运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160230

带凸资源依赖的一类单机排序问题*

余　英，曾春花
(凯里学院 数学科学学院，贵州 凯里 556011)

摘要:就工件的实际加工时间是之前已加工工件的正常加工时间和的指数学习效应且具有凸资源依赖的单机排序问题展开讨论。在所有工件的正常加工时间均相同的假设下,对最小化加工全程和资源消耗总费用的和、最小化完工时间和资源消耗总费用的和,最小化总提前、总延误、总共同交货期和资源消耗总费用的函数以及最小化总提前、总延误、总松弛交货期和资源消耗总费用的函数 4 个目标函数分别给出了多项式时间可求解的算法。

关键词:单机排序;凸资源依赖;学习效应

中图分类号:O223　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)02-0009-06

在工业生产中,管理者通常将不可持续利用的资源当作一个工具来控制工件的加工时间,以此提高系统的运行效果。此类加工时间依赖资源的排序问题引起了学者们的关注，可参考文献[1-3]。随后,Shabtay 和 Kaspi[4]提出了工件具有凸资源依赖的排序问题,对最小化带权总完工时间问题展开了研究。在实际工业生产中还存在下列情况:随着工人熟练程度的提高,越在后面加工的工件加工时间越短,此类称为具有学习效应的排序问题也引起了学者们的研究兴趣。Biskup[5]首先将其引入排序问题,研究了工件的加工时间是位置的幂函数的单机排序问题。随后,Mosheiov[6],Kuo 和 Yang[7],Cheng 和 Sun[8]等人进行了相关的研究。Cheng 等人[9]探讨了具有与已加工工件正常加工时间的和有关的指数学习效应的单机排序问题。对最小化加工全程、最小化总完工时间、最小化带权总完工时间及最小化最大延误给出了相应的结果。

本文受文献[4]和文献[9]研究工作的启发,对工件具有指数学习效应和凸资源依赖的单机排序问题进行研究。

1 模型建立

有一包含 n 个工件的工件集$\{1,2,\cdots,n\}$需要在一台机器上被加工,每个工件在加工时均不可中断,所有工件都在零时刻到达。一台机器不可同时加工两个工件,工件 $j(j=1,2,\cdots,n)$的实际加工时间既与已加工工件有关又依赖资源,也即是 $a_{jr}(u_j)=\left(\dfrac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^k$ 。

假设它是关于 $u_j(j=1,2,\cdots,n)$的连续函数。其中 $a_{jr}(u_j)(j,r=1,2,\cdots,n)$表示工件 j 排在第 r 个位置,消耗 u_j 资源后的实际加工时间,$a_{[j]}(j=1,2,\cdots,n)$表示排在第 j 个位置工件的正常加工时间,$u_j(j=1,2,\cdots,n)$表示可以分配给工件 j 的资源。在这个排序模型中,假设资源是连续的,且当工件没有分配到资源时其加工时间将会无穷大。本文主要考虑最小化以下 4 个目标函数:$C_{\max}+\sum_{j=1}^{n}g_ju_j$,$\sum_{j=1}^{n}(C_j+g_ju_j)$,$\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+g_ju_j)$,$\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma q+g_ju_j)$,其中 $g_j(j=1,2,\cdots,n)$为工件 j 的单位资源消耗费用，$\alpha>0$,$\beta>$

* **收稿日期**:2015-05-28　　**网络出版时间**:2016-1-20　21:25
资助项目:贵州省科技厅、黔东南科技局、凯里学院科技联合基金项目(No. 黔科合 LH 字[2014]7232);贵州凯里学院规划课题(No. Z1402);贵州省科技厅、黔东南州科技局、凯里学院科技联合基金(No. 黔科合 LKK[2013]31)
作者简介:余英,女,副教授,研究方向为排序理论和组合最优化,E-mail:yuying05720062@sina.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160120.2125.004.html

$0, \gamma>0(\beta>\gamma)$分别为工件的提前、延误、交货期(公共交货期或松弛交货期)的单位费用。C_j 为工件 j 的完工时间，$E_j=\max\{0, d_j-C_j\}$为工件 j 的提前量，d_j 为工件 j 的交货期；$T_j=\max\{0, C_j-d_j\}$为工件 j 的延误量。$q(q>0)$为松弛交货期，$d(d>0)$为所有工件的共同交货期。

2 最小化加工全程和资源消耗费用之和

这部分考虑工件既带凸资源依赖又具有学习效应的最小化加工全程和资源消耗总费用之和的单机排序问题。这里主要就所有工件的正常加工时间均相等的情况($a_j \equiv a, j=1,2,\cdots,n$))进行探讨，用三参数法可将上述排序问题记为：

$$1\left|a_{jr}(u_j)=\left(\frac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^k, a_j \equiv a(j=1,2,\cdots,n)\right|C_{\max}+\sum_{j=1}^{n}g_ju_j\text{。}\tag{1}$$

引理 1　排序问题(1)的最优资源分配方案为：

$$u_{[j]}^*=\left(\frac{k}{g_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}}(a\alpha^{(j-1)a})^{\frac{k}{k+1}}, j=1,2,\cdots,n,\tag{2}$$

其中 $u_{[j]}^*$表示排在第 j 个位置工件的最优资源分配方案，$g_{[j]}$表示排在第 j 个位置工件的单位资源消耗费用。

证明　用 $f(\pi,u)$表示排序问题(1)在工件序 π 和资源分配向量 u 下相应的目标函数值，其中 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，在这里可以将其表示为：

$$f(\pi,u)=C_{\max}+\sum_{j=1}^{n}g_ju_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}}{u_{[j]}}\right)^k+g_{[j]}u_{[j]}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\frac{a\alpha^{(j-1)a}}{u_{[j]}}\right)^k+g_{[j]}u_{[j]}\right),\tag{3}$$

计算得 $\frac{\partial f(\pi,u)}{\partial u_{[j]}}=g_{[j]}-k(a\alpha^{(j-1)a})^k(u_{[j]})^{-k-1}$，令 $\frac{\partial f(\pi,u)}{\partial u_{[j]}}=0$，$j=1,2,\cdots,n$，解得 $u_{[j]}^*=\left(\frac{k}{g_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}}\cdot(a\alpha^{(j-1)a})^{\frac{k}{k+1}}$，$j=1,2,\cdots,n$。由于(2)式对应的多元连续函数只有唯一驻点，由多元函数在实际问题中求最值的方法可知定理成立。　　证毕

将(2)式代入(3)式可得 $f(\pi,u)=(k^{\frac{1}{k+1}}+k^{-\frac{k}{k+1}})\sum_{j=1}^{n}(a\alpha^{(j-1)a})^{\frac{k}{k+1}}(g_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}$，令

$$\varphi_j=(a\alpha^{(j-1)a})^{\frac{k}{k+1}}, \phi_{[j]}=(g_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}, j=1,2,\cdots,n,\tag{4}$$

则 $f(\pi,u)=(k^{\frac{1}{k+1}}+k^{-\frac{k}{k+1}})\sum_{j=1}^{n}\phi_{[j]}\varphi_j$。

引理 2[10]　两个数列$\{x_i\}, i=1,2,\cdots,n$ 和$\{y_i\}, i=1,2,\cdots,n$，将数列$\{x_i\}$的最大值与数列$\{y_i\}$的最小值相乘，接着将$\{x_i\}$的次最大值与数列$\{y_i\}$的次最小值相乘，依次相乘便得到 $\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ 的最小值。

算法 1

步骤 1：根据(4)式计算 $\varphi_j, \phi_{[j]}, j=1,2,\cdots,n$。

步骤 2：根据引理 2，确定排序问题(1)的最优序。

步骤 3：根据引理 1，确定排序问题(1)的最优资源分配方案。

定理 1　算法 1 在多项式时间内可以求解排序问题(1)。

证明　由引理 1 及引理 2 可知算法 1 可以得到排序问题(1)的一个最优序。其中步骤 1 和步骤 3 在线性时间内可以求解，步骤 2 在 $O(n\log n)$时间内可以求解，因此算法 1 的时间复杂性是 $O(n \log n)$，定理成立。　证毕

3 最小化总完工时间和资源消耗总费用之和

这部分考虑工件既带凸资源依赖又具有学习效应的最小化总完工时间和资源消耗总费用之和的单机排序问题。这里主要就所有工件的正常加工时间均相等的情况($a_j \equiv a, j=1,2,\cdots,n$)进行探讨，用三参数法可将上述排序问题记为：

$$1\left|a_{jr}(u_j)=\left(\frac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^k,a_j\equiv a,j=1,2,\cdots,n\right|\sum_{j=1}^{n}(C_j+g_ju_j)。\tag{5}$$

引理 3　排序问题(5)的最优资源分配方案为：

$$u_{[j]}^*=\left(\frac{k(n-j+1)}{g_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}}(a\alpha^{(j-1)a})^{\frac{k}{k+1}},j=1,2,\cdots,n。\tag{6}$$

证明　排序问题(5)的目标函数可以表示为：

$$f(\pi,u)=\sum_{j=1}^{n}(C_j+g_ju_j)=\sum_{j=1}^{n}\left((n-j+1)\left(\frac{a\alpha^{(j-1)a}}{u_{[j]}}\right)^k+g_{[j]}u_{[j]}\right),\tag{7}$$

计算得$\frac{\partial f(\pi,u)}{\partial u_{[j]}}=g_{[j]}-k(n-j+1)(a\alpha^{(j-1)a})^k(u_{[j]})^{-k-1}$，令$\frac{\partial f(\pi,u)}{\partial u_{[j]}}=0,j=1,2,\cdots,n$，解得 $u_{[j]}^*=\left(\frac{k(n-j+1)}{g_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}}(a\alpha^{(j-1)a})^{\frac{k}{k+1}},j=1,2,\cdots,n$。由于(7)式对应的多元连续函数只有唯一驻点，由多元函数在实际问题中求最值的方法可知定理成立。　　证毕

将(4)式代入(5)式可得 $f(\pi,u)=(k^{\frac{1}{k+1}}+k^{-\frac{k}{k+1}})\sum_{j=1}^{n}(g_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}(a^k\alpha^{ka(j-1)}(n-j+1))^{\frac{1}{k+1}}$。令

$$\varphi_j=(a^k\alpha^{ka(j-1)}(n-j+1))^{\frac{1}{k+1}},\phi_{[j]}=(g_{[j]})^{\frac{k}{k+1}},j=1,2,\cdots,n,\tag{8}$$

因此 $f(\pi,u)=(k^{\frac{1}{k+1}}+k^{-\frac{k}{k+1}})\sum_{j=1}^{n}\phi_{[j]}\varphi_j$。

算法 2

步骤 1：根据(8)式计算 $\varphi_j,\phi_{[j]},j=1,2,\cdots,n$。

步骤 2：根据引理 2，确定排序问题(5)的最优序。

步骤 3：根据引理 3，确定排序问题(5)最优资源分配方案。

定理 2　算法 2 在多项式时间内可以求解排序问题(5)。

定理 2 的证明与定理 1 的证明类似。

4 与交货期有关的排序问题

这里主要研究两类与交货期有关的排序问题，一类是共同交货期，一类是松弛交货期。

4.1 与共同交货期有关的排序问题

本部分研究具有共同交货期的情形，也就是所有工件均有一相同交货期 d，该交货期是需要确定的量。这里主要就所有工件的正常加工时间均相等的情况($a_j\equiv a,j=1,2,\cdots,n$)进行探讨，用三参数法可将上述排序问题记为：

$$1\left|a_{jr}(u_j)=\left(\frac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^k,a_j\equiv a,j=1,2,\cdots,n,CON\right|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+g_ju_j)。\tag{9}$$

引理 4[11]　排序问题 $1|CON|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d)$具有如下性质：

1) 在最优序中，第一个工件在 0 时刻到达且机器加工无空闲。

2) 在最优序中，共同交货期 d 等于第 l 个工件的完工时间，其中 $l=\lceil n(\beta-\gamma)/(\alpha+\beta)\rceil$，$\lceil\cdot\rceil$表示大于等于·的最小整数。

3) 目标函数可以写为 $f(d,\pi)=\sum_{r=1}^{n}\omega_r a_{[r]}$，其中位置 r 的权重系数 $\omega_r=\begin{cases}n\gamma+(r-1)\alpha,r=1,2,\cdots,l,\\(n+1-r)\beta,r=l+1,\cdots,n。\end{cases}$

由于 ω_r 的取值与工件的加工时间无关，所以根据引理 4 可以得到

$$f(d,\pi,u)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+g_ju_j)=\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left(\frac{a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}}{u_{[j]}}\right)^k+\sum_{j=1}^{n}g_{[j]}u_{[j]}=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_j\left(\frac{a\alpha^{(j-1)a}}{u_{[j]}}\right)^k+\sum_{j=1}^{n}g_{[j]}u_{[j]},\tag{10}$$

其中 $\omega_j=\begin{cases}n\gamma+(j-1)\alpha, j=1,2,\cdots,l,\\(n+1-j)\beta, j=l+1,\cdots,n。\end{cases}$

引理5 排序问题(9)的最优资源分配方案为：

$$u_{[j]}^{*}=\left(\frac{k\omega_j}{g_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}}(a\alpha^{(j-1)a})^{\frac{k}{k+1}}\text{ 。}\tag{11}$$

证明 利用(10)式，计算得 $\frac{\partial f(\pi,u,d)}{\partial u_{[j]}}=g_{[j]}-k\omega_j(a\alpha^{(j-1)a})^k(u_{[j]})^{-k-1}$，令 $\frac{\partial f(\pi,u,d)}{\partial u_{[j]}}=0, j=1,2,\cdots,n$，解得 $u_{[j]}^{*}=\left(\frac{k\omega_j}{g_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}}(a\alpha^{(j-1)a})^{\frac{k}{k+1}}$。由于(10)式对应的多元连续函数只有唯一驻点，由多元函数在实际问题中求最值的方法可知定理成立。

将(11)式代入(10)式可得 $f(\pi,u)=(k^{\frac{1}{k+1}}+k^{-\frac{k}{k+1}})\sum_{j=1}^{n}(g_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}(\omega_j a^k\alpha^{ka(j-1)})^{\frac{1}{k+1}}$，令

$$\varphi_j=(\omega_j a^k\alpha^{ka(j-1)})^{\frac{1}{k+1}},\phi_{[j]}=(g_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}, j=1,2,\cdots,n,\tag{12}$$

因此 $f(\pi,u)=(k^{\frac{1}{k+1}}+k^{-\frac{k}{k+1}})\sum_{j=1}^{n}\phi_{[j]}\varphi_j$ 。 证毕

算法3

步骤1：根据引理4计算共同交货期对应的工件位置 l 的值。

步骤2：根据(12)式计算 $\varphi_j,\phi_{[j]}, j=1,2,\cdots,n$。

步骤3：根据引理2，确定排序问题(9)的最优序。

步骤4：根据引理5，确定排序问题(9)最优资源分配方案。

步骤5：根据 $a_{jr}(u_j)=\left(\frac{a\alpha^{(r-1)a}}{u_j}\right)^k$ 计算最优资源分配和最优工序下各工件的实际加工时间。

步骤6：将排在位置 l 的工件的完工时间作为共同交货期。

定理3 算法3在多项式时间内可以求解排序问题(9)。

证明 由引理2、引理4及引理5可知，算法3可以得到排序问题(9)的一个最优序。其中步骤1、步骤2、步骤4、步骤5、步骤6在线性时间内可以求解，步骤3在 $O(n\log n)$ 时间内可以求解，因此算法3的时间复杂性是 $O(n\log n)$，定理成立。 证毕

4.2 与松弛交货期有关的排序问题

SLK 指派一种常见的 JIT 排序问题。在该模型下，各工件有一个共同的松弛交货期 q，也即是 $d_j=a_j+q$，$j=1,2,\cdots,n$，其中 $q\geqslant 0$ 是一个需要确定的变量。这里主要就所有工件的正常加工时间均相等的情况($a_j\equiv a, j=1,2,\cdots,n$)进行研究，用三参数法可将上述排序问题记为：

$$1\left|a_{jr}(u_j)=\left(\frac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^k, a_j\equiv a, j=1,2,\cdots,n, SLK\right|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma q+g_j u_j)。\tag{13}$$

引理6[12] 排序问题 $1|SLK|\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma q)$ 具有如下性质：

1) 在最优序中，第一个工件在0时刻到达且机器加工无空闲。

2) 在最优序中，q 等于第 $l-1$ 个工件的完工时间，其中 $l=\lceil n(\beta-\gamma)/(\alpha+\beta)\rceil$，$\lceil\cdot\rceil$表示大于等于 · 的最小整数。

3) 目标函数可以写为 $f(d,\pi)=\sum_{r=1}^{n}\delta_r a_{[r]}$，其中位置 r 的权重系数 $\delta_r=\begin{cases}n\gamma+r\alpha, r=1,2,\cdots,l,\\\beta(n-r), r=l+1,\cdots,n。\end{cases}$

由于 δ_r 的取值与工件的加工时间无关，所以根据引理6，可以得到

$$f(d,\pi,u)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+g_j u_j)=\sum_{j=1}^{n}\delta_j\left(\frac{a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}}{u_{[j]}}\right)^k+\sum_{j=1}^{n}g_{[j]}u_{[j]}=$$

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_j\left(\frac{a\alpha^{(j-1)a}}{u_{[j]}}\right)^k+\sum_{j=1}^{n}g_{[j]}u_{[j]},\tag{14}$$

其中 $\delta_j=\begin{cases}n\gamma+j\alpha, j=1,2,\cdots,l,\\ \beta(n-j), j=l+1,\cdots,n。\end{cases}$

引理 7　排序问题(13)的最优资源分配方案为：

$$u_{[j]}^{*}=\left(\frac{k\delta_j}{g_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}}(a\alpha^{(j-1)a})^{\frac{k}{k+1}}。\tag{15}$$

引理 7 的证明与引理 5 的证明类似。

将(15) 式代入(14) 式可得 $f(\pi,u)=(k^{\frac{1}{k+1}}+k^{-\frac{k}{k+1}})\sum_{j=1}^{n}(g_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}(\delta_j a^k\alpha^{ka(j-1)})^{\frac{1}{k+1}}$ 。令

$$\varphi_j=(\delta_j a^k\alpha^{ka(j-1)})^{\frac{1}{k+1}},\phi_{[j]}=(g_{[j]})^{\frac{k}{k+1}},j=1,2,\cdots,n,\tag{16}$$

因此 $f(\pi,u)=(k^{\frac{1}{k+1}}+k^{-\frac{k}{k+1}})\sum_{j=1}^{n}\phi_{[j]}\varphi_j$ 。

算法 4

步骤 1：根据引理 6 计算松弛交货期对应的工件位置 $l-1$ 的值。

步骤 2：根据(16)式计算 $\varphi_j,\phi_{[j]},j=1,2,\cdots,n$。

步骤 3：根据引理 2，确定排序问题(13)的最优序。

步骤 4：根据引理 7，确定排序问题(13)最优资源分配方案。

步骤 5：根据 $a_{jr}(u_j)=\left(\frac{a\alpha^{(r-1)a}}{u_j}\right)^k$ 计算最优资源分配和最优工序下各工件的实际加工时间。

步骤 6：将排在位置 $l-1$ 的工件的完工时间作为松弛交货期。

定理 4　算法 4 在多项式时间内可以求解排序问题(13)。

定理 4 的证明与定理 3 的证明类似。

5 结语

在实际工业生产中，具有学习效应和资源依赖的排序问题受到了越来越多人的关注。本文研究了具有指数学习效应和凸资源依赖的单机排序问题。对于最小化四类目标函数分别给出了多项式时间可求解的算法。本文的研究局限在所有工件的正常加工时间均相同的单机问题上，对于工件的加工时间不相同的单机以及多机问题的探讨是今后的研究方向。

参考文献：

[1] Monma C L, Schrijver A, Todd M J, et al. Convex resource allocation problems on directed acyclic graphs: duality, complexity, special cases and extensions[J]. Mathematics of Operations Research, 1990, 15: 736-748.

[2] Scott S C, Jefferson T R. Allocation of resources in project management[J]. International Journal of Systems Science, 1995, 26(2): 413-420.

[3] Armstrong R, Gu S, Lei L. An $O(\log(1/\varepsilon))$ algorithm for the two-resource allocation problem with a non-differentiable convex objective function[J]. Journal of the Operational Research Society, 1995, 46: 116-122.

[4] Shabtay D, Kaspi M. Minimizing the total weighted flow time in a single machine with controllable processing times[J]. Computers & Operations Research, 2004, 31: 2279-2289.

[5] Biskup D. Single-machine scheduling with learning consideration[J]. European Journal of Operational Research, 1999, 115: 173-178.

[6] Mosheiov G. Scheduling problems with learning effect[J]. European Journal of Operational Research, 2001, 132: 687-693.

[7] Kuo W H, Yang D L. Minimizing the total completion time on a single-machine scheduling problem with a time-dependent learning effect[J]. European Journal of Operational

Research, 2006, 97: 64-67.

[8] Cheng M B, Sun S J. The single machine scheduling problems with deteriorating jobs and learning effect[J]. Zhejiang University A, 2006, 7(4): 597-601.

[9] Cheng M B, Pandu R, Tadikamalla, et al. Single machine scheduling problems with exponentially time-dependent learning effects[J]. Journal of Manufacturing Systems, 2015, 34: 60-65.

[10] Littlewood G H, Polya J E, Hardy G. Inequalities[M]. London: Cambridge University Press, 1934.

[11] Panwalker S S, Smith M L, Seidmann A. Common due-date assignment to minimize total penalty for the one machine scheduling problem[J]. Operational Research, 1982, 30: 391-399.

[12] Adamopoulos G I, Pappis C P. Single machine scheduling with flow allowance[J]. Journal of Operational Research Society, 1996, 47: 1280-1285.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine Scheduling Problems with Learning Effect and Resource-dependence

YU Ying, ZENG Chunhua

(Kaili College, School of Mathematical Sciences, Kaili Guizhou 556011, China)

Abstract: This paper considers the single machine scheduling problem in which the actual processing time of each job is both of exponential learning effect of the total normal processing time of jobs already processed before it and of convex resource-dependence. We introduce four objective functions: the sum of make span and total resource consumption costs、the sum of the total completion time and total resource consumption costs、the function of the total earliness、tardiness、common due date and resource consumption costs and the function of the total earliness、tardiness、slack due date and resource consumption costs. For each problem, we present corresponding algorithm respectively to minimize objective function under the condition that the normal processing time of each job is identical.

Key words: single machine scheduling; convex resource-dependent; learning effect

(责任编辑　游中胜)