqslant m_s$。

下证 $I(t)$有下界。对于充分小的 $\delta_1>0$,存在 $n_4>0$,不妨设 $I(t)$有 3 种情况:1) 当 $t\geqslant n_4T$ 时,使得 $I(t)\geqslant\delta_1$;2) 当 $t\geqslant n_4T$ 时,使得 $I(t)<\delta_1$ 成立;3) 当 $t\geqslant n_4T$ 时,使得 $I(t)$关于 δ_1 振荡。

如果情况 1) 成立,则 $I(t)$是有下界的,故 $I(t)\geqslant\delta_1$。

如果情况 2) 成立,根据模型(3)的第一个和第三个方程得:

$$\begin{cases} S'(t) \geqslant (1-k)\mu(1-q\delta_1)-(\mu+\beta\delta_1)S(t), t\neq nT, \\ S(t^+)\geqslant S(t)-m\mu, t=nT。\end{cases}$$

考虑如下脉冲比较方程 $\begin{cases} W'(t)=(1-k)\mu(1-q\delta_1)-(\mu+\beta\delta_1)W(t), t\neq nT, \\ W(t^+)=W(t)-m\mu, t=nT。\end{cases}$ 由引理 1，有

$$\overline{W}(t)=\frac{(1-k)\mu(1-q\delta_1)}{(\mu+\beta\delta_1)}-\frac{m\mu}{1-e^{-(\mu+\beta\delta_1)T}}e^{-(\mu+\beta\delta_1)(t-nT)}, nT<t\leqslant(n+1)T,$$

且 $W^*=\dfrac{(1-k)\mu(1-q\delta_1)}{(\mu+\beta\delta_1)}-\dfrac{m\mu}{1-e^{-(\mu+\beta\delta_1)T}}$。

当 $nT<t\leqslant(n+1)T, t>T_1$，记 $T_2=n_4T$ 时，对于任意小的 ε_6，有

$$S(t)\geqslant W^*-\varepsilon_6=\frac{(1-k)\mu(1-q\delta_1)}{\beta\delta_1+\mu}-\frac{m\mu}{1-e^{-(\mu+\beta\delta_1)T}}-\varepsilon_6=S_\Delta。\tag{14}$$

定义 $V(t)=I(t)+\beta\int_0^\tau f(s)e^{-\mu s}\int_{t-s}^t S(\theta)I(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s$，对于 $V(t)$ 沿着模型(3)的解求导可得，

$$V'(t)=I'(t)+\beta\int_0^\tau f(s)e^{-\mu s}(S(t)I(t)-S(t-s)I(t-s))\mathrm{d}s=\beta\int_0^\tau f(s)e^{-\mu s}S(t)I(t)\mathrm{d}s-$$

$$(\gamma+\mu)I(t)=(\gamma+\mu)\left[\frac{\beta S(t)}{(\gamma+\mu)}\int_0^\tau f(s)e^{-\mu s}\mathrm{d}s-1\right]I(t)=(\gamma+\mu)\left[\frac{\beta S(t)}{(\gamma+\mu)}T(\tau)-1\right]I(t)。$$

将(15)式代入得

$$V'(t)\geqslant(\gamma+\mu)\left[\frac{\beta S_\Delta}{(\gamma+\mu)}T(\tau)-1\right]I(t)。\tag{15}$$

当 $R_2>1, t>T_2$ 时，

$$\frac{\beta S_\Delta}{(\gamma+\mu)}T(\tau)>1。\tag{16}$$

令 $I^l=\lim\limits_{t\in[T_1,T_1+\tau]}I(t)$ 时，则对于所有 $t>T_3$，$I(t)\geqslant I^l$ 成立，否则存在 $T_3>0$，使得当 $t\in[T_2, T_2+\tau+T_3]$ 时，有 $I(t)\geqslant I^l$ 且 $I(T_2+\tau+T_3)=I^l$，$I'(T_2+\tau+T_3)\leqslant 0$。由系统(3)的第二个方程及(16)式可得：

$$I'(T_2+\tau+T_3)\geqslant(\gamma+\mu)\left[\frac{\beta S_\Delta}{(\gamma+\mu)}T(\tau)-1\right]I^l>0,\tag{17}$$

这与 $V(t)$ 的有界性矛盾。故情况 2)不成立。

如果情况 3)成立，记 $m_I=\min\left\{\dfrac{\delta_1}{2}, \delta_1e^{-(\gamma+\mu)\tau}\right\}$。因为 $I(t)$ 在 δ_1 处震荡，假设 $I(t^*)=I(t^*+\lambda)=\delta_1$，并且 $I(t)\leqslant\delta_1$，$t^*\leqslant t\leqslant t^*+\lambda$，由于 $I(t)$ 连续且不受脉冲影响，从而 $I(t)$ 一致连续。因此，存在 $0<\bar{t}<\tau$（$\bar{t}$ 独立于 t^*），使对于所有 $t^*\leqslant t\leqslant t^*+\bar{t}$，有 $I(t)\geqslant\dfrac{\delta_1}{2}$。

若 $\lambda\leqslant\bar{t}$ 时，则结论成立。

若 $\bar{t}<\lambda\leqslant\tau$ 时，有系统(2)，当 $t^*\leqslant t\leqslant t^*+\lambda$ 时，有 $I'(t)\geqslant-(\gamma+\mu)I(t)$。所以，$t^*\leqslant t\leqslant t^*+\lambda\leqslant t^*+\tau$，有 $I(t)\geqslant\delta_1e^{-(\gamma+\mu)\tau}$。

若 $\lambda>\tau$，则当 $t^*\leqslant t\leqslant t^*+\tau$，有 $I(t)\geqslant\delta_1e^{-(\gamma+\mu)\tau}$。

当 $t^*+\tau\leqslant t\leqslant t^*+\lambda$ 时，有 $I(t)\geqslant\delta_1e^{-(\gamma+\mu)\tau}$。否则，存在 $T_4>t^*+\tau$，使 $t^*\leqslant t\leqslant T_4$，有 $I(t)\geqslant\delta_1e^{-(\gamma+\mu)\tau}$，并且 $I(T_4)\geqslant\delta_1e^{-(\gamma+\mu)\tau}$，$I'(T_4)\leqslant 0$。

另一方面，由系统(3)的第二个方程知

$$I'(T_4)\geqslant\beta S_\Delta T(\tau)I(T_4)-(\gamma+\mu)I(T_4)=(\gamma+\mu)\left[\frac{\beta S_\Delta}{(\gamma+\mu)}T(\tau)-1\right]I(T_4)>0。$$

这与 $I'(T_4)\leqslant 0$ 矛盾。所以，当 $t^*+\tau\leqslant t\leqslant t^*+\lambda$ 时，$I(t)\geqslant\delta_1e^{-(\gamma+\mu)\tau}$ 成立。由于 δ_1 的选取与系统(2)的正解选取无关。故存在充分大的 t 使得 $I(t)\geqslant\delta_1$ 成立。故有 $I(t)\geqslant m_I=\min\left\{\dfrac{\delta_1}{2}, \delta_1e^{-(\gamma+\mu)\tau}\right\}$，即 $\liminf\limits_{t\to\infty}I(t)\geqslant m_I$。由模型(2)的第二个方程，得

$$E'(t)\geqslant\beta m_Sm_I-\beta T(\tau)+q\mu m_I-\mu E(t)\geqslant\beta(m_Sm_I-T(\tau))+q\mu m_I-\mu E(t)。$$

于是 $E(t)\geqslant\dfrac{\beta(m_Sm_I-T(\tau))+q\mu m_I}{\mu}=m_E>0$。因此 $\liminf\limits_{t\to\infty}E(t)\geqslant m_E$。从模型(2)的第 4 个方程，知

$$\begin{cases}R'(t)\geqslant(\gamma-qk\mu)m_I-\mu R(t)+k\mu, t\neq nT,\\ R(t^+)\geqslant R(t)+m\mu(1-q), t=nT。\end{cases}$$ 对任意小的 ε_7 存在 T_5，当 $t>T_5$ 时，

$$R(t)\geqslant\frac{k\mu+(\gamma-qk\mu)m_I}{\mu}+\frac{m\mu(1-q)}{1-e^{-\mu T}}-\varepsilon_7=m_R>0。$$

故 $\liminf\limits_{t\to\infty} R(t)\geqslant m_R$。

令 $\Omega_0=\{(S,E,I,R)\in\mathbf{R}^4\mid m_S\leqslant S\leqslant 1, m_E\leqslant E\leqslant 1, m_I\leqslant I\leqslant 1, m_R\leqslant R\leqslant 1\}$。由上述式子可知，$\Omega_0$ 是有界紧区域且 $\Omega_0\in\Omega$，系统(1)满足初始条件的每一个解最终进入区域 Ω_0 内不再离开。因此，当 $R_2>1$ 时，系统(2)是持久的。 证毕

参考文献：

[1] 张东爽. 具有时滞和隔离项的 SIQS 模型的稳定性研究[D]. 南昌：南昌大学，2007.
Zhang D S. SIQS model with time delay and isolation of stability study[D]. Nanchang：Nanchang University，2007.

[2] 张敬，谢守波，高文杰. 一类具有时滞的 SIRS 传染病模型的研究[J]. 东北师范大学报：自然科学版，2011，43：1-15.
Zhang J，Xie S B，Gao W J. A SIRS epidemic model with time delays is research[J]. Journal of Northeast Normal University：Natural Science Edition，2011，43：1-15.

[3] 毕晓华，江志超，夏茂辉. 一类双时滞的 SEIRS 模型的稳定性分析[J]. 黑龙江大学自然科学学报，2010，27(4)：482-385.
Bi X H，Jiang Z C，Xia M H. Double delay nonlinear SEIRS model of stability analysis[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University，2010，27(4)：482-385.

[4] 李冬梅，卢旸，刘伟华. 一类具有连续接种的自治 SEIR 传染病模型[J]. 哈尔滨理工大学学报，2013，18：1-3.
Li D M，Lu C，Liu W H. Autonomous SEIR epidemic model with continuous vaccination[J]. Journal of Harbin University of Science and Technology，2013，18：1-3.

[5] Agur Z，Cojocaru L，Mazor G，et al. Pulse mass mealses vaccination across age cohorts[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences，1993，90：11698-11702.

[6] 周艳丽，王贺桥. 具有脉冲预防接种的 SIQR 流行病数学模型[J]. 上海理工大学学报，2007，29(1)：11-16.
Zhou Y L，Wang H Q. We analyze the SIQR epidemic model with impulsive[J]. Journal of Shanghai University of Science and Technology，2007，29(1)：11-16.

[7] 庞国平，陈兰荪. 具饱和传染率的脉冲免疫接种 SIRS 模型[J]. 系统科学与数学，2007，27(4)：563-572.
Pang G P，Chen L S. With the saturating infect rate pulse vaccination SIRS model[J]. Journal of Systems Science and Mathematics，2007，27(4)：563-572.

[8] 杜艳可，徐瑞. 一类具有时滞和脉冲接种的 SEIRS 传染病模型[J]. 北华大学学报：自然科学版，2011，12(3)：2-14.
Du Y K，Xu R. A class of SEIRS epidemic model with time delay and pulse vaccination[J]. Journal of North China University：Natural Science Edition，2011，12(3)：2-14.

[9] 侯娟，滕志东. 具有脉冲效应的种群与传染病动力学模型研究[D]. 新疆：新疆大学，2010.
Hou J，Teng Z D. Population and infectious disease dynamics model with impulsive effect research[D]. Xinjiang：Xinjiang University，2010.

[10] 蒋钰，梅立泉. 具有时滞和脉冲接种的非线性发生率的流行病模型分析[J]. 数学物理报，2012，32(2)：1-15.
Jiang Y，Mei L Q.With time delay and pulse vaccination of nonlinear incidence of epidemic model analysis[J]. Journal of mathematics Richard，2012，32(2)：1-15.

[11] 李冰. 具有脉冲接种的传染病模型[D]. 哈尔滨：哈尔滨理工大学，2014.
Li B. With pulse vaccination of infectious disease model[D]. Harbin：Harbin Polytechnic University，2014.

[12] Beretta E，Takeuchi Y. Global stability of an SIR epidemic model with distributed time delay[J]. Journal of Mathematical Biology，1995，33(3)：250-260.

Analysis for an SEIR Epidemic Model with Pulse Vaccination and Distributed Delay

XU Biyun，YANG Zhichun

(College of Mathematics Sciences，Chongqing Normal University，Chongqing 401331，China)

Abstract：Pulse vaccination is an effective way to control the spread of infectious diseases in real world. In consideration of all the newborn babies，a class of SEIR epidemic model with pulse vaccination and distributed delay is proposed. The existence of the periodic solution is obtained by using the theory of impulsive differential equations and the analysis technique. Then，the global stability of the model is obtained by using the impulsive comparison principle. In the end，by using again comparison principle，we obtain the permanence of the model.

Key words：pidemic model；distributed delay；periodic solutions；global attactivity；persistence

(责任编辑　黄　颖)