运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160124

F 凸函数的 Hermite-Hadamard 型不等式*

时统业，尹亚兰，吴　涵
(海军指挥学院 信息系，南京 211800)

摘要:首先证明:若 F 在广义凸集 K 上满足条件 P_1,P_2，$f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上是 F 凸函数，则对任意 $b,a\in K$，$f[F(b,a,\lambda)]$关于 λ 是$[0,1]$上的凸函数。然后利用条件 P_1,P_2，F 凸函数的定义以及凸函数的 Jensen 不等式，建立了与 $f[F(b,a,\lambda)]$关于严格单调增加函数的黎曼积分有关的不等式，从而获得 F 凸函数的新的 Hermite-Hadamard 型不等式。由此在特殊情况下得到凸函数、预不变凸函数、GA 凸函数的加权 Hermite-Hadamard 型不等式。

关键词:Hermite-Hadamard 型不等式;F 凸函数;黎曼积分;凸函数;预不变凸函数;GA-凸函数
中图分类号:O178　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)01-0013-04

1 预备知识

定义 1[1] 称集合 $K\subset\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的广义凸集，若存在向量值映射 $F:K\times K\times[0,1]\to\mathbf{R}^n$，使得 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in K$，有 $F(x,y,\lambda)\in K$。

定义 2[2] 设 $K\subset\mathbf{R}$ 是关于 F 的广义凸集，称 F 在 K 上满足条件 P_1,P_2，若 $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$，且 $\alpha<\beta$，$\forall x,y\in K$，有 P_1:$F\left[y,F(x,y,\beta),1-\dfrac{\alpha}{\beta}\right]=F(x,y,\alpha)$;$P_2$:$F\left[x,F(x,y,\alpha),\dfrac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right]=F(x,y,\beta)$。

引理 1[3] 若 F 在 K 上满足条件 P_1,P_2，则 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall u_1,u_2\in[0,1]$，$u_1\neq u_2$，$\forall x,y\in K$，有:
$$F(x,y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=F[F(x,y,u_1),F(x,y,u_2),\lambda]。$$

定义 3[4] 设 $K\subset\mathbf{R}$ 是关于 F 的广义凸集，F 在 K 上满足条件 P_1,P_2，称 $f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上是 F 凸函数，若 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall x,y\in K$，有 $f[F(x,y,\lambda)]\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$。

引理 2 设 $K\subset\mathbf{R}$ 是关于 F 的广义凸集，F 在 K 上满足条件 P_1,P_2，$f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上是 F 凸函数，$b,a\in K$，则 $f[F(b,a,\lambda)]$关于 λ 是$[0,1]$上的凸函数。

证明 设 $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$，$\alpha,\beta\in[0,1]$，$\alpha+\beta=1$，要证明
$$f[F(b,a,\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2)]\leqslant\alpha f[F(b,a,\lambda_1)]+\beta f[F(b,a,\lambda_2)]。\tag{1}$$
当 $\lambda_1=\lambda_2$ 或 $\alpha=1$ 或 $\beta=1$ 时，(1)式显然成立。

下面假设 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 且 $\alpha,\beta\in(0,1)$，由引理 1 和 F 凸函数的定义得
$$f[F(b,a,\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2)]=f[F(F(b,a,\lambda_1),F(b,a,\lambda_2),\alpha)]\leqslant\alpha f[F(b,a,\lambda_1)]+\beta f[F(b,a,\lambda_2)],$$
即(1)式也成立。　　证毕

2 主要结果

定理 1 设 $K\subset\mathbf{R}$ 是关于 F 的广义凸集，F 在 K 上满足条件 P_1,P_2，$f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上是 F 凸函数，$g:[0,1]\to\mathbf{R}$ 是严格单调增加的函数，则对任意 $a,b\in K$，有
$$[g(1)-g(0)]f\left[F\left(b,a,\frac{g(1)-\int_0^1 g(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{g(1)-g(0)}\right)\right]\leqslant\int_0^1 f(F(b,a,\lambda))\mathrm{d}g(\lambda)\leqslant$$

* **收稿日期**:2015-03-23　　**修回日期**:2015-09-07　　**网络出版时间**:2015-12-02 13:26
作者简介:时统业，男，副教授，研究方向为基础数学，E-mail:shtycity@sina.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20151202.1326.016.html

$$\left[\int_0^1 g(\lambda)\mathrm{d}\lambda - g(0)\right] f(a) + \left[g(1) - \int_0^1 g(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right] f(b)。\tag{2}$$

证明 将$[0,1]n$等分,$\lambda_i=\dfrac{i}{n}(i=0,1,\cdots,n)$,因$g(\lambda)$在$[0,1]$上是严格单调增加的函数,故有

$$g(\lambda_{i+1}) - g(\lambda_i) > 0,(i=0,1,\cdots,n-1),且\sum_{i=0}^{n-1}\frac{g(\lambda_{i+1})-g(\lambda_i)}{g(1)-g(0)}=1。$$

因为F在K上满足条件P_1,P_2,f在K上是F凸函数,故由引理2知$f[F(x,y,\lambda)]$关于λ是$[0,1]$上的凸函数,于是由凸函数的Jensen不等式得

$$\sum_{i=0}^{n-1} f[F(b,a,\lambda_i)]\frac{g(\lambda_{i+1})-g(\lambda_i)}{g(1)-g(0)} \geqslant f\left[F\left(b,a,\frac{\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i(g(\lambda_{i+1})-g(\lambda_i))}{g(1)-g(0)}\right)\right],\tag{3}$$

在(3)式中令$n\to\infty$,得

$$\int_0^1 f[F(b,a,\lambda)]\mathrm{d}g(\lambda) \geqslant [g(1)-g(0)]f\left[F\left(b,a,\frac{\int_0^1\lambda\mathrm{d}g(\lambda)}{g(1)-g(0)}\right)\right]=$$

$$[g(1)-g(0)]f\left[F\left(b,a,\frac{g(1)-\int_0^1 g(\lambda)\mathrm{d}\lambda}{g(1)-g(0)}\right)\right],$$

(2)式的左边部分得证。

又由F凸函数的定义有

$$f[F(b,a,\lambda)]\leqslant\lambda f(b)+(1-\lambda)f(a),\tag{4}$$

(4)式左右两边关于$g(\lambda)$求定积分得

$$\int_0^1 f[F(b,a,\lambda)]\mathrm{d}g(\lambda) \leqslant f(a)\int_0^1(1-\lambda)\mathrm{d}g(\lambda) + f(b)\int_0^1\lambda\mathrm{d}g(\lambda)=$$

$$\left[\int_0^1 g(\lambda)\mathrm{d}\lambda - g(0)\right] f(a) + \left[g(1) - \int_0^1 g(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right] f(b),$$

(2)式的右边部分得证。 证毕

例1 在定理1中取$K=[a,b]\subset(0,\infty)$,$F(x,y,\lambda)=\left(\dfrac{\lambda}{x}+\dfrac{1-\lambda}{y}\right)^{-1}$,$g(\lambda)=\left(\dfrac{\lambda}{b}+\dfrac{1-\lambda}{a}\right)^{-1}$,容易验证$F$满足条件$P_1$,$P_2$,$f(b,a,0)=a$,$f(b,a,1)=b$,$g(\lambda)$是单调增加函数,又设$f:[a,b]\to\mathbf{R}$是$F$凸函数,也即$f$是HA凸函数[5],简单计算可得$\int_0^1 f[F(b,a,\lambda)]\mathrm{d}g(\lambda)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$\int_0^1 g(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\dfrac{ab}{L(a,b)}$,其中$L(a,b)=\dfrac{b-a}{\ln b-\ln a}$,由定理1得到HA凸函数的Hermite-Hadamard型不等式:

$$(b-a)f(L(a,b))\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{b}{L(a,b)}-1\right)af(a)+\left(1-\frac{a}{L(a,b)}\right)bf(b)。$$

推论1 设$K\subset\mathbf{R}$是关于F的广义凸集,对任意$a,b\in K$,$F(b,a,\lambda)$是$[0,1]$上关于λ的严格单调增加的函数,$f:K\to\mathbf{R}$在K上是F凸函数,则任意$a,b\in K$,有

$$[F(b,a,1)-F(b,a,0)]f\left[F\left(b,a,\frac{F(b,a,1)-\int_0^1 F(b,a,\lambda)\mathrm{d}\lambda}{F(b,a,1)-F(b,a,0)}\right)\right]\leqslant\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}f(x)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\left[\int_0^1 F(b,a,\lambda)\mathrm{d}\lambda-F(b,a,0)\right]f(a)+\left[F(b,a,1)-\int_0^1 F(b,a,\lambda)\mathrm{d}\lambda\right]f(b)。$$

证明 在定理1中取$g(\lambda)=F(b,a,\lambda)$即可得证。 证毕

注1 在推论1中,若$F(b,a,\lambda)$分别取$\lambda b+(1-\lambda)a$,$a+\lambda\eta(b,a)$,$b^\lambda a^{1-\lambda}$,则得到凸函数的Hermite-Hadamard不等式[6]、预不变凸函数[7]的Hermite-Hadamard型不等式[8]、GA凸函数[9]的Hermite-Hadamard型不等式[10-11]。

推论2 设$K\subset\mathbf{R}$是关于F的广义凸集,对任意$a,b\in K$,$F(b,a,\lambda)$是$[0,1]$上关于λ的严格单调增加的函

数，$p:[F(b,a,0),F(b,a,1)]\to\mathbf{R}$ 是正的可积函数，$f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上是 F 凸函数，则对任意 $a,b\in K$，有

$$Pf\left[F\left[b,a,\frac{1}{P}\int_0^1\lambda p(F(b,a,\lambda))\mathrm{d}\lambda\right]\right]\leqslant\int_0^1 f[F(b,a,\lambda)]p[F(b,a,\lambda)]\mathrm{d}\lambda\leqslant$$

$$f(a)\int_0^1(1-\lambda)p[F(b,a,\lambda)]\mathrm{d}\lambda+f(b)\int_0^1\lambda p[F(b,a,\lambda)]\mathrm{d}\lambda,$$

特别地，若 $p(F(b,a,\lambda))$ 关于 $\lambda=\frac{1}{2}$ 对称，则有

$$f\left[F\left(b,a,\frac{1}{2}\right)\right]\leqslant\frac{1}{P}\int_0^1 f[F(b,a,\lambda)]p[F(b,a,\lambda)]\mathrm{d}\lambda\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2},$$

其中 $P=\int_0^1 p[F(b,a,\lambda)]\mathrm{d}\lambda$。

证明　在定理 1 中取 $g(\lambda)=\int_0^\lambda p[F(b,a,t)]\mathrm{d}t$ 即可得证。　　证毕

推论 3　设 $K\subset\mathbf{R}$ 是关于 F 的广义凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上是 F 凸函数，对任意 $a,b\in K$，$F(b,a,\lambda)$ 是 $[0,1]$ 上关于 λ 的严格单调增加的函数，$p:[F(b,a,0),F(b,a,1)]\to\mathbf{R}$ 是正的可积函数，则对任意 $a,b\in K$，有

$$f\left[F\left(b,a,\frac{1}{Q}\int_0^1\lambda p[F(b,a,\lambda)]\mathrm{d}F(b,a,\lambda)\right)\right]\leqslant\frac{1}{Q}\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}f(x)p(x)\mathrm{d}x\leqslant(1-\mu)f(a)+\mu f(b),$$

其中 $Q=\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}p(t)\mathrm{d}t$，$\mu=\frac{1}{Q}\int_0^1\lambda p[F(b,a,\lambda)]\mathrm{d}F(b,a,\lambda)$。

证明　在定理 1 中取 $g(\lambda)=\int_{F(b,a,0)}^{F(b,a,1)}p(t)\mathrm{d}t$ 即可得证。　　证毕

注 2　在推论 3 中，若取 $F(b,a,\lambda)$ 为 $\lambda b+(1-\lambda)a$，则得到凸函数的加权 Hermite-Hadamard 不等式[12]：

$$\int_a^b p(t)\mathrm{d}tf\left[\frac{\int_a^b tp(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b p(t)\mathrm{d}t}\right]\leqslant\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x\leqslant f(a)\int_a^b\frac{b-t}{b-a}p(t)\mathrm{d}t+f(b)\int_a^b\frac{t-a}{b-a}p(t)\mathrm{d}t;$$

若取 $F(b,a,\lambda)$ 为 $a+\lambda\eta(b,a)$，则得到预不变凸函数的加权 Hermite-Hadamard 型不等式：

$$\int_a^{a+\eta(b,a)}p(t)\mathrm{d}tf\left[\frac{\int_a^{a+\eta(b,a)}tp(t)\mathrm{d}t}{\int_a^{a+\eta(b,a)}p(t)\mathrm{d}t}\right]\leqslant\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)p(x)\mathrm{d}x\leqslant$$

$$f(a)\int_a^{a+\eta(b,a)}\frac{a+\eta(b,a)-t}{\eta(b,a)}p(t)\mathrm{d}t+f(b)\int_a^{a+\eta(b,a)}\frac{t-a}{b-a}p(t)\mathrm{d}t;$$

若取 $F(b,a,\lambda)$ 为 $b^\lambda a^{1-\lambda}$，则得到 GA 凸函数的加权 Hermite-Hadamard 型不等式[13]。

参考文献：

[1] 黄金莹，赵宇. 关于半连续函数与凸函数的注记[J]. 高等数学研究，2010，13(4)：91-93.
Huang J Y，Zhao Y. Notes on semicontinuous functions and convex functions[J]. Studies in College Mathematics，2010，13(4)：91-93.

[2] 黄金莹，赵宇. 广义凸函数与弱近似凸集[J]. 黑龙江大学学报：自然科学版，2011，28(2)：200-205.
Huang J Y，Zhao Y. Generalized convex functions and weak nearly convex sets[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University：Natural Science，2011，28(2)：200-205.

[3] 康兆敏，赵宇，方秀男. F-G 广义凸函数的若干性质[J]. 贵州师范大学学报：自然科学版，2011，29(2)：72-76.
Kang Z M，Zhao Y，Fang X N. Properties of F-G generalized convex functions[J]. Journal of Natural Science of Guizhou Normal University：Natural Science，2011，29(2)：72-76.

[4] 黄金莹，赵宇. 广义凸函数的 Hadamard 不等式[J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2013，30(4)：1-5.
Huang J Y，Zhao Y. Hadamard inequalities of generalized convex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University：Natural Science，2013，30(4)：1-5.

[5] 陈少元. HA-凸函数及其判定与应用[J]. 湖北职业技术学院学报，2014，17(2)：99-102.
Chen S Y. HA-convex function，its justice and application[J]. Journal of Hubei Polytechnic Institute，2014，17(2)：99-102.

[6] Mitrinović D S. Analytic inequalities[M]. New-York，Heidelerg，Berlin：Springer-Verlag，1970.

[7] Weir T，Mond B. Preinvex functions in multiobjective optimization[J]. J Math Anal Appl，1988，136(1)：29-38.

[8] Noor M A. On Hadamard integral inequalities involving two log-preinvex functions[J]. J Inequal Pure and Appl Math,2007,8(3):75-76.

[9] 吴善和. GA-凸函数与琴生不等式[J]. 贵州师范大学学报:自然科学版,2004,22(2):52-55.
Wu S H. GA-convex function and Jensen type inequality [J]. Journal of Natural Science of Guizhou Normal University: Natural Science,2004,22(2):52-55.

[10] Zhang X M,Chu Y M. A double inequality for the gamma and psi functions[J]. International Journal of Modern Mathematics,2008,3(1):23-27.

[11] 华云. 关于 GA-凸函数的 Hadamard 型不等式[J]. 大学数学,2008,24(2):147-149.
Hua Y. A Hadamard type inequality of GA-convex function[J]. College Mathematics,2008,24(2):147-149.

[12] WU S H. On the weighted generalization of the Hermite-Hadamard inequality and its applications[J]. Rocky Mountain J Math,2009,39(5):1741-1749.

[13] 时统业,施未来,陆敏,等. GA 凸函数的 Hadamard 型不等式的推广[J]. 大学数学,2013,29(2):59-64.
Shi T Y, Shi W L, Lu M, et al. Generalization of Hadamard's inequality for GA-convex functions[J]. College Mathematics,2013,29(2):59-64.

Operations Research and Cybernetics

Hermite-Hadamard Type Inequalities for F-Convex Functions

SHI Tongye, YIN Yalan, WU Han

(Department of Information, PLA Naval Command College, Nanjing 211800, China)

Abstract: Firstly, it is pointed out that if F satisfies conditions P_1, P_2 over generalized convex set K, $f: K \to R$ is F-convex function on K, then $f[F(x,y,\lambda)]$ is convex function over λ on $[0,1]$ for any $x, y \in K$. Secondly, an inequality associated with Riemann integral of $f[F(x,y,\lambda)]$ over strictly monotone increasing functions is established by using conditions P_1, P_2, the definition and Jensen's inequality of convex functions, therefore, new Hermite-Hadamard type inequalities for F-convex functions are obtained. Finally, under special conditions, weighted Hermite-Hadamard type inequalities for convex functions, preinvex functions, GA-convex functions are derived.

Key words: Hermite-Hadamard type inequality; F-convex function; Riemann integral; convex function; preinvex function; GA-convex function

(责任编辑 黄 颖)