DOI:10.11721/cqnuj20160126

非奇异 H-矩阵的含参量实用判别法则*

张 俊 丽
(内蒙古民族大学 数学学院，内蒙古 通辽 028043)

摘要:非奇异 H-矩阵是有着广泛应用的重要矩阵类,但在实用中其判定是十分困难的。本文根据 α-对角占优矩阵与非奇异 H-矩阵的关系,通过区间细分的方法,得出了非奇异 H-矩阵的含参量实用判别法则,对已有的相关结果进行了推广和改进,并用数值算例证实了该判定准则的有效性。

关键词:非奇异 H-矩阵;α-对角占优矩阵;不可约;非零元素链

中图分类号:O151.21　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2016)01-0058-05

非奇异 H-矩阵是很重要的一类特殊矩阵,它在数值计算、系统理论、经济数学、控制论等诸多领域有着重要应用,但其数值判定比较困难。因此对非奇异 H-矩阵的判定一直是学者们关注的研究课题[1-9]。本文在文献[2]的基础上通过对行标细分的方法,利用不等式放缩得到了非奇异 H-矩阵含参量的实用判别法则,得到了更为广泛的判定条件,推广和改进了相关结果。

用 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 阶复矩阵的集合。$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$\alpha\in(0,1]$,$N=\{1,2,\cdots,n\}$,$\Lambda_i=\Lambda_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$,$C_i=C_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ji}|$。

定义 1[3]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若 $|a_{ii}|\geqslant\Lambda_i(\boldsymbol{A})(i\in N)$,称 $\boldsymbol{A}$ 为对角占优矩阵,记作 $\boldsymbol{A}\in D_0$;若每个不等式都是严格的,称 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵,记作 $\boldsymbol{A}\in D$;如果存在正对角阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{AX}\in D$,称 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格对角占优矩阵(又称非奇异 H-矩阵),记作 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}$。

定义 2[7]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,如果存在 $\alpha\in(0,1]$,使得对 $\forall i\in N$,有 $|a_{ii}|\geqslant\Lambda_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha}$。称 $\boldsymbol{A}$ 为 α-对角占优矩阵,记作 $\boldsymbol{A}\in D_0(\alpha)$;若每个不等式都是严格的,称 $\boldsymbol{A}$ 为严格 α-对角占优矩阵,记作 $\boldsymbol{A}\in D(\alpha)$;如果存在正对角阵 $\boldsymbol{X}$,满足 $\boldsymbol{AX}\in D(\alpha)$,称 $\boldsymbol{A}$ 为广义严格 α-对角占优矩阵,记作 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}(\alpha)$。

定义 3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若 $\boldsymbol{A}\in D_0(\alpha)$,不可约,且至少有一个不等式严格成立,称 $\boldsymbol{A}$ 为不可约 α-对角占优矩阵;若 $\boldsymbol{A}\in D_0(\alpha)$,并对于满足等式成立的下标 i 都存在非零元素链 a_{ii_1},$a_{i_1i_2}$,$\cdots$,a_{i_kj},使得 $|a_{jj}|\geqslant\Lambda_j^{\alpha}C_j^{1-\alpha}$,称 $\boldsymbol{A}$ 具为非零元素链 α-对角占优矩阵。

引理 1[5]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$\alpha\in(0,1]$,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足如下条件之一:1) $\boldsymbol{A}\in D(\alpha)$;2) $\boldsymbol{A}$ 为不可约 α-对角占优矩阵,且至少有一行严格对角占优;3) $\boldsymbol{A}$ 为具有非零元素链 α-对角占优矩阵。则 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}$。

引理 2[6]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$\alpha\in(0,1]$,则 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}(\alpha)$。

显然,$N_1\cup N_2\cup N_3=N$,若 $N_1\cup N_2\neq\varnothing$,则 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}$;若 $N_3=\varnothing$,则 $\boldsymbol{A}\notin\widetilde{D}$;若有 $i\in N$,使得 $a_{ii}=0$,则 $\boldsymbol{A}\notin\widetilde{D}$。故本文总假设 $a_{ii}\neq0$,$\forall i\in N$;$N_1\cup N_2\neq\varnothing$;$N_1\neq\varnothing$。

记 $N_1=\{i\in N:|a_{ii}|=\Lambda_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha}\}$,$N_2=\{i\in N:0<|a_{ii}|<\Lambda_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha}\}$,$N_3=N-N_1-N_2$。将 N_2 进一步划分为

* **收稿日期:**2015-04-27　**修回日期:**2015-10-20　**网络出版时间:**2015-12-02　13:26
资助项目:国家自然科学基金(No. 11361038);内蒙古自然科学与技术研究基金(No. NJZY13159);内蒙古民族大学自然科学基金(No. NMD1305)

作者简介:张俊丽,女,讲师,研究方向为数值代数及应用,E-mail:jl_zhang7706@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20151202.1326.010.html

$N_2=N_2^{(1)}\cup N_2^{(2)}\cup\cdots\cup N_2^{(m)}$，其中 m 是任意正整数，且

$$N_2^{(1)}=\left\{i\in N:0<|a_{ii}|<\frac{1}{m}\Lambda_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha}\right\},N_2^{(k)}=\left\{i\in N:\frac{k-1}{m}\Lambda_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha}\leqslant|a_{ii}|<\frac{k}{m}\Lambda_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha}\right\},k=2,3,\cdots,m。$$

这里部分 $N_2^{(k)}$ 可能为空集。

记 $$\delta_i=\frac{\Lambda_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha}-|a_{ii}|}{\Lambda_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha}},r=\max_{i\in N_2}\{\delta_i\},x_{2i}^{k}=\frac{k\Lambda_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha}-|a_{ii}|}{m\Lambda_i^{\alpha}C_i^{1-\alpha}},\forall i\in N_2^{(k)},k=1,2,\cdots,m。$$

$$x_{1i}=r,\forall i\in N_1。R_i(\boldsymbol{A})=\Big(r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+r\sum_{t\in N_3,i\neq t}|a_{it}|\Big)C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\forall i\in N_3。$$

$$s=\max_{i\in N_3}\frac{\Big[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)\Big]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}{R_i(\boldsymbol{A})-\sum_{t\in N_3,\neq i}|a_{it}|\frac{R_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}。$$

1 主要结论

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\alpha\in(0,1]$。如果

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}r>\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\forall i\in N_1,\tag{1}$$

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}x_{2i}^{(k)}>\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\forall i\in N_2^{(k)},\tag{2}$$

则 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}$。

证明　由 r 及 $x_{2i}^{(k)}$ 的表达式知，$0<r<1$，$r>x_{2i}^{(k)}$。故对 $\forall i\in N_3$，有

$$R_i(\boldsymbol{A})<r\Big[\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\Big]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=r\Lambda_iC^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}<r|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}},$$

即 $r>\dfrac{R_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}$，$\forall i\in N_3$。

由 s 及 r 的表达式知 $0\leqslant s\leqslant1$，从而 $r>\dfrac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}$。因此，存在 $\varepsilon>0$，同时满足下面几个式子：

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}r>\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+\varepsilon\sum_{t\in N_3}|a_{it}|C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},i\in N_1,\tag{3}$$

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}x_{2i}^{(k)}>\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}+\varepsilon\sum_{t\in N_3}|a_{it}|C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},i\in N_2^{(k)},\tag{4}$$

$$r>\frac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}+\varepsilon,\forall i\in N_3。\tag{5}$$

构造正对角矩阵 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，且令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AX}=(b_{ij})_{n\times n}$，其中：

$$x_i=r,\forall i\in N_1;x_i=x_{2i}^{(k)},\forall i\in N_2^{(k)};x_i=\frac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}+\varepsilon,\forall i\in N_3。$$

$\forall i\in N_1$，由(3)式得：

$$\Lambda_i(\boldsymbol{B})[C_i(\boldsymbol{B})]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\left(\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}+\varepsilon\right)\right][rC_i(\boldsymbol{A})]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}<$$

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}r\cdot r^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=(|a_{ii}|r)^{\frac{1}{\alpha}}=|b_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}。$$

$\forall i\in N_2^{(k)}$，由(4)式得：

$$\Lambda_i(\boldsymbol{B})[C_i(\boldsymbol{B})]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\left(\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}+\varepsilon\right)\right][x_{2i}^{(k)}C_i(\boldsymbol{A})]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}<$$

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}x_{2i}^{(k)}\cdot(x_{2i}^{(k)})^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=(|a_{ii}|x_{2i}^{(k)})^{\frac{1}{\alpha}}=|b_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}。$$

$\forall i\in N_3$,由 s 的表达式得：

$$\Lambda_i(\boldsymbol{B})[C_i(\boldsymbol{B})]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\left(\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}+\varepsilon\right)\right]\left[\left(\frac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}+\varepsilon\right)C_i(\boldsymbol{A})\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}<$$

$$\Big[sR_i(\boldsymbol{A})+\varepsilon\sum_{t\in N_3}|a_{it}|C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\Big]\left[\frac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}+\varepsilon\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}<(sR_i(\boldsymbol{A})+\varepsilon\ |a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}})\left(\frac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}+\varepsilon\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=$$

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}+\varepsilon\right)^{\frac{1}{\alpha}}=|b_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}。$$

综上所述,对 $\forall i\in N$,有 $|b_{ii}|>\Lambda_i(\boldsymbol{B})^{\alpha}[C_i(\boldsymbol{B})]^{1-\alpha}$,即 $\boldsymbol{B}\in\widetilde{D}(\alpha)$,由引理 2 知 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}$。　证毕

在定理 1 中,若取 $m=1,\alpha=1$,得到文献[2]中的定理 1;若取 $m=1$,则有下面的推论。

推论　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$,$\alpha\in(0,1]$。如果：

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}r>\left[r\sum_{t\in N_1,t\neq i}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\forall i\in N_1,$$

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}x_{2t}>\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{t\in N_2,t\neq i}|a_{it}|x_{2t}+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\forall i\in N_2。$$

则 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}$。

定理 1 的判定方法可推广到不可约和具有非零元素链的情形,具体如下。

定理 2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$不可约,$\alpha\in(0,1]$。如果：

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}r\geqslant\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\forall i\in N_1,\tag{6}$$

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}x_{2i}^{(k)}\geqslant\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\forall i\in N_2^{(k)}。\tag{7}$$

则 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}$。

证明　构造正对角矩阵 $\overline{\boldsymbol{X}}=\mathrm{diag}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$,且令 $\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}}=(\bar{b}_{ij})_{n\times n}$,其中 $x_i=r,\forall i\in N_1$;$x_i=x_{2i}^{(k)}$,$\forall i\in N_2^{(k)}$;$x_i=\dfrac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}},\forall i\in N_3$。

$\forall i\in N_1$,由(6)式得：

$$\Lambda_i(\overline{\boldsymbol{B}})[C_i(\overline{\boldsymbol{B}})]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right][rC_i(\boldsymbol{A})]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\leqslant$$

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}rr^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=(|a_{ii}|r)^{\frac{1}{\alpha}}=|\bar{b}_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}。$$

$\forall i\in N_2^{(k)}$,由(7)式得：

$$\Lambda_i(\overline{\boldsymbol{B}})[C_i(\overline{\boldsymbol{B}})]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right][x_{2i}^{(k)}C_i(\boldsymbol{A})]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\leqslant$$

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}x_{2i}^{(k)}[x_{2i}^{(k)}]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=|\bar{b}_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}。$$

$\forall i\in N_3$,由 s 的表达式得：

$$\Lambda_i(\overline{\boldsymbol{B}})[C_i(\overline{\boldsymbol{B}})]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]\left[\frac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}C_i(\boldsymbol{A})\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\leqslant$$

$$sR_i\left[\frac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}\frac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}\left[\frac{sR_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=|\bar{b}_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}。$$

总之,对 $\forall i\in N$,有 $|\bar{b}_{ii}|>\Lambda_i(\overline{\boldsymbol{B}})^{\alpha}[C_i(\overline{\boldsymbol{B}})]^{1-\alpha}$成立,且至少有一个不等式严格成立。又因 $\boldsymbol{A}$ 不可约,则 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 不

可约，故 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 为不可约 α-对角占优矩阵，由引理 1 得 $\overline{\boldsymbol{B}}\in\widetilde{D}$，从而 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}(\alpha)$，进而由引理 2 可知 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}$。　证毕

记 $$J_1=\left\{i\in N_1:|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}r>\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right\},$$

$$J_2^{(k)}=\left\{i\in N_2^{(k)}:|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}x_{2i}^{(k)}>\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right\},\ J_2=\bigcup_{k=1}^{m}J_2^k,$$

$$J_3=\left\{i\in N_3:|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}>\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right][C_i(\boldsymbol{A})]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right\}。$$

类似地，可以证明如下的定理 3。

定理 3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\alpha\in(0,1]$。如果

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}r\geqslant\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\ \forall i\in N_1,$$

$$|a_{ii}|^{\frac{1}{\alpha}}x_{2i}^{(k)}\geqslant\left[r\sum_{t\in N_1}|a_{it}|+\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{t\in N_2^{(j)}}|a_{it}|x_{2t}^{(j)}\Big)+\sum_{t\in N_3}|a_{it}|\frac{sR_t}{|a_{tt}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_i^{\frac{1-\alpha}{\alpha}},\ \forall i\in N_2^{(k)},$$

成立，且上式中至少有一个以严格不等式成立，即 $J_1\cup J_2\neq\varnothing$，若对 $\forall i\in\bigcup_{i=1}^{3}\{N_i-J_i\}$，均存在非零元素链 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_kj}$，满足 $j\in\bigcup_{i=1}^{3}J_i$，则 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}$。

2 数值算例

考虑矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&0&1&0\\1&5&2&2&0\\0&1&4&0&5\\0&0&2&10&2\\0&1&0&3&20\end{pmatrix}$，可以验证用文献[1-4]定理无法判定。若利用本文的定理 1 的推论，取 $\alpha=0.5$，则 $N_1=\{1,2\}$，$N_2=\{3\}$，$N_3=\{4,5\}$，$r=0.183\,5$，$R_4=4.406$，$R_5=5.141$，$s=0.517\,8$，且：

$$|a_{11}|^{\frac{1}{\alpha}}r=0.734>\left[r|a_{12}|+|a_{13}|r+|a_{14}|\frac{sR_4}{|a_{44}|^{\frac{1}{\alpha}}}+|a_{15}|\frac{sR_5}{|a_{55}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_1^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=0.57,$$

$$|a_{22}|^{\frac{1}{\alpha}}r=4.587\,5>\left[r|a_{21}|+|a_{23}|r+|a_{24}|\frac{sR_4}{|a_{44}|^{\frac{1}{\alpha}}}+|a_{25}|\frac{sR_5}{|a_{55}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_2^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=3.576,$$

$$|a_{33}|^{\frac{1}{\alpha}}r=2.936>\left[r|a_{31}|+|a_{32}|r+|a_{34}|\frac{sR_4}{|a_{44}|^{\frac{1}{\alpha}}}+|a_{35}|\frac{sR_5}{|a_{55}|^{\frac{1}{\alpha}}}\right]C_3^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}=0.867。$$

由此可以判定 $\boldsymbol{A}\in\widetilde{D}$。

参考文献：

[1] 黄廷祝. 非奇异 H-矩阵的简捷判据[J]. 计算数学，1993，15(3)：318-328.

Huang T Z. Some simple determinate conditions for nonsingular H-matrix[J]. Mathematica Numerica Sinica，1993，15(3)：318-328.

[2] 朱海，王键，徐仲. 非奇异 H-矩阵的实用判别准则[J]. 数学的认识与实践，2014，44(7)：280-285.

Zhu H，Wang J，Liao X W，et al. Practical criteria for nonsingular H-matrices[J]. Mathematics in Practice and Theory，2014，44(7)：280-285.

[3] 黄泽军，刘建州. 非奇异 H-矩阵的一类新迭代判别法[J]. 工程数学学报，2008，25(5)：939-942.

Huang Z J，Liu J Z. New iterative criteria for nonsingular H-matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics，2008，25(5)：939-942.

[4] 王峰. 非奇异 H-矩阵判定的迭代准则[J]. 安徽大学学报：自然科学版，2011，36(6)：16-20.

Wang F. New iterative codes for nonsingular H-matrices[J]. Journal of Anhui University：Natural Science Edition，2011，36(6)：16-20.

[5] Berman A,Plemmons R J. Nonnegative Matrix in the Mathematical Sciences[M]. New York:Academic Press,1979.

[6] Sun YX. An Improvement on a theorem by ostrowski and its applications[J]. Northeastern Math J,1991,7(4):497-520.

[7] 周伟伟,徐仲. 非奇 H-矩阵细分迭代准则[J]. 数值计算与计算机应用,2011,32(4):293-300.
Zhou W W,Xu Z. Subdivided and iterative codes for nonsingular H-matrices[J]. Journal and Numercial Methods and Computer Applications,2011,32(4):293-300.

[8] 李继承,张文修. H 矩阵的判定[J]. 高等学校计算数学学报,1999,21(3):264-268.
Li J C,Zhang W X. The criteria of H-matrix[J]. Numerical Mathematics a Journal of Chinese Universities, 1999, 21(3):264-268.

[9] 王洁,刘建州,黄泽军. 非奇异 H-矩阵的一类新递进判别法[J]. 工程数学学报,2012,29(3):406-421.
Wang J, Liu J Z, Huang Z J. New progressive criteria for nonsingular H-matrices[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics,2012,29(3):406-421.

[10] 孙玉祥. 广义对角占优矩阵的充分条件[J]. 高等学校计算数学学报,1997,9(3):216-223.
Sun Y X. Sufficient conditions for generalized diagonally dominant matrices[J]. Numerical Mathematics a Journal of Chinese Universities,1997,9(3):216-223.

Practical Criteria with Parameter for Nonsingular H-matrices

ZHANG Junli

(School of Mathematics, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao Inner Mongolia 028043, China)

Abstract: The nonsingular H-matrix is an important class of matrices with wide applications, but it is difficult to determine a nonsingular H-matrix in practice. In this paper, By the method of subdivided, some iterative criteria with parameter for nonsingular H-matrices are given according to the relations of H-diagonally dominant matrices and nonsingular H-matrices, which extent and improve some related results. The validity of our results is illustrated by some numerical examples.

Key words: nonsingular H-matrix; alpha-diagonally dominant matrix; irreducible; nonzero elements chain

(责任编辑 黄 颖)