DOI:10.11721/cqnuj20160111

H-交换代数扭曲冲积的 Maschke 型定理*

郭双建[1]，董丽红[2]
(1. 贵州财经大学 数学与统计学院，贵阳 550025；2. 河南师范大学 数学与信息科学学院，河南 新乡 453007)

摘要:利用著名的Maschke型定理讨论了H-交换代数扭曲冲积的半单性,设H为域k上的有限维Hopf代数带有非退化的积分t,A是Yetter-Drinfeld模代数和H-双模代数,并且是H交换代数，根据已有文献的工作,给出了H交换代数扭曲冲积的Maschke型定理，通过对H中的积分和H的投射性质的研究，刻画了扭曲冲积$A\# H$的半单性。利用Hopf代数的模论和双模代数的性质，对任意的左$A\# H$-模M和N,定义了H的右A-模结构，并且验证了H是A-A双模，并讨论了$A\# H$-模范畴中的态射集的性质与其上的模作用,证明了$Hom_A(M,N)$是一个左$A\# H$-模，从而得到$(Hom_A(M,N))^H={}_{A\# H}Hom(A,M)$,并且进一步研究了$A$的投射性质。若假设$A$是半单的,得到$A\# H$是半单的当且仅当$A$是投射的左$A\# H$-模。最后给出在$A$是半单的前提下,则$A\# H$是半单的当且仅当$t\cdot c=1$对某个$C\in A$。

关键词: Maschke 型定理;扭曲冲积;H-交换代数
中图分类号:O153.3　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2016)01-0055-03

Maschke定理有限群表示论中最著名的结论,随后,Larson 和 Sweedler[1]利用 Maschke 型定理刻画 Hopf 代数的半单性,由于 Maschke 型定理在 Hopf 代数中是研究的热点问题。因此,许多学者一度热衷于此方面的研究,在文献 Caenepeel 等[2],Doi[3]，Yang[4]和郭双建[5]中出现不同形式的 Maschke 型定理，作为文献[5]工作的延续,本文得到 H 交换代数上的 Maschke 型定理。

1 预备知识

定义 1[6]　设 H 是 Hopf 代数，A 是 H-双模代数,(其中左 H-模映射为$\rightharpoonup$,右 H-模数映射为$\leftharpoonup$),则有一个扭曲冲积代数：$A\# H$ 定义在向量空间 $A\otimes H$，乘法为：

$$(a\otimes h)(b\otimes g)=a(h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup S(h_3))\otimes h_2 g。$$

定义 2　设 H 是 Hopf 代数，代数 A 称为左右 Yetter-Drinfeld 模代数，如果 A 满足下列条件：

1) A 是左 H-模代数；

2) A 是右 H-余模代数；

3) 1)和 2)满足 Yetter-Drinfeld 模条件 $h_1 a_{(0)}\otimes h_2 a_{(1)}=(h_2 a)_{(0)}\otimes(h_2 a)_{(1)}h_1$。

定义 3　设 H 是 Hopf 代数，A 是 H-双模代数,称 A 为 H-交换代数，若满足，对于任意的 $a,b\in A$，有

$$ab=\sum b_{(0)}(b_{(1)1}\rightharpoonup a\leftharpoonup S(b_{(1)2}))。$$

2 H-交换代数扭曲冲积的 Maschke 型定理

设 H 是 Hopf 代数，A 是左右 Yetter-Drinfeld 模代数和 H-双模代数,$A\# H$ 为扭曲冲积，且满足：

$$\sum a\leftharpoonup S(h_1)\otimes h_2=\sum a\leftharpoonup S(h_2)\otimes h_1 \tag{1}$$

定理 1　对任意的左 $A\# H$-模 M，则

* **收稿日期:**2014-03-20　**修回日期:**2014-04-14　**网络出版时间:**2015-12-02 13:27
资助项目:国家自然科学基金青年基金(No.11101128);国家自然科学基金数学天元基金(No.11426073);江苏省自然科学基金(No.BK2012736);贵州省科学技术基金(No.2014GZ81365);贵州省高校优秀科技创新人才支持计划(No.黔教合KY字[2015]481);贵州省教育厅“125”重大科技专项资助项目(No.黔教合重大专项字[2012]011)

作者简介:郭双建,副教授,博士,研究方向为 Hopf 代数和李代数,E-mail: guoshuangjian888@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20151202.1327.042.html

$$_{A\#H}Hom(A,M)\cong M^H,$$

其中 $M^H=\{m\in M|h\cdot m=\varepsilon(h)m\}$,$A$ 是左 $A\# H$-模且

$$(a\# h)\rightharpoonup b=a(h_1\rightharpoonup b\leftharpoonup S(h_2)),$$

同构如下 $F:f\rightarrow f(1_A)$。

证明 易证 A 是左 $A\# H$-模。接下来验证 F 是双射。

首先,对任意的 $f\in{}_{A\# H}Hom(A,M)$ 和 $h\in H$,则

$$h\cdot f(1_A)=f((1_A\# h)\rightharpoonup 1_A)=f(h_1\rightharpoonup 1_A\leftharpoonup S(h_2))=f(\varepsilon(h)1_A)=\varepsilon(h)f(1_A),$$

所以 $f(1_A)\in M^H$, 如果存在 $g\in{}_{A\# H}Hom(A,M)$并且 $f(1_A)=g(1_A)$,易证 $f(a)=g(a)$,也就是说 F 是单射。

其次,对任意的 $0\neq m\in M^H$,给定 $\varphi:a\rightarrow(a\# 1_H)\cdot m$。

接下来证 $\varphi\in{}_{A\# H}Hom(A,M)$,对任意的 $a\in A$ 和 $b\# h\in A\# H$,

$$(b\# h)\rightharpoonup\varphi(a)=(b\# h)\cdot((a\# 1_H)\cdot m)=(b(h_1\rightharpoonup a\leftharpoonup S(h_3))\# h_2)\cdot m=$$
$$(b(h_1\rightharpoonup a\leftharpoonup S(h_3)))\cdot(h_2\cdot m)=(b(h_1\rightharpoonup a\leftharpoonup S(h_3)))\cdot\varepsilon(h_2)m=$$
$$(b(h_1\rightharpoonup a\leftharpoonup S(h_2))\# 1_H)\cdot m=\varphi((b\# h)\rightharpoonup a)。$$

因此,$\varphi\in{}_{A\# H}Hom(A,M)$,且 $F(\varphi)=\varphi(1_A)=m$,也就是说 F 是满射。 证毕

引理 1 设 H 是 Hopf 代数, A 是 Yetter-Drinfeld 模代数和 H-双模代数,并且是 H-交换的,对任意的左 $A\# H$-模 M,定义右 A-模 M,

$$m\cdot a=\sum a_{(0)}\cdot(a_{(1)}\cdot m),$$

则 M 成为 A-A-双模。

证明 只证 M 满足 A-双模相容条件, 对任意的 $a,b\in A$ 和 $m\in M$,

$$(a\cdot m)\cdot b=\sum b_{(0)}\cdot(b_{(1)}\cdot(a\cdot m))=\sum b_{(0)}\cdot(b_{(1)1}\rightharpoonup a\leftharpoonup S(b_{(1)3})\cdot(b_{(1)2}\cdot m))\overset{(1)}{=}$$
$$\sum b_{(0)}\cdot(b_{(1)1}\rightharpoonup a\leftharpoonup S(b_{(1)3})\cdot(b_{(1)2}\cdot m))=\sum b_{(0)}\cdot(b_{(1)1}\rightharpoonup a\leftharpoonup S(b_{(1)2})\cdot(b_{(1)3}\cdot m))=$$
$$\sum b_{(0)(0)}\cdot(b_{(0)(1)1}\rightharpoonup a\leftharpoonup S(b_{(0)(1)2})\cdot(b_{(1)}\cdot m))=\sum ab_{(0)}\cdot(b_{(1)}\cdot m))=\sum a\cdot(m\cdot b)。$$

证毕

引理 2 设 H 是 Hopf 代数, A 是 Yetter-Drinfeld 模代数和 H-双模代数,并且是 H-交换的,对任意的左 $A\# H$-模 M 和 N,

i)$Hom_A(M,N)$是一个左 $A\# H$-模;

ii)$(Hom_A(M,N))^H={}_{A\# H}Hom(M,N)$, 其中 $Hom_A(M,N)$ 表示右 A-模同态组成的空间。

证明 i) 对任意的左 $A\# H$-模 M 和 N, 由引理 2,M 和 N 能做成 A-A-双模,直接验证下面结构能使 $Hom_A(M,N)$做成左 $A\# H$-模:

$$((a\# h)\cdot f)(m)=a\cdot(h_1\cdot f(S(h_2)\cdot m))$$

ii) 易证,对任意的 $f\in{}_HHom(M,N)$, $f\in{}_AHom(M,N)$当且仅当 $f\in Hom_A(M,N)$,

易证 $(Hom_A(M,N))^H={}_HHom(M,N)\cap Hom_A(M,N)$。 证毕

定理 3 设 H 是有限维 Hopf 代数, A 是 Yetter-Drinfeld 模代数和 H-双模代数,并且是 H-交换的,如果 A 是半单的,则 $A\# H$ 是半单的当且仅当 A 是一个投射的左 $A\# H$-模。

定理 3 的证明类似于文献[5]。

引理 3 设 H 是有限维 Hopf 代数, $0\neq t\in\int_r^H$, A 是 Yetter-Drinfeld 模代数和 H-双模代数,并且是 H-交换的,则:

1) A 是一个投射的左 $A\# H$-模;

2) 存在某一个 $c\in A$ 满足 $t\cdot c=1$。

是等价的。

根据上述的结论可得下列性质,

性质 1 设 H 是有限维 Hopf 代数, $0\neq t\in\int_r^H$, A 是 Yetter-Drinfeld 模代数和 H-双模代数,并且是 H-交

换的，假设 A 是半单的，则 $A\#H$ 是半单的充要条件是 $t\cdot c=1$ 对某一个 $c\in A$。

参考文献：

[1] Larson R G, Sweedler M, An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras[J]. Amer J Math, 1969, 91: 75-93.

[2] Caenepeel S, Militaru G, Zhu S. A Maschke-type theorem for Doi-Hopf modules and applications [J]. J Algebra, 1997, 187: 388-412.

[3] Doi Y. Hopf extensions of algebras and Maschke type thorems[J]. Israel J of Math, 1990, 72: 99-108.

[4] Yang S L. Global dimension for Hopf actions[J]. Comm Algebra, 2002, 30(8): 3653-3667.

[5] Dong L, Jiao Z. Maschke type theorem for twisted smash product[J]. J Algebra Discrete Struct, 2008, 6(3): 119-126.

[6] 郭双建，董丽红. 拟三角 Hopf 代数扭曲冲积的 Maschke 型定理[J]，南京师范大学学报：自然科学版，2013，36(4)：27-29.

Guo S J, Dong L H. Maschke type theorem for twisted smash products of quasitriangular Hopf algebras[J]. Journal of Nanjing Normal University: Natural Science Edition, 2013, 36(4): 27-29.

[7] Wang S H, Li J Q. On twisted smash products for bimodule algebras and the Drinfeld double[J]. Comm Algebra, 1998, 26(8): 1435-1444.

[8] Wang S H. On braided Hopf algebra structures over the twisted smash products[J]. Comm Algebra, 1999, 27(11): 5561-5573.

A Maschke Type Theorem for Twisted Smash Products of H-commutative Algebras

GUO Shuangjian[1], DONG Lihong[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025;

2. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang Henan 453007, China)

Abstract: The paper is discussed with the semisimplicity of twisted smash products of H-commutative algebras by famous Maschke type theorem. Let H be a finite dimensional Hopf algebra over a field k with a non-degenerate integral t and A Yetter-Drinfeld module algebra and H-bimodule algebra, and H-commutative algebra. Based on the work of Wang and Li[6], we give Maschke's theorem for twisted smash products of H-commutative algebras. Through the research on integral and the projective properties of H, charicterized the semisimplicity of twisted smash products $A\#H$. By modular theory of Hopf algebras and the properties of bimodule algebras, for any left-module M and M, defined the structure of right A-module, checked M is A-A bimodule and discussed the properties and module actions of morphism set in a $A\#H$-modules category, we prove that $Hom_A(M,N)$ is a left $A\#H$-module, thus we obtain H. Furthermore, we study the projective properties of A. Assume that A is semisimple, we obtain that $A\#H$ is semisimple if and only if A is projective as a left $A\#H$-module. Finally, under the condition of A is semisimple, we obtain $A\#H$ is semisimple if and only if H for some H.

Key words: Maschke type theorem; twisted smash product; H-commutative algebra

（责任编辑 许 甲）