

一类分数阶小世界网络系统的滑模控制混沌同步^{*}

毛北行, 程春蕊

(郑州航空工业管理学院 数理系, 郑州 450015)

摘要: 研究了一类分数阶小世界网络的滑模混沌同步问题, 即 $D^\alpha e_i(t) = A e_i(t) + g(y_i(t)) - g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma e_j(t) + u_i(t)$ (I) 的混沌同步问题及其时滞系统 $D^\alpha e_i(t) = A e_i(t) + g(y_i(t)) - g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma e_j(t - \tau) + u_i(t)$ (II)。如果满足矩阵不等式 $A + (l + \epsilon + k - \eta)I < 0$, 则系统 (I) 是滑模混沌同步的; 如果满足矩阵不等式组 $A + (l + \epsilon + k_1 - \eta_1)I < 0$, 以及 $\sigma G\Gamma + (k_2 - \eta_2)I < 0$ 则系统 (II) 是滑模混沌同步的。

关键词: 混沌同步, 分数阶系统, 小世界网络系统

中图分类号: O482.4

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2016)02-0057-05

分数阶微积分理论源于 17 世纪, 近年来分数阶系统逐步成为研究的热点。另一方面, 混沌同步已成为研究的热点, 并取得了丰富的成果^[1-7], 文献[8]基于分数阶微积分理论研究了一类不确定分数阶系统的滑模混沌同步问题, 得到了系统取得滑模同步的充分性条件。文献[9]研究了一类不确定分数阶系统的混沌同步问题, 基于状态观测器方法是系统取得同步一种控制方案。文献[10]研究了一类分数阶混沌系统的自适应滑模控制问题, 文献[11]研究了一种时滞分数阶神经网络混沌系统的同步控制问题。本文研究了一类分数阶小世界网络的滑模混沌同步问题, 基于 Lyapunov 稳定性理论和分数阶微积分的相关理论, 给出了两种实现同步的控制方案, 仿真结果表明了方法的可行性。

定义 1^[12] Caputo 分数阶导数定义为:

$${}_c D_{t_0}^\alpha x(t) = D_{t_0}^{-(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \in \mathbf{Z}^+.$$

1 小世界网络系统滑模混沌同步

考虑由 N 个节点构成的分数阶小世界网络系统, 状态方程为:

$$D^\alpha x_i(t) = f(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij} \Gamma (x_j(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

式中 D^α 是 Caputo 导数 $D_{0,t}^\alpha$, 节点 i 的状态变量为 $\mathbf{x}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]^T \in \mathbf{R}^n$, $f(x_i)$ 为非线性函数, σ 是耦合强度, $\Gamma \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为内部耦合矩阵, $\mathbf{G} = (g_{ij})_{N \times N}$ 为耦合矩阵。 $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_n)$ 为对角矩阵, $r_i = 1$ 表示第 i 个状态变量的两节点间有耦合, $r_i = 0$ 则表示没有耦合; 耦合矩阵 $\mathbf{G}$ 中, 除了对角元素 g_{ii} 之外, 其余元素均为“0”

或“1”, 令 $g_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ji}$, 则(1)式可以进一步写为:

$$D^\alpha x_i(t) = f(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma x_j(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

^{*} 收稿日期: 2015-04-30 修回日期: 2015-12-08 网络出版时间: 2016-1-20 21:26

资助项目: 国家自然科学基金(No. NSFC11501525); 河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目(No. 2013GGJS-142); 河南省科技厅软科学项目(No. 142400411192); 河南省高等学校重点科研项目(No. 15B110011)

作者简介: 毛北行, 男, 副教授, 研究方向为复杂网络与混沌同步, E-mail: bxmao@163.com

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160120.2126.038.html>

对(2)式的非线性函数 $f(x_i)$, 根据 Taylor 公式展开得到: $f(x_i) = f(0) + \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} x_i + g(x_i)$, 假设 $f(0) = 0$, 则系统(2)变为:

$$D^a x_i(t) = \mathbf{A} x_i(t) + g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} x_j(t). \quad (3)$$

以系统(3)作为主系统, 其对应的从系统为:

$$D^a y_i(t) = \mathbf{A} y_i(t) + g(y_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} y_j(t) + u_i(t). \quad (4)$$

其中 $u_i(t)$ 表示加在第 i 个节点上的控制输入, 定义系统(3)(4)之间的系统误差为:

$$e_i(t) = y_i(t) - x_i(t). \quad (5)$$

则(4)式与(3)式相减得到误差系统方程为:

$$D^a e_i(t) = \mathbf{A} e_i(t) + g(y_i(t)) - g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} e_j(t) + u_i(t). \quad (6)$$

假设 1 $\|g(y_i) - g(x_i)\| \leq l \|y_i - x_i\|$, 其中 l 为大于零的常数。

定理 1 在满足假设 1 成立的条件下, 选取滑模面 $s_i = D_i^{-1} e_i + \int_0^t \epsilon e_i(\tau) d\tau$, 设计控制器 $u_i(t) = -\sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} e_j(t) - k e_i(t) - \eta |e_i(t)| \operatorname{sgn}(s_i)$, 如果满足矩阵不等式: $\mathbf{A} + (l + \epsilon + k - \eta) \mathbf{I} < 0$, 则主从系统(3), (4)之间是滑模混沌同步的。

证明 选取滑模面 $s_i = D_i^{-1} e_i + \int_0^t \epsilon e_i(\tau) d\tau$, 当系统发生滑模运动时, 需满足如下条件:

$$s_i = D_i^{-1} e_i + \int_0^t \epsilon e_i(\tau) d\tau = 0, \quad (7)$$

$$\dot{s}_i = D_i^a e_i + \epsilon e_i = 0. \quad (8)$$

从而得到 $D_i^a e_i = -\epsilon e_i$, 当 $\epsilon > 0$ 时, (12)式渐近稳定, 即满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i\| = 0$. 构造 Lyapunov 函数 $V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_i^2$, 则有:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N s_i \dot{s}_i = \sum_{i=1}^N s_i [D_i^a e_i(t) + \epsilon e_i(t)] = \\ &= \sum_{i=1}^N s_i^T \left[(\mathbf{A} + \epsilon \mathbf{I}) e_i(t) + g(y_i(t)) - g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} e_j(t) + u_i(t) \right] \leq \\ &= \sum_{i=1}^N [\mathbf{A} + (l + \epsilon + k - \eta) \mathbf{I}] |e_i| |s_i| < 0. \end{aligned} \quad \text{证毕}$$

2 时滞小世界网络滑模混沌同步

以下考虑由 N 个节点构成的分数阶时滞小世界网络系统, 状态方程为:

$$D^a x_i(t) = f(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} (x_j(t - \tau) - x_i(t)), i = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

令 $g_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ji}$, 则(9)式可以进一步写为:

$$D^a x_i(t) = f(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} x_j(t - \tau), i = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

对(10)式的非线性函数 $f(x_i)$, 根据 Taylor 公式展开得到: $f(x_i) = f(0) + \frac{\partial f(0)}{\partial x_i} x_i + g(x_i)$, 假设 $f(0) = 0$, 则系统(10)变为:

$$D^a x_i(t) = \mathbf{A} x_i(t) + g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} x_j(t - \tau). \quad (11)$$

以系统(11)作为主系统,其对应的从系统为:

$$D^a y_i(t) = \mathbf{A} y_i(t) + g(y_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} y_j(t - \tau) + u_i(t) . \quad (12)$$

其中 $u_i(t)$ 表示加在第 i 个节点上的控制输入,定义系统(11)(12)之间的系统误差为:

$$e_i(t) = y_i(t) - x_i(t) . \quad (13)$$

则(12)式与(11)式相减得到误差系统方程为:

$$D^a e_i(t) = \mathbf{A} e_i(t) + g(y_i(t)) - g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} e_j(t - \tau) + u_i(t) . \quad (14)$$

定理 2 在满足假设 1 成立的条件下,选取滑模面 $s_i = D_t^{\alpha-1} e_i + \int_0^t \epsilon e_i(\tau) d\tau$, 设计控制器 $u_i(t) = -k_1 e_i(t) - k_2 e_i(t - \tau) - \eta_1 |e_i(t)| \operatorname{sgn}(s_i) - \eta_2 |e_i(t - \tau)| \operatorname{sgn}(s_i)$, 如果满足矩阵不等式组:

$$\mathbf{A} + (l + \epsilon + k_1 - \eta_1) \mathbf{I} < 0 , \quad (15)$$

$$\sigma \mathbf{G} \mathbf{\Gamma} + (k_2 - \eta_2) \mathbf{I} < 0 . \quad (16)$$

则主从系统(11)(12)之间是滑模混沌同步的。

证明 选取滑模面 $s_i = D_t^{\alpha-1} e_i + \int_0^t \epsilon e_i(\tau) d\tau$, 当系统发生滑模运动时,需满足如下条件:

$$s_i = D_t^{\alpha-1} e_i + \int_0^t \epsilon e_i(\tau) d\tau = 0 , \quad (17)$$

$$\dot{s}_i = D_t^a e_i + \epsilon e_i = 0 . \quad (18)$$

从而得到 $D_t^a e_i = -\epsilon e_i$, 当 $\epsilon > 0$ 时, (18)式渐近稳定, 即满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i\| = 0$ 。

构造 Lyapunov 函数 $V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_i^2$, 则有:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^N s_i \dot{s}_i = \sum_{i=1}^N s_i [D_t^a e_i(t) + \epsilon e_i(t)] = \\ &= \sum_{i=1}^N s_i^T [(\mathbf{A} + \epsilon \mathbf{I}) e_i(t) + g(y_i(t)) - g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \mathbf{\Gamma} e_j(t - \tau) + u_i(t)] \leq \\ &= \sum_{i=1}^N \{ ([\mathbf{A} + (l + \epsilon + k_1 - \eta_1) \mathbf{I}] |e_i(t)| |s_i|) + ([\sigma \mathbf{G} \mathbf{\Gamma} + (k_2 - \eta_2) \mathbf{I}] |e_i(t - \tau)| |s_i|) \} < 0 . \quad \text{证毕} \end{aligned}$$

3 数值算例

不妨以 3 阶系统 3 个节点为例: $D^a x_i(t) = f(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1, j \neq i}^3 g_{ij} \mathbf{\Gamma} (x_j(t) - x_i(t))$, 则上述系统可变为:

$D^a x_i(t) = \mathbf{A} x_i(t) + g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^3 g_{ij} \mathbf{\Gamma} x_j(t)$, 以上述系统作为主系统, 其对应的从系统为:

$$\begin{aligned} D^a y_i(t) &= \mathbf{A} y_i(t) + g(y_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^3 g_{ij} \mathbf{\Gamma} y_j(t) + u_i(t) , \\ f(x_i(t)) &= \begin{bmatrix} -16x_1(t) + 16x_2(t) \\ -x_1(t)x_3(t) - x_2(t) + 4x_1(t) \\ x_1(t)x_2(t) - 45x_3(t) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \sigma = 0.5 \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -16 & 16 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -45 \end{bmatrix}, g(x_i(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

在定理 1 中选取 $l = 0.674, \epsilon = 2, k = 1, \eta = 1$, 选取滑模面 $s_i = D_t^{\alpha-1} e_i + \int_0^t \epsilon e_i(\tau) d\tau$, 设计控制器 $u_i(t) =$

$-\sigma \sum_{j=1}^3 g_{ij} \mathbf{F} e_j(t) - k e_i(t) - \eta |e_i| \operatorname{sgn}(s_i)$, 满足条件 $\mathbf{A} + (l + \epsilon - k - \eta) \mathbf{I} < 0$, 从而主从系统实现了混沌同步, 其对应的误差曲线如图 1 所示。

定理 2 中: $D^\alpha x_i(t) = f(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1, j \neq i}^3 g_{ij} \mathbf{F}(x_j(t - \tau) - x_i(t))$, $i = 1, 2, \dots, 3$ 。则上述系统可变为: $D^\alpha x_i(t) = \mathbf{A} x_i(t) + g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^3 g_{ij} \mathbf{F} x_j(t - \tau)$ 。以上述系统作为主系统, 其对应的从系统为: $D^\alpha y_i(t) = \mathbf{A} y_i(t) + g(y_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^3 g_{ij} \mathbf{F} y_j(t - \tau) + u_i(t)$ 。

选取滑模面 $s_i = D_t^{\alpha-1} e_i + \int_0^t \epsilon e_i(\tau) d\tau$, 设计控制器 $u_i(t) = -k_1 e_i(t) - k_2 e_i(t - \tau) - \eta_1 |e_i(t)| \operatorname{sgn}(s_i) - \eta_2 |e_i(t - \tau)| \operatorname{sgn}(s_i)$, 定理 2 中选取 $l = 0.674, \epsilon = 2k_1 = 1, \eta_1 = 1, k_2 = 1, \eta_2 = 3$, 满足不等式 $\mathbf{A} + (l + \epsilon - k_1 - \eta_1) \mathbf{I} < 0, \sigma \mathbf{G} \mathbf{F} - (\eta_2 - k_2) \mathbf{I} < 0$, 从而主从系统实现了混沌同步, 其对应的误差曲线如图 2 所示。

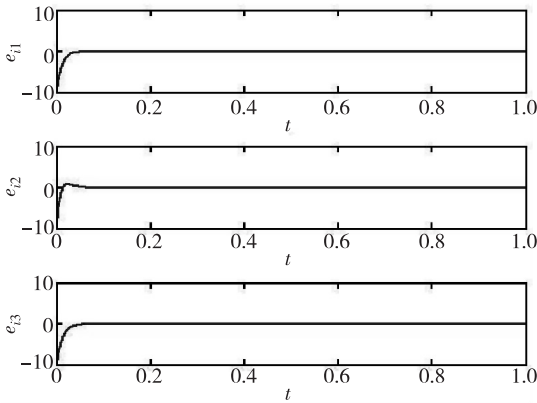


图 1 定理 1 中系统的同步误差

Fig. 1 The system synchronization errors of theorem 1

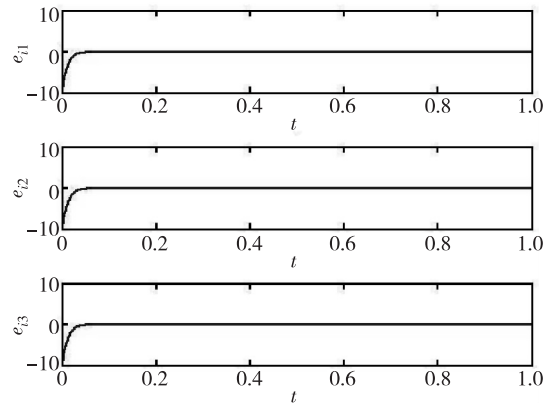


图 2 定理 2 中系统的同步误差

Fig. 2 The system synchronization errors of theorem 2

4 结论

研究了一类分数阶小世界网络的滑模混沌同步问题, 基于 Lyapunov 稳定性理论和分数阶微积分的相关理论, 给出了两个实现同步的控制情形, 仿真结果表明了方法的可行性。

参考文献:

- [1] 方洁, 陆程. 非线性干扰观测器方法实现受扰混沌系统同步[J]. 河南科技大学学报: 自然科学版, 2012, 33(6): 35-39.
Fang J, Lu C. Synchronization of chaos system with disturbance by nonlinear observer method [J]. Journal of Henan University of Science and Technology: Natural Science Edition, 2012, 33(6): 35-39.
- [2] 吕翎, 李纲, 张檬, 等. 全局耦合网络的参数辨识与时空混沌同步[J]. 物理学报, 2011, 60(9): 5051-5056.
Lü L, Li G, Zhang M, et al. Parameter identification and synchronization of spatiotemporal chaos in globally coupled network[J]. Acta phys Sin, 2011, 60(9): 5051-5056.
- [3] 李德奎, 褚衍东, 张建刚. 带有时变时滞和线性耦合的复杂网络同步[J]. 昆明理工大学学报: 自然科学版, 2013, 36(2): 50-55.
Li D K, Chu Y D, Zhang J G. Synchronization of linear complex network with time-varying delays[J]. Journal of Kunming University of Science and Technology Natural Science Edition, 2013, 36(2): 50-55.
- [4] 褚衍东, 李红敏, 张建刚, 等. 带有时变时滞和非线性耦合的复杂网络同步[J]. 安徽大学学报: 自然科学版, 2012, 36(2): 9-14.
Chu Y D, Li H M, Zhang J G. Synchronization of nonlinear complex network with time-varying delays[J]. Journal of Anhui University: Natural Science Edition, 2012, 36(2): 9-14.

- [5] Lü L, Li G, Guo Y. Generalized chaos synchronization of a weighted complex network with different nodes[J]. Acta Phys B, 2010, 19(8): 5071-5077.
- [6] 毛北行, 李巧利. Lurie 混沌系统的有限时间同步问题[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2014, 37(4): 497-500.
Mao B X, Li Q L. Finite-time synchronization of Lurie chaotic systems[J]. Journal of Henan University of Science and Technology: Natural Science, 2014, 37(4): 497-500.
- [7] Mei J, Jiang M H, Wang J. Finite-time structure identification and synchronization of drive-response systems with uncertain parameter[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2013, (18): 999-1015.
- [8] 余明哲, 张友安. 一类不确定分数阶混沌系统的滑模自适应同步[J]. 北京航空航天大学学报, 2014, 40(9): 1276-1280.
Yu M Z, Zhang Y A. Sliding model adaptive synchronization for a class of fractional-order chaotic systems with uncertainties[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2014, 40(9): 1276-1280.
- [9] 严胜利, 张昭晗. 一类不确定分数阶混沌系统的同步控制[J]. 系统仿真技术, 2013, 9(4): 366-370.
Yan S L, Zhang Z H. Synchronization control of a class of uncertain fractal order chaotic systems[J]. System Simulation Technology, 2013, 9(4): 366-370.
- [10] 潘光, 魏静. 一种分数阶混沌系统同步的自适应滑模控制器设计[J]. 物理学报, 2015, 64(4): 5051-5057.
Pan G, Wei J. Design of an adaptive sliding controller for synchronization of fractional-order chaotic systems[J]. Acta Phys Sin, 2015, 64(4): 5051-5057.
- [11] 张云雷, 吴超然. 基于反馈控制的分数阶时滞神经网络的同步[J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2014, 31(12): 49-53.
Zhang Y L, Wu C R. Synchronization of fractional-order neural network with delay based on feedback control[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University: Natural Science Edition, 2014, 31(12): 49-53.
- [12] Podlubny. Fractional differential equation[M]. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1999.

Sliding Model Control Chaos Synchronization of Fractional Order Small World Network

MAO Beixing, CHENG Chunrui

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: The paper studied the sliding model chaos synchronization problem of fractional order small world network systems. As the chaos synchronization problem of the systems: $D^\alpha e_i(t) = A e_i(t) + g(y_i(t)) - g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma e_j(t) + u_i(t)$ (I). And the time-delay systems: $D^\alpha e_i(t) = A e_i(t) + g(y_i(t)) - g(x_i(t)) + \sigma \sum_{j=1}^N g_{ij} \Gamma e_j(t - \tau) + u_i(t)$ (II). If meet the linear matrix inequality: $A + (l + \epsilon + k - \eta)I < 0$, then systems (I) is chaos synchronization. If meet the linear matrix inequality: $A + (l + \epsilon + k_1 - \eta_1)I < 0$ and $\sigma G\Gamma + (k_2 - \eta_2)I < 0$, then systems (II) is sliding model chaos synchronization.

Key words: chaos synchronization; fractional order systems; small world networks systems

(责任编辑 许 甲)