

# 窗口能力不等、输入率可变且有差错服务的 $M/M/2$ 排队模型研究\*

冀云

(重庆电子工程职业学院 应用电子学院, 重庆 401331)

**摘要:**主要研究了窗口能力不等、有差错服务且输入率可变的  $M/M/2$  排队模型。设顾客到达系统的时间间隔服从参数为  $\lambda$  的指数分布, 二服务窗对顾客的服务时间分别服从参数为  $\mu_1$  和  $\mu_2$  的指数分布且与顾客到达时间间隔相互独立, 当系统队长为  $k$  时, 顾客进入系统同时排队等待的概率为  $\alpha_k = \frac{1}{k}$ , 窗口提供正确服务、不出差错概率为  $\gamma_k = \frac{k}{k^a + 1}$ 。基于排队系统的状态转移图推导出了 K 氏方程, 同时考虑正则性条件, 求得系统队长的平稳分布以及主要指标。

**关键词:**排队系统; 输入率可变; 有差错服务; 窗口能力不等

**中图分类号:** O226

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-6693(2016)01-0076-05

在人们日常生活和工作中随处可见各种排队的情况, 如超市收银、银行办理业务、医院就诊等。现实生活中的许多排队现象, 由于存在服务人员熟练程度、设备、环境等因素的差异, 各服务窗的服务能力往往不是完全相等的<sup>[1-2]</sup>。假设排队系统已经存在多名等待服务的顾客, 此时新到达系统的顾客就会考虑此服务的重要性及紧迫性, 犹豫是否加入系统排队等候, 因此顾客在遇到以上情况时是否加入排队系统等待存在一定不确定性, 即该系统的输入率是可变的; 并且随着队长的不断增加, 窗口服务人员一般会产生急躁情绪从而影响工作状态, 那么服务出现出差错的概率也必定随之加大。文献[3-6]分别讨论了一些输入率可变的排队模型, 文献[7-8]讨论了具有差错服务的排队模型, 文献[9-10]讨论了几类窗口能力不等的排队模型。本文提出并研究了一类输入率可变、窗口能力不等且有差错服务的  $M/M/2$  排队模型, 与实际情况更接近。

## 1 模型假设

本文提出的排队模型存在如下假设:

1) 系统提供  $n=2$  个服务窗口, 两个窗口服务独立, 系统具有无限容量, 顾客到达系统时间间隔服从参数为  $\lambda$  的指数分布;

2) 顾客加入队列排队等待的概率为  $\alpha_k (0 < \alpha_k \leq 1)$ , 其中  $k$  为队长, 当  $k \geq 2$  时, 考虑当前队长越长, 顾客加入队列等待的概率越小, 设新来的顾客以概率  $\alpha_k = \frac{1}{k}$  加入队列。且随着系统队长的增加, 服务人员由于情绪急躁, 出差错的可能性越大, 正确服务的概率会下降, 设服务台进行正确服务的概率为  $\gamma_k (0 < \gamma_k \leq 1)$ , 此时服务率为  $\mu\gamma_k$ , 其中  $k$  为队长,  $\gamma_k = \frac{k}{k^a + 1}$ , 其中  $a > 1$  且为实数。约定当  $k < 2$  时,  $\alpha_k = 1, \gamma_k = 1$ , 可见当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\alpha_k \rightarrow 0$  同时  $\gamma_k \rightarrow 0$  (取决于  $a$  的取值)。

3) 两个服务窗口对顾客的服务时间分别服从参数为  $\mu_1$  和  $\mu_2$  的指数分布; 当顾客到达系统时, 两窗口都无顾客接受服务, 则顾客可任选一窗口接受服务, 假设顾客以概率  $\varphi (0 < \varphi < 1)$  选择 1 号窗口, 那么就会以概率  $1 - \varphi$  选择 2 号窗口, 且此时系统只有一个等待队列。将系统中仅有一名顾客且在 2 号窗口接受服务记为 01 状态,

\* 收稿日期: 2015-05-27 修回日期: 2015-06-13 网络出版时间: 2015-12-02 13:26

资助项目: 国家社会科学基金(No. 13BTJ008)

作者简介: 冀云, 男, 讲师, 研究方向为随机系统分析与电子信息工程, E-mail: jy20023801@163.com

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20151202.1326.004.html>

系统中只有一名顾客且在 1 号窗口接受服务为 10 状态。若有两名顾客分别在两窗口接受服务,则系统服务率  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ 。设  $\mu_1 = \mu_{10}, \mu_2 = \mu_{20}$ , 其中  $\mu_{10}, \mu_{20} > 0$  且为常数。

4) 顾客到达系统时间与接受服务时间相互独立。

### 2 数学模型

设  $X(t)$  为时刻  $t$  系统中的顾客数, 则  $\{X(t), t \geq 0\}$  是以  $I = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  为状态空间的生灭过程(证明过程

与文献[3]类似), 其中生率  $\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & k=0, 1 \\ \frac{\lambda}{k}, & k \geq 2 \end{cases}$ , 灭率  $\mu(k) = \begin{cases} I_1 \mu_{10} + I_2 \mu_{20}, & k=1, 2 \\ \frac{k}{k^a + 1} \mu, & k > 2 \end{cases}$ , 其中  $I_1 = 1$  表示 1 号窗口忙, 否则  $I_1 = 0$ , 同理  $I_2 = 1$  表示 2 号窗口忙, 否则为 0, 则系统状态转移图为图 1。

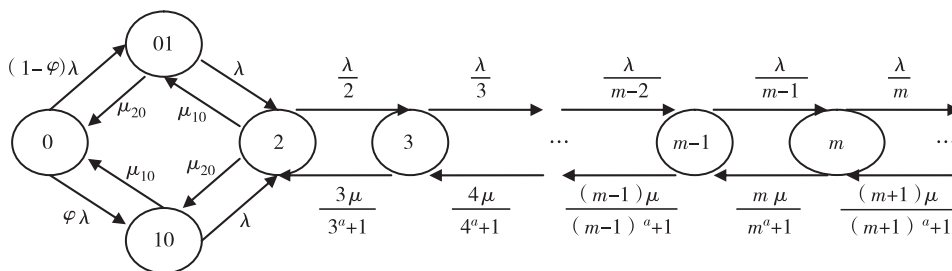


图 1 输入率可变、窗口能力不等且有差错服务的 M/M/2 排队模型状态流图

### 3 平稳分布

定理 记  $P_k(t) = P\{X(t) = k\}$ ,  $P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t)$ , 则  $\{X(t), t \geq 0\}$  存在平稳分布

$$P_k = \begin{cases} \rho^{k-1} \beta P_0, & 0 < k \leq 2, \\ \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{k! (k-1)!} \rho^{k-1} \beta P_0, & k > 2, \end{cases}$$

$$P_0 = \left\{ 1 + \beta + \alpha \beta + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{k! (k-1)!} \rho^{k-1} \beta \right\}^{-1},$$

其中  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \beta = \frac{\lambda^2 + \lambda(1-\varphi)\mu_{10} + \lambda\varphi\mu_{20}}{(2\rho + 1)\mu_{10}\mu_{20}}$ 。

证明 由状态转移图可列出在平衡状态下的 K 氏代数方程:

对 0 状态:

$$\lambda P_0 = \mu_{10} P_{10} + \mu_{20} P_{01}; \tag{1}$$

对 01 状态:

$$(1-\varphi)\lambda P_0 + \mu_{10} P_2 = (\mu_{20} + \lambda) P_{01}; \tag{2}$$

对 10 状态:

$$\varphi\lambda P_0 + \mu_{20} P_2 = (\mu_{10} + \lambda) P_{10}; \tag{3}$$

对 2 状态:

$$\lambda P_{01} + \lambda P_{10} + \frac{3\mu}{3^a + 1} P_3 = \left( \mu + \frac{\lambda}{2} \right) P_2; \tag{4}$$

对 3 状态:

$$\frac{\lambda}{2} P_2 + \frac{4\mu}{4^a + 1} P_4 = \left( \frac{3\mu}{3^a + 1} + \frac{\lambda}{3} \right) P_3; \tag{5}$$

.....

对  $m-1$  状态:  $\frac{\lambda}{m-2} P_{m-2} + \frac{m\mu}{m^a + 1} P_m = \left[ \frac{(m-1)\mu}{(m-1)^a + 1} + \frac{\lambda}{m-1} \right] P_{m-1};$

对  $m$  状态:  $\frac{\lambda}{m-1}P_{m-1} + \frac{(m+1)\mu}{(m+1)^a+1}P_{m+1} = \left(\frac{m\mu}{m^a+1} + \frac{\lambda}{m}\right)P_m$ ;

对  $m+1$  状态:  $\frac{\lambda}{m}P_m + \frac{(m+2)\mu}{(m+2)^a+1}P_{m+2} = \left[\frac{(m+1)\mu}{(m+1)^a+1} + \frac{\lambda}{m+1}\right]P_{m+1}$ ;

.....

将(2)式乘以  $\mu_{20}$ , 减去(3)式乘以  $\mu_{10}$ , 得

$$(1-\varphi)\lambda\mu_{20}P_0 - \varphi\lambda P_0\mu_{10} = (\mu_{20} + \lambda)\mu_{20}P_{01} - (\mu_{10} + \lambda)\mu_{10}P_{10}, \quad (6)$$

将(1)式乘以  $\lambda + \mu_{10}$ , 得

$$(\lambda + \mu_{10})\lambda P_0 = (\lambda + \mu_{10})\mu_{10}P_{10} + (\lambda + \mu_{10})\mu_{20}P_{01}, \quad (7)$$

将(6), (7)两式相加, 且有  $\mu = \mu_{10} + \mu_{20}$ , 得  $(\lambda + \mu - \mu\varphi)\lambda P_0 = (2\lambda + \mu)\mu_{20}P_{01}$ , 由此解得

$$P_{01} = \frac{(\lambda + \mu - \mu\varphi)\lambda}{(2\lambda + \mu)\mu_{20}}P_0 = \frac{(\rho + 1 - \varphi)\lambda}{(2\rho + 1)\mu_{20}}P_0,$$

其中  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ .

将(6)式两边乘以  $(-1)$ , 得:

$$-(1-\varphi)\lambda\mu_{20}P_0 + \varphi\lambda P_0\mu_{10} = -(\mu_{20} + \lambda)\mu_{20}P_{01} + (\mu_{10} + \lambda)\mu_{10}P_{10}, \quad (8)$$

由(1)  $\times (\lambda + \mu_{20})$ , 得:

$$(\lambda + \mu_{20})\lambda P_0 = (\lambda + \mu_{20})\mu_{10}P_{10} + (\lambda + \mu_{20})\mu_{20}P_{01}. \quad (9)$$

(8)式加上(9)式, 得  $(\lambda + \mu\varphi)\lambda P_0 = (2\lambda + \mu)\mu_{10}P_{10}$ . 解得

$$P_{10} = \frac{(\lambda + \mu\varphi)\lambda}{(2\lambda + \mu)\mu_{10}}P_0 = \frac{(\rho + \varphi)\lambda}{(2\rho + 1)\mu_{10}}P_0,$$

$$P_1 = P_{01} + P_{10} = \frac{(\rho + 1 - \varphi)\lambda}{(2\rho + 1)\mu_{20}}P_0 + \frac{(\rho + \varphi)\lambda}{(2\rho + 1)\mu_{10}}P_0 = \frac{\lambda^2 + \lambda(1 - \varphi)\mu_{10} + \lambda\varphi\mu_{20}}{(2\rho + 1)\mu_{10}\mu_{20}}P_0.$$

记  $\frac{\lambda^2 + \lambda(1 - \varphi)\mu_{10} + \lambda\varphi\mu_{20}}{(2\rho + 1)\mu_{10}\mu_{20}} = \beta$ , 则

$$P_1 = P_{01} + P_{10} = \beta P_0, \quad (10)$$

将(2), (3)式相加, 再利用(1), (6)式, 得  $\mu P_2 = \lambda(P_{10} + P_{01}) = \lambda P_1$ . 于是得到

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu}P_1 = \rho P_1 = \rho\beta P_0. \quad (11)$$

将(11)式代入(4)式

$$P_3 = \frac{3^a + 1}{3 \times 2} \rho P_2 = \frac{3^a + 1}{6} \rho^2 \beta P_0, \quad (12)$$

将(12)式代入(5)式, 有  $P_4 = \frac{4^a + 1}{12} \rho P_3 = \frac{(4^a + 1)(3^a + 1)}{12 \times 6} \rho^3 \beta P_0$ . 以此类推, 有

$$P_m = \frac{(m^a + 1)}{m(m-1)} \rho P_{m-1} = \frac{(m^a + 1)[(m-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{m[(m-1)(m-2) \cdots 3]^2 2} \rho^{m-1} \beta P_0.$$

综上可得系统平稳分布如下:

$$P_k = \frac{(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{k[(k-1)(k-2) \cdots 3]^2 2} \rho^{k-1} \beta P_0 = \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{k!(k-1)!} \rho^{k-1} \beta P_0.$$

由正则性  $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ , 有  $P_0 + P_1 + P_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{k!(k-1)!} \rho^{k-1} \beta P_0 = 1$ . 故

$$P_0 = \left\{ 1 + \beta + \rho\beta + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{k!(k-1)!} \rho^{k-1} \beta \right\}^{-1}. \quad \text{证毕}$$

## 4 主要指标

根据得到的系统平稳分布, 可推导出如下系统主要指标。

1) 系统的平均队长  $L_s$ .

$$L_s = P_1 + P_2 + \sum_{k=3}^{\infty} kP_k = \beta P_0 + \rho\beta P_0 + \sum_{k=3}^{\infty} k \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{k! (k-1)!} \rho^{k-1} \beta P_0 =$$

$$\left\{ 1 + \rho + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{[(k-1)!]^2} \rho^{k-1} \right\} \beta P_0;$$

2) 系统的平均等待队长  $L_q$ 。

$$L_q = \sum_{k=3}^{\infty} (k-2)P_k = \sum_{k=3}^{\infty} (k-2) \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{k! (k-1)!} \rho^{k-1} \beta P_0 =$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{k! (k-1)(k-3) \cdots 3} \rho^{k-1} \beta P_0;$$

3) 系统损失概率  $P_{\text{损}}$ 。

$$P_{\text{损}} = \sum_{k=3}^{\infty} (1 - \alpha_k)P_k = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k-1)P_k}{k} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(k-1)(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{(k!)^2} \rho^{k-1} \beta P_0;$$

4) 顾客加入队列的概率  $Q = 1 - P_{\text{损}} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{(k!)^2} \rho^{k-1} \beta P_0;$

5) 系统在单位时间内平均损失顾客数  $H_{\text{损}} = \lambda P_{\text{损}} = \lambda \left\{ 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{(k!)^2} \rho^{k-1} \beta P_0 \right\};$

6) 系统在单位时间内平均进入顾客数  $H = \lambda Q = \lambda \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{(k!)^2} \rho^{k-1} \beta P_0。$

## 5 实例分析

设某营业厅有 2 个服务台, 1 号服务员给一名顾客办理完业务需要 1 分钟, 2 号服务员需要 2 分钟; 当系统中顾客总人数  $k > 2$  时, 服务台对顾客进行正确服务的概率为  $\frac{k}{k^{1.1} + 1}$ , 服务时间服从指数分布。顾客按平均每分钟 3 人的泊松流到达, 当顾客人数  $k \geq 2$  时, 新来的顾客加入队列等待服务的概率为  $\frac{1}{k}$ , 设顾客选择 1 号服务台服务的概率  $\varphi = 50\%$ , 试求出该系统相应的目标参量。

解 根据题意知  $\lambda = 3$ ,  $\mu_{10} = 1$  人/min,  $\mu_{20} = 0.5$  人/min, 则  $\beta = \frac{\lambda^2 + \lambda(1-\varphi)\mu_{10} + \lambda\varphi\mu_{20}}{(2\rho+1)\mu_{10}\mu_{20}} = 4.5$ ,  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{1+0.5} = 2。$

根据以上条件可求得以下系统主要目标参量:

$$P_0 \approx 0.025, L_s = \left\{ 1 + \rho + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{[(k-1)!]^2} \rho^{k-1} \right\} \beta P_0 \approx 2.53 \text{ (人)},$$

$$L_q = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{k! (k-1)(k-3) \cdots 3} \rho^{k-1} \beta P_0 \approx 0.93 \text{ (人)},$$

$$P_{\text{损}} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2(k-1)(k^a + 1)[(k-1)^a + 1] \cdots (3^a + 1)}{(k!)^2} \rho^{k-1} \beta P_0 \approx 0.45, Q = 1 - P_{\text{损}} \approx 0.55。$$

## 6 总结

本文探讨了窗口能力不等、输入率可变且有差错服务的 M/M/2 排队模型, 同时基于系统的状态转移图列出 K 氏方程, 结合正则性条件, 求得系统队长的平稳分布以及系统主要指标。当取  $\gamma_k = 1, \mu_{10} = \mu_{20}$  时, 本模型即为可变输入率的 M/M/1 排队模型; 取  $\gamma_k = 1, \alpha_k = 1$  时, 本模型为窗口能力不等的多服务窗排队模型; 当取  $\gamma_k = 1, \mu_{10} = \mu_{20}, \alpha_k = b^k (0 < b < 1)$  时, 本模型为输入率呈指数变化的 M/M/1 排队模型, 本文从某种意义上将文献[1, 5]的结果进行了推广。为了与实际情况更接近, 还可以考虑系统服务窗口数  $n > 2$  的情况, 此种情形下推导过程比较繁琐, 这里不再赘述。

## 参考文献:

- [1] 陆传赟. 排队论[M]. 北京:北京邮电大学出版社,2009.  
Lu C L. Queuing theory[M]. Beijing:Beijing University of Posts and Telecommunications Press,2009.
- [2] 孙荣恒. 随机过程及其应用[M]. 北京:清华大学出版社,2004.  
Sun R H. Stochastic processes with applications[M]. Beijing:TsingHua University Press,2004.
- [3] 冀云,高世泽. 输入率和服务率可变且窗口能力不等的  $M/M/n$  排队模型研究[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2014,31(3):65-67.  
Ji Y, Gao S Z.  $M/M/n$  queuing model with variable input and service rate and different ability of the windows[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2014,31(3):65-67.
- [4] 台文志,高世泽. 一类具有可变输入率的  $M/M/1$  排队模型[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2009,26(1):69-73.  
Tai W Z, Gao S Z. A  $M/M/1$  queuing model with variable input rate[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2009,26(1):69-73.
- [5] 李均,杨建宁,易强. 输入率呈指数变化的  $M/M/1$  排队模型[J]. 重庆电子工程职业学院学报,2010,19(4):146-147.  
Li J, Yang J N, Yi Q.  $M/M/1$  queuing model with exponential input rate[J]. Journal of Chongqing College of Electronic Engineering, 2010,19(4):146-147.
- [6] 李焕. 具有可变输入率和不耐烦顾客的  $M/M/n$  排队模型[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2011,5(28):49-52.  
Li H. The  $M/M/n$  queuing model of variable input rate and impatient customers[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2011,5(28):49-52.
- [7] 唐玉玉,付娜. 输入率可变且有差错服务的  $M/M/1$  排队模型[J]. 重庆三峡学院学报,2011,27(132):41-43.  
Tang Y Y, Fu N.  $M/M/1$  Input variable and error rates of service queuing model[J]. Journal of Chongqing Three Gorges University, 2011,27(132):41-43.
- [8] 周强. 一类有差错服务的单服务窗闭合式  $M/M/1/m/m$  排队模型[J]. 贵州大学学报:自然科学版,2009,26(2):35-36.  
Zhou Q.  $M/M/1/m/m$  queuing system with wrong service [J]. Journal of Guizhou University: Natural Science, 2009,26(2):35-36.
- [9] 侯冬倩,高世泽. 服务率可变且窗口能力不等的  $M/M/n$  排队模型研究[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2010,27(2):47-48.  
Hou D Q, Gao S Z. On  $M/M/n$  queuing model with the different ability of the windows and changeable service rate [J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2010,27(2):47-48.
- [10] 陈媛媛. 窗口能力不等的多服务窗  $M/M/3$  排队模型及应用研究[D]. 重庆:重庆师范大学,2012.  
Chen Y Y. The research of the model and application of multi-service window- $M/M/3$  queuing with different range of capacity[D]. Chongqing:Chongqing Normal University, 2012.

 **$M/M/2$  Queuing Model with Variable Input, Wrong Service and Different Ability of the Windows**

JI Yun

(College of Applied Electronic, Chongqing College of Electronic Engineering, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** This paper discuss the  $M/M/2$  queuing model with variable input, wrong service and different ability of the windows. Suppose the customers' arrival time interval obeys the exponential distribution with parameter  $\lambda$ , the 2 windows' service time obeys the exponential distribution with parameter  $\mu_1$  and  $\mu_2$  and is mutually independent with the interval of customers' arrival time. Suppose that the probability of customers joining the system is  $\alpha_k = \frac{1}{k}$ , consider the right probability of service is  $\gamma_k = \frac{k}{k^a + 1}$ . According to the state transition graph and K's equations, find the steady distribution and the main specifications of the system.

**Key words:** queuing system; variable input rate; wrong service rate; different service ability of the windows

(责任编辑 黄 颖)