运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160101

广义凸集的结构理论*

黄金莹[1], 张效菲[2], 赵 宇[1]

(1. 佳木斯大学 理学院数学系, 黑龙江 佳木斯 154007; 2. 广西南宁大学 数学与信息学院, 南宁 530000)

摘要: 对凸集概念作了进一步推广。首先定义了向量值函数 $F:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ 是 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的广义凸结构概念,并给出了广义凸结构的一个性质,进而定义关于广义凸结构 F 的凸集、近似凸集、弱凸集 3 种广义凸集概念,并给出这 3 种广义凸集等价刻划,证明了闭的关于 F 的弱凸集是关于 F 的凸集。

关键词: 广义凸结构;广义凸集;凸集;近似凸集;弱凸集

中图分类号: O174.13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6693(2016)01-0006-07

对凸性的探索是应用数学领域的重要课题。《Convex Analysis》[1]集成了当时人们对凸性研究的经典结果。1987 年,梅家骝[2]为了拓宽数学规划、控制论等应用数学研究范畴,在 $\mathbf{R}^n$ 中提出了拟凸集、弱拟凸集概念并获得了一些与凸分析相类似的结果。为了利用集合凸性研究函数凸性,Jeyakumar[3]提出了近似凸集概念。

称 $S\subseteq\mathbf{R}^n$ 是近似凸集,如果 $\exists\alpha\in(0,1)$ 对 $\forall u_1,u_2\in S$,有
$$\alpha u_1+(1-\alpha)u_2\in S。\tag{1}$$
受文献[4]中的引理 2.1 启发可以得到如下定义。

称 $S\subseteq\mathbf{R}^n$ 是弱凸集,如果 $\forall u_1,u_2\in S$, $\exists\alpha\in(0,1)$,有
$$\alpha u_1+(1-\alpha)u_2\in S。\tag{2}$$
文献[4]中的引理 2.1 可以概括为闭的弱凸集是凸集。

近似凸集、弱凸集分别与文献[2]中的拟凸集、弱拟凸集等价,只是在刻化上更易于建立与凸函数的联系。

除了上述通过弱化凸性假设来创建广义凸集外,更多的是在创建广义凸函数时提出相应的广义凸集概念。事实上,任何一类广义凸函数都要求定义域具备某种映射封闭性,从而在建立某类广义凸函数概念之前,就必需先建立相应的广义凸集概念。1988 年,Weir 和 Mond[5]在提出预不变凸函数时给出了不变凸集的概念。2004 年,吴善和[6]提出了几何凸函数,而包含于$(0,+\infty)$的区间一定是几何凸集(见本文例 2)。1995 年,Mohan 和 Neogy[7]进一步研究了不变凸集并给出条件 C。文献[8-9]通过引入条件 P_1 和条件 P_2,进而给出了以上述几类广义凸函数为特例的广义凸函数的公理化概念,开展了一般性研究。

本文的工作是提出广义凸结构概念,并给出关于它的一个性质定理,以此为前提建立以凸集、几何凸集、不变凸集等为特例的关于 F 的凸集概念,同时建立关于 F 的近似凸集和关于 F 的弱凸集概念,从结构的角度给出它们的一些性质,为进一步研究广义凸函数奠定基础。

1 广义凸结构

定义 1 设非空集合 $K\to\mathbf{R}^n$,向量值函数 $F:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$。称 F 是 K 上的广义凸结构,如果 F 满足以下 4 个条件:1) 单点性。$\forall\lambda\in[0,1]$, $\forall x\in K$,有 $F(x,x,\lambda)=x$;2) 端点性。$\forall x,y\in K$,有 $F(x,y,0)\in K$, $F(x,y,1)\in K$;3) 对 $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$,且 $\alpha<\beta$, $\forall x,y\in K$,有[8-9]条件 P_1:当 $F(x,y,\beta)\in K$ 时,$F\left[y,F(x,y,\beta),1-\dfrac{\alpha}{\beta}\right]=F(x,y,\alpha)$;条件 P_2:当 $F(x,y,\alpha)\in K$ 时,$F\left[x,F(x,y,\alpha),\dfrac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right]=F(x,y,\beta)$;4) λ 连

* **收稿日期:** 2015-04-01 **修回日期:** 2015-07-03 **网络出版时间:** 2015-12-02 10:26

资助项目: 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(No. 12531684);佳木斯大学科学技术研究重点项目(No. 12Z1201517)

作者简介: 黄金莹,男,副教授,研究方向为凸分析与凸规划,E-mail: hjyshuxue@163.com; **通信作者:** 张效菲,讲师,E-mail: nierszhang@163.com

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20151202.1026.002.html

续性。F 关于 λ 在[0,1]上连续。

例 1　规定 $\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n_{++}$ 分别为 n 维实数组全体和分量为正的 n 维实数组全体，对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n_{++}$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n_{++}$，$r\in\mathbf{R}$，记 $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$，$xy=(x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_ny_n)$，$x^r=(x_1^r,x_2^r,\cdots,x_n^r)$，容易验证：1) $C(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$ 是任何非空集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的广义凸结构；2) $Q(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$ 是任何非空集合 $D\subseteq\mathbf{R}$ 上的广义凸结构；3) $P(x,y,\lambda)=[\lambda x^p+(1-\lambda)y^p]^{\frac{1}{p}}$ $(p\neq 0)$ 是任何非空集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n_{++}$ 上的广义凸结构；4) $G(x,y,\lambda)=x^\lambda y^{1-\lambda}$ 是任何非空集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n_{++}$ 上的广义凸结构。

以条件 4)为例：$\forall\alpha,\beta\in[0,1]$，且 $\alpha<\beta$，$\forall x,y\in K$，当 $G(x,y,\beta)=x^\beta y^{1-\beta}\in K$ 时，有

$$G\left[y,G(x,y,\beta),1-\frac{\alpha}{\beta}\right]=y^{1-\frac{\alpha}{\beta}}[G(x,y,\beta)]^{\frac{\alpha}{\beta}}=y^{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}(x^\beta y^{1-\beta})^{\frac{\alpha}{\beta}}=x^\alpha y^{1-\alpha}=G(x,y,\alpha)。$$

这说明 $G(x,y,\lambda)=x^\lambda y^{1-\lambda}$ 满足条件 P_1，同理它也满足条件 P_2，4)对于广义凸结构的其他条件也是容易验证的。

注 1　设 F 是 K 上的广义凸结构，A 是 K 的非空子集，那么只要 F 满足端点性要求，即 $\forall x,y\in A$，有 $F(x,y,0)\in A$，$F(x,y,1)\in A$，则 F 是 A 上的广义凸结构。

下面给出广义凸结构的一个重要性质。

定理 1　设 F 是 K 上的广义凸结构，且 $F(x,y,u_1)\in K$，$F(x,y,u_2)\in K$，其中 $x,y\in K$，$u_1,u_2\in[0,1]$，则对 $\forall\lambda\in[0,1]$，有：

$$F(x,y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\lambda] \tag{3}$$

证明　当 $u_1=u_2$ 时，$F(x,y,u_1)=F(x,y,u_2)$，由广义凸结构的单点性知(3)式成立。

当 $u_1\neq u_2$ 且 $\lambda\in(0,1)$时，(3)式成立，此为文献[8]的定理 1.1 给出的结论。

当 $u_1\neq u_2$ 且 $\lambda=0$ 或 1 时，(3)式也成立。这是因为当 $u_1\neq u_2$ 且 $\lambda\in(0,1)$时，(3)式成立，在(3)式中分别令 $\lambda\to 0^+$，$\lambda\to 1^-$，由 λ 连续性知，

$$F(x,y,u_2)=F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),0],F(x,y,u_1)=F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),1]。$$

证毕

2 广义凸集

根据一个集合对定义其上的广义凸结构 F 的封闭性的强弱，给出 3 种广义凸集的概念。

定义 2　设非空集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$，向量值函数 $F:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$，$F$ 是 K 上的广义凸结构。称 K 是关于 F 的凸集，如果 $\forall\lambda\in(0,1)$，$\forall x,y\in K$，有 $F(x,y,\lambda)\in K$；称 K 是关于 F 的近似凸集，如果 $\exists\lambda\in(0,1)$，$\forall x,y\in K$，有 $F(x,y,\lambda)\in K$；称 K 是关于 F 的弱凸集，如果 $\forall x,y\in K$，$\exists\lambda\in(0,1)$，有 $F(x,y,\lambda)\in K$。

例 2　几何凸集。设非空集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n_{++}$，称 K 为几何凸集，如果 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in K$，有 $x^\lambda y^{1-\lambda}\in K$。几何凸集是关于 $F(x,y,\lambda)=x^\lambda y^{1-\lambda}$ 的凸集。

例 3　幂凸集。设非空集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n_{++}$，$P$ 为非零常数，称 K 为幂凸集，如果 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in K$，有 $[\lambda x^p+(1-\lambda)y^p]^{\frac{1}{p}}\in K$。幂凸集是关于 $F(x,y,\lambda)=[\lambda x^p+(1-\lambda)y^p]^{\frac{1}{p}}$ 的凸集。

例 4　不变凸集。设非空集合 $K\subseteq\mathbf{R}^n$，称 K 是关于 $\eta:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 的不变凸集，如果 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in K$，有 $y+\lambda\eta(x,y)\in K$。

设 K 是关于 η 的不变凸集，称 η 满足条件 C[7]，如果对 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in K$，有

$$\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y),\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)。$$

可以证明：当 η 满足条件 C 时，关于 η 的不变凸集是关于 $F(x,y,\lambda)=y+\lambda\eta(x,y)$ 的凸集。这是因为 $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$，且 $\alpha<\beta$，$\forall x,y\in K$，有

$$F\left[y,F(x,y,\beta),1-\frac{\alpha}{\beta}\right]=F(x,y,\beta)+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\eta(y,F(x,y,\beta))=$$

$$y+\beta\eta(x,y)+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\eta(y,y+\beta\eta(x,y))=y+\beta\eta(x,y)+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)(-\beta)\eta(x,y)=$$

$$y+\left[\beta+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)(-\beta)\right]\eta(x,y)=F(x,y,\alpha)。$$

这说明由条件 $\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$ 可以推出 F 在 K 上满足条件 P_1。

同理由条件 $\eta(x,y+\lambda\eta(x,y))=(1-\lambda)\eta(x,y)$ 可以推出 F 在 K 上满足条件 P_2。

在 $\eta(y,y+\lambda\eta(x,y))=-\lambda\eta(x,y)$ 中令 $\lambda=0$,得到 $\eta(y,y)=0$, $\forall y\in K$,进而 $\forall\lambda\in[0,1]$, $\forall x\in K$,有 $F(x,x,\lambda)=x+\lambda\eta(x,x)=x$。即 $F(x,y,\lambda)=y+\lambda\eta(x,y)$ 在 K 上具有单点性。$F(x,y,\lambda)=y+\lambda\eta(x,y)$ 在 K 上的端点性以及 λ 连续性是显然的。

关于 η(满足条件C)的不变凸集的一个具体例子参见文献[7]中的例2.4。

例5 设区间 $I\subset(0,+\infty)$,则 I 是分别关于 $C(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$, $G(x,y,\lambda)=x^{\lambda}y^{1-\lambda}$, $P(x,y,\lambda)=[\lambda x^{p}+(1-\lambda)y^{p}]^{\frac{1}{p}}$, $Q(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$ 的凸集。

对于同一集合,可以通过赋予不同的向量值函数 $F:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$,使之成为关于该 F 的凸集,任意的非空实数集都是关于 $Q(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$ 的凸集。

例6 关于 F 的凸集一定是关于 F 的近似凸集,关于 F 的近似凸集一定是关于 F 的弱凸集,反之一般不成立。

容易看出(1),(2)式给出的近似凸集、弱凸集是关于 $F(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$ 的近似凸集和弱凸集。

有理数集 $\mathbf{Q}$ 是近似凸集,但不是凸集。$S=(1,2)\cup(3,4)$ 是弱凸集,但既不是凸集也不是近似凸集。

3 广义凸集的性质

设 F 是 K 上的广义凸结构,对任意固定的 $X,Y\in K$,构造集合:

$$L_{X,Y}=\{x\mid x=F(X,Y,\lambda)\in K,\lambda\in[0,1]\},\tag{4}$$

$$T_{X,Y}=\{\lambda\mid\lambda\in[0,1],F(X,Y,\lambda)\in K\},\tag{5}$$

$$T=\{\lambda\mid\lambda\in[0,1],F(x,y,\lambda)\in K,\ \forall x,y\in K\}。\tag{6}$$

定理2 设 F 是 K 上的广义凸结构,则:1) K 是关于 F 的凸集当且仅当 $T=\bigcap\limits_{\forall X,Y\in K}T_{X,Y}=[0,1]$;2) K 是关于 F 的近似凸集当且仅当 $T\setminus\{0,1\}\neq\varnothing$;3) K 是关于 F 的弱凸集当且仅当对任意固定的 $X,Y\in K$,$T_{X,Y}\setminus\{0,1\}\neq\varnothing$。

根据定义2容易得到定理2。

定理3 设 F 是 K 上的广义凸结构,则下列陈述是等价的:1) K 是关于 F 的凸集;2) 对任意的 $X,Y\in K$,$L_{X,Y}$ 是关于 F 的凸集;3) 对任意的 $X,Y\in K$,$T_{X,Y}$ 是凸集。

证明 1)⇒2)。对任意的 $X,Y\in K$,只须证 $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall x,y\in L_{X,Y}$,有:

$$F(x,y,\lambda)\in L_{X,Y}。\tag{7}$$

由 $L_{X,Y}$ 的构造(4)式知,对 $\forall x,y\in L_{X,Y}$, $\exists u_1,u_2\in[0,1]$,有 $x=F(X,Y,u_1)\in K$, $y=F(X,Y,u_2)\in K$。

因 K 是关于 F 的凸集,故 $\forall\lambda\in(0,1)$,有:

$$F(x,y,\lambda)=F[F(X,Y,u_1),F(X,Y,u_2),\lambda]\in K。\tag{8}$$

根据定理1知:

$$F[F(X,Y,u_1),F(X,Y,u_2),\lambda]=F[X,Y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]\in K。\tag{9}$$

由(4),(9)式知:

$$F(X,Y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\in L_{X,Y},\tag{10}$$

由(4),(8),(10)式知(7)式成立。

2)⇒3)。对任意的 $X,Y\in K$,只须证 $\forall\lambda\in(0,1)$, $\forall u_1,u_2\in T_{X,Y}$,有:

$$\lambda u_1+(1-\lambda)u_2\in T_{X,Y}。\tag{11}$$

由 $T_{X,Y}$ 的构造(5)式知,对 $\forall u_1,u_2\in T_{X,Y}$,有 $x=F(X,Y,u_1)\in K$, $y=F(X,Y,u_2)\in K$。

由 $L_{X,Y}$ 的构造(4)式知,$x,y\in L_{X,Y}$。

因 $L_{X,Y}$ 是关于 F 的凸集,故 $\forall\lambda\in(0,1)$,有:

$$F(x,y,\lambda)=F[F(X,Y,u_1),F(X,Y,u_2),\lambda]\in L_{X,Y}。\tag{12}$$

根据定理1知:

$$F[F(X,Y,u_1),F(X,Y,u_2),\lambda]=F[X,Y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]\in L_{X,Y}。\tag{13}$$

由(4),(13)式知:

$$F(X,Y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\in K, \tag{14}$$

由(5)，(14)式知(11)式成立。

3)⇒1)。由广义凸结构的端点性及(5)式知，$0,1\in T_{X,Y}\subseteq[0,1]$，又 $T_{X,Y}$ 是凸集，必有 $T_{X,Y}=[0,1]$。于是 $T=\bigcap_{\forall X,Y\in K}T_{X,Y}=[0,1]$。根据定理 2 的结论 1)知，$K$ 是关于 F 的凸集。　　证毕

定理 4　设 F 是 K 上的广义凸结构，则下列陈述是等价的：1) K 是关于 F 的弱凸集；2) 对任意的 $X,Y\in K$，$L_{X,Y}$ 是关于 F 的弱凸集；3) 对任意的 $X,Y\in K$，$T_{X,Y}$ 是弱凸集。

证明　1)⇒2)。对任意的 $X,Y\in K$，只须证 $\forall x,y\in L_{X,Y}$，$\exists\alpha\in(0,1)$，有：

$$F(x,y,\alpha)\in L_{X,Y}。 \tag{15}$$

由 $L_{X,Y}$ 的构造(4)式知，对 $\forall x,y\in L_{X,Y}$，$\exists u_1,u_2\in[0,1]$，有 $x=F(X,Y,u_1)\in K$，$y=F(X,Y,u_2)\in K$。因 K 是关于 F 的弱凸集，故 $\exists\alpha\in(0,1)$ 使得：

$$F(x,y,\alpha)=F[F(X,Y,u_1),F(X,Y,u_2),\alpha]\in K。 \tag{16}$$

根据定理 1 知：

$$F[F(X,Y,u_1),F(X,Y,u_2),\alpha]=F[X,Y,\alpha u_1+(1-\alpha)u_2]\in K。 \tag{17}$$

由(4)，(17)式知：

$$F(X,Y,\alpha u_1+(1-\alpha)u_2)\in L_{X,Y}, \tag{18}$$

由(4)，(16)，(18)式知(15)式成立。

2)⇒3)。对任意的 $X,Y\in K$，只须证 $\forall u_1,u_2\in T_{X,Y}$，$\exists\alpha\in(0,1)$，有：

$$\alpha u_1+(1-\alpha)u_2\in T_{X,Y}。 \tag{19}$$

由 $T_{X,Y}$ 的构造(5)式知，对 $\forall u_1,u_2\in T_{X,Y}$，有 $x=F(X,Y,u_1)\in K$，$y=F(X,Y,u_2)\in K$。

由 $L_{X,Y}$ 的构造(4)式知，$x,y\in L_{X,Y}$。

因 $L_{X,Y}$ 是关于 F 的弱凸集，故 $\exists\alpha\in(0,1)$，有：

$$F(x,y,\alpha)=F[F(X,Y,u_1),F(X,Y,u_2),\alpha]\in L_{X,Y}。 \tag{20}$$

根据定理 1 知：

$$F[F(X,Y,u_1),F(X,Y,u_2),\alpha]=F[X,Y,\alpha u_1+(1-\alpha)u_2]\in L_{X,Y}。 \tag{21}$$

由(4)，(21)式知：

$$F(X,Y,\alpha u_1+(1-\alpha)u_2)\in K, \tag{22}$$

由(5)，(22)式知(19)式成立。

3)⇒1)。由广义凸结构的端点性及(5)式知，$0,1\in T_{X,Y}\subseteq[0,1]$，又 $T_{X,Y}$ 是弱凸集，故 $\exists\alpha\in(0,1)$，使得 $\alpha=\alpha\cdot1+(1-\alpha)0\in T_{X,Y}$。即对任意固定的 $X,Y\in K$，$T_{X,Y}\backslash\{0,1\}\neq\varnothing$，根据定理 2 的结论 3)知，$K$ 是关于 F 的弱凸集。　　证毕

关于 F 的近似凸集，有如下结论成立。

定理 5　设 F 是 K 上的广义凸结构，则 K 是关于 F 的近似凸集当且仅当 T 在$[0,1]$中稠密。

证明　充分性。T 在$[0,1]$中稠密，必有 $T\backslash\{0,1\}\neq\varnothing$，根据定理 2 的结论 2)知 K 是关于 F 的近似凸集。

必要性。因 K 是关于 F 的近似凸集，由定理 2 的结论 2)知，$T\backslash\{0,1\}\neq\varnothing$，即 $\alpha\in(0,1)$ 且 $\alpha\in T$，同时根据广义凸结构的端点性还有 $0\in T$，$1\in T$。

假设 T 在$[0,1]$非稠密，则存在 $\lambda_0\in(0,1)$，使得对于：

$$\lambda_1=\inf\{\lambda\in T\mid\lambda\geqslant\lambda_0\},\lambda_2=\sup\{\lambda\in T\mid\lambda\leqslant\lambda_0\}, \tag{23}$$

必有：

$$0\leqslant\lambda_2<\lambda_1\leqslant1。 \tag{24}$$

根据确界定义及(23)，(24)式，对于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\max\{\alpha,1-\alpha\}}-1\right)(\lambda_1-\lambda_2)$，存在 $u_1,u_2\in T$，使得 $\lambda_1\leqslant u_1<\lambda_1+\varepsilon_0$，$\lambda_2-\varepsilon_0<u_2\leqslant\lambda_2$，进而 $u_1-u_2<\lambda_1-\lambda_2+2\varepsilon_0=\frac{1}{\max\{\alpha,1-\alpha\}}(\lambda_1-\lambda_2)$。整理得：

$$\max\{\alpha,1-\alpha\}(u_1-u_2)<\lambda_1-\lambda_2。 \tag{25}$$

因为 $u_1,u_2\in T$，由(6)式知 $F(x,y,u_1)$，$F(x,y,u_2)\in K$。

令$\bar{\lambda}=\alpha u_1+(1-\alpha)u_2$，由定理1知，对$\forall x,y\in K$，有：

$$F(x,y,\bar{\lambda})=F(x,y,\alpha u_1+(1-\alpha)u_2)=F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\alpha]。\tag{26}$$

由$\alpha\in T$及(6)式知：

$$F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\alpha]\in K。\tag{27}$$

由(6)，(26)，(27)式知$F(x,y,\bar{\lambda})\in K$，$\bar{\lambda}\in T$。

对$\bar{\lambda}$作如下讨论：

1) 若$\bar{\lambda}\geqslant\lambda_0$，由(25)式知，$\bar{\lambda}-u_2=\alpha(u_1-u_2)<\lambda_1-\lambda_2$，进而$\bar{\lambda}<\lambda_1$。但$\bar{\lambda}\geqslant\lambda_0$且$\bar{\lambda}\in T$，由(23)式知，$\bar{\lambda}\geqslant\lambda_1$，矛盾。

2) 若$\bar{\lambda}\leqslant\lambda_0$，由(25)式知，$u_1-\bar{\lambda}=(1-\alpha)(u_1-u_2)<\lambda_1-\lambda_2$，进而$\bar{\lambda}>\lambda_2$。但$\bar{\lambda}\leqslant\lambda_0$且$\bar{\lambda}\in T$，由(23)式知，$\bar{\lambda}\leqslant\lambda_2$，矛盾。

综上，假设不成立，故T在[0,1]中稠密。　证毕

关于F的弱凸集，还有如下结论成立。

定理6　若K是闭的关于F的弱凸集，则K是关于F的凸集。

证明　取定$T_{X,Y}(\forall X,Y\in K)$，任取$\{\lambda_n\}\subset T_{X,Y}$，且$\lambda_n\to\lambda(n\to\infty)$，必有$\{F(X,Y,\lambda_n)\}\subset K$，且$F(X,Y,\lambda_n)\to F(X,Y,\lambda)(n\to\infty)$。因为$K$是闭集，从而$F(X,Y,\lambda)\in K$，即$\lambda\in T_{X,Y}$。这说明当$K$是闭集时，$\forall X,Y\in K$，$T_{X,Y}$都是闭集。

根据定理4，由K是关于F的弱凸集可推知，$\forall X,Y\in K$，$T_{X,Y}$是弱凸集，$T_{X,Y}$还是闭的，故$T_{X,Y}$是凸集，根据定理3知，K是关于F的凸集。　证毕

根据定理3，可以得到具体广义凸集，下面以几何凸集为例加以说明。

例7　包含坐标平面第一象限中互异两点$X(a_1,b_1)$，$Y(a_2,b_2)$的最小几何凸集。

解　设K是任意一个包含$X(a_1,b_1)$，$Y(a_2,b_2)$的几何凸集，根据定理3，$L_{X,Y}=\{P\mid P=X^{\lambda}Y^{1-\lambda},\lambda\in[0,1]\}\subseteq K$是几何凸集，这说明$L_{X,Y}$是包含$X(a_1,b_1)$，$Y(a_2,b_2)$的最小几何凸集。

设$P\in L_{X,Y}$的坐标为(x,y)，则$\begin{cases}x=a_1^{\lambda}a_2^{1-\lambda},\\ y=b_1^{\lambda}b_2^{1-\lambda},\end{cases}$ $\lambda\in[0,1]$，不妨设$a_1\leqslant a_2$，$b_1\leqslant b_2$，消去参数λ整理得：$\left(\frac{x}{a_2}\right)^{\ln\frac{b_1}{b_2}}=\left(\frac{y}{b_2}\right)^{\ln\frac{a_1}{a_2}}$，$a_1\leqslant x\leqslant a_2$，$b_1\leqslant y\leqslant b_2$。由此推知，包含互异两点$X(a_1,b_1)$，$Y(a_2,b_2)\in\mathbf{R}_{++}^2$的最小几何凸集是$L_{X,Y}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\left(\frac{x}{a_2}\right)^{\ln\frac{b_1}{b_2}}=\left(\frac{y}{b_2}\right)^{\ln\frac{a_1}{a_2}},a_1\leqslant x\leqslant a_2,b_1\leqslant y\leqslant b_2\right\}$。

4 利用广义凸集研究广义凸函数

易知函数的凸性等价于其上图的凸性。利用本文所建立的广义凸集的结构理论，可将凸分析这一经典结果推广到广义凸函数，即函数的广义凸性等价于其上图的广义凸性。

下面以预不变凸函数为例加以说明。为了行文方便，重新给出如下概念。

定义3　设$K\subseteq\mathbf{R}^n$为关于η(满足条件C)的不变凸集，$f:K\to\mathbf{R}$满足$f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$，$\forall x,y\in K$。称$f$是$K$上的预不变凸函数，如果$\forall\lambda\in(0,1)$，$\forall x,y\in K$，有$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$；称$f$是$K$上的弱预不变凸函数，如果$\forall x,y\in K$，$\exists\lambda\in(0,1)$，有$f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。

对比目前文献关于预不变凸函数的概念，定义3增加了η满足条件C的假设，这一方面是基于广义凸结构的考虑(见例4)，另一方面条件C还是获得预不变凸函数多数性质的前提条件。定义3还特意把“$f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)$，$\forall x,y\in K$”作为定义的前提条件，这是为了预不变凸函数和弱预不变凸函数定义形式的统一，同时该条件能够与广义凸结构的端点性相呼应。

以下设K为关于η(满足条件C)的不变凸集，实值函数$f:K\to\mathbf{R}$的上图象记为

$$epi(f)=\{(x,\alpha)\mid x\in K,f(x)\leqslant\alpha\}。$$

令$F_c(P,Q,\lambda)=(y+\lambda\eta(x,y),\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)$，其中$P(x,\alpha)$，$Q(y,\beta)\in epi(f)$。

容易验证当f是K上的(弱)预不变凸函数时，$F_c(P,Q,\lambda)$是$epi(f)$上的广义凸结构。

这里以验证端点性为例加以说明。对 $\forall P(x,\alpha),Q(y,\beta)\in epi(f)$，有

$$F_c(P,Q,0)=(y+0\eta(x,y),0\alpha+(1-0)\beta)=(y,\beta)\in epi(f)。$$

又 $f(y+\eta(x,y))\leqslant f(x)\leqslant\alpha$，故 $(y+\eta(x,y),\alpha)\in epi(f)$，进而

$$F_c(P,Q,1)=(y+\eta(x,y),\alpha+(1-1)\beta)=(y+\eta(x,y),\alpha)\in epi(f)。$$

这说明 $F_c(P,Q,\lambda)$ 在 $epi(f)$ 上满足端点性。

定理 7　1) f 是 K 上的预不变凸函数当且仅当 $epi(f)$ 是关于 F_c 的凸集；2) f 是 K 上的弱预不变凸函数当且仅当 $epi(f)$ 是关于 F_c 的弱凸集。

证明　仅证 1)，同理可证 2)。

任取 $P(x,\alpha),Q(y,\beta)\in epi(f)$，则 $f(x)\leqslant\alpha,f(y)\leqslant\beta$。当 f 是 K 上的预不变凸函数时，$\forall\lambda\in(0,1)$，有 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\leqslant\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta$，即

$$F_c(P,Q,\lambda)=(y+\lambda\eta(x,y),\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)\in epi(f)。$$

又因为 $F_c(P,Q,\lambda)$ 是 $epi(f)$ 上的广义凸结构，据定义 2 知 $epi(f)$ 是关于 F_c 的凸集。反之，任取 $x,y\in K$，则 $P(x,f(x)),Q(y,f(y))\in epi(f)$。

当 $epi(f)$ 是关于 F_c 的凸集时，对 $\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$F_c(P,Q,\lambda)=(y+\lambda\eta(x,y),\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))\in epi(f),$$

即 $f(y+\lambda\eta(x,y))\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$，据定义 3 知，$f$ 是 K 上的预不变凸函数。　证毕

与定理 7 的 1)相同的结果是文献[12]的定理 3.5。

定理 8　若 f 是 K 上的下半连续的弱预不变凸函数，则 f 是 K 上的预不变凸函数。

证明　由 f 是 K 上的弱预不变凸函数及定理 7 的 2)知，$epi(f)$ 是关于 F_c 的弱凸集。

由 f 在 K 上的下半连续性知，$epi(f)$ 是闭集，进而由定理 6 知，$epi(f)$ 是关于 F_c 的凸集。

由定理 7 的结论 1)知，f 是 K 上的预不变凸函数。　证毕

注 2　在定理 7 中，令 $\eta(x,y)=x-y$，此时 f 是 K 上的凸函数，并有

$$F_c(P,Q,\lambda)=(\lambda x+(1-\lambda)y,\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)=\lambda P+(1-\lambda)Q,$$

其中 $P(x,\alpha),Q(y,\beta)\in epi(f)$，从而 $epi(f)$ 是关于上述 F_c 的凸集等价于 $epi(f)$ 是凸集。

于是作为定理 7 的特殊情形，就有结论：f 是 K 上的凸函数当且仅当 $epi(f)$ 是凸集。

注 3　定理 7 是在广义凸集的结构理论保证下，建立了函数的广义凸性与其上图的广义凸性的等价关系，这种方法不仅对预不变凸函数适用，对其他类型广义凸函数(如预不变拟凸函数等)也适用，因此定理 7 可做进一步的推广。

与定理 8 相同或类似的结果是文献[8]的推论 3.1、文献[10]的定理 3.2 和文献[11]的推论 4，差别在于本文在定义 3、定理 6 及定理 7 的基础上，定理 8 的叙述及证明更为简洁。

5 结论

作为凸集的推广，给出了关于广义凸结构 F 的凸集、近似凸集和弱凸集概念，并借助广义凸结构的性质定理(定理 1)，研究了这 3 种广义凸集的等价刻画(定理 2～定理 5)，并指出了关于 F 的弱凸集成为关于 F 的凸集的一个充分条件(定理 6)。在此基础上，可以定义更为宽泛的广义凸函数的概念，并研究其新性质或对已有性质进行重新梳理给出更为简洁的叙述和证明，这从定理 7 和定理 8 可见一斑。

参考文献：

[1] Rockafellar R T. Convex analysis[M]. Princeton：Princeton University Press，1970.

[2] 梅家骝. 广义凸集[J]. 系统科学与数学，1988，8(2)：97-106.

Mei J L. Generalized convex sets[J]. Systems Science an Mathematical Sciences，1988，8(2)：97-106.

[3] Jeyakumar V，Gwinner J. Inequality systems and optimization[J]. J Math Anal Appl，1991，159(1)：51-71.

[4] Yang X M，Liu S Y. Three kinds of g ener alized convexity [J]. J Optim Theory Appl，1995，86(2)：501-513.

[5] Weir T，Mond B. Pre-invex functions in multiple objective optimization[J]. J Math Anal Appl，1988，38：29-38.

[6] 吴善和. 几何凸函数与琴生型不等式[J]. 数学的实践与认识，2004(2)：155-163.

Wu S H. Geometric convex function and Jensen type inequality[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2004, 34 (2): 155-163.

[7] Mohan S R, Neogy S K. On invex set and preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 1995, 189: 901-908.

[8] 黄金莹,赵宇.广义凸函数与弱近似凸集[J].黑龙江大学自然科学学报,2011,28(2):200-205.
Huang J Y, Zhao Y. Generalized convex functions and weak nearly convex sets[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2011, 28(2): 200-205.

[9] 黄金莹,赵宇,方秀男. F-G 广义凸函数与 F 拟凸函数[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2011,28(4):1-5.
Huang J Y, Zhao Y, Fang X N. The F-G generalized convex and F quasi convex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2011, 28(4): 1-5.

[10] Yang X M, Li D. On properties of preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 2001, 256: 229-241.

[11] 彭再云,秦春蓉.用近似凸性研究预不变凸函数[J].甘肃联合大学学报:自然科学版,2006,20(3):14-16.
Peng Z Y, Qin C R. Study of preinvex functions by nearly convexity[J]. Journal of Gansu Lianhel University: Natural Science, 2006, 20(3): 14-16.

[12] Yang X M, Li D. Semistrictly preinvex functions[J]. J Math Anal Appl, 2001, 258: 287-308.

Operations Research and Cybernetics

Structural Theory of Generalized Convex Sets

HUANG Jinying[1], ZHANG Xiaofei[2], ZHAO Yu[1]

(1. Department of Mathematics, Jiamusi University, Jiamusi Heilongjiang 154007;

2. College of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning 530000, China)

Abstract: This article extends the concepts of convex sets. We consider a definition of a vector-valued function $F: K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$ which is a generalized convex structure over $K\subseteq\mathbf{R}^n$, and introduce a property of it. Furthermore, we give the concepts of convex, nearly convex and weakly convex sets with respect to F, and give the equivalent propositions, respectively. We prove that a closed weakly convex set with respect to $\forall X,Y\in K$ is convex with respect to $\forall X,Y\in K$.

Key words: generalized convex structure; generalized convex sets; convex sets; nearly convex sets; weakly convex sets

(责任编辑 黄 颖)