

用单叶双曲螺旋管实现两个轴异面管道的光滑拼接*

邱梦鸾, 肖琳, 白根柱

(内蒙古民族大学 数学学院, 内蒙古 通辽 028000)

摘要:讨论了用单叶双曲螺旋管实现两轴异面圆管道之间光滑拼接的问题,给出了光滑拼接所满足的条件:两轴异面管道的轴线与单叶双曲螺旋管的轴线在拼接点处满足位置连续: $r(t_1)=M_1(x_1, y_1, z_1), r(t_2)=M_2(x_2, y_2, z_2)$,斜率连续: $d_1=\epsilon \cdot r'(t_1), d_2=\delta \cdot r'(t_2)$ ($\epsilon, \delta > 0$)及管道半径相同,同时得到了拼接曲面单叶双曲螺旋管的参数方程形式。并举出具体实例,以 Maple 数学软件为工具,给出拼接效果图。本研究对工业产品的外形设计具有重要的理论意义和实际的应用价值。

关键词:轴异面圆管道;单叶双曲螺旋管;光滑拼接

中图分类号:O87.1

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2016)02-0108-05

在计算机辅助几何设计中,曲面拼接是一项重要的课题。随着对曲面拼接技术的研究,有关共面直线或轴线共面的管道之间光滑拼接技术的研究较多,如文献[1-6]等。而关于异面直线或轴异面管道之间光滑拼接的研究结果并不多,文献[7]提出构造轴线与给定二异面圆管的轴分别共面的辅助圆柱,并利用二轴共面的吴文俊公式实现了给定圆管的分两段三次光滑拼接,文献[8]研究了两个轴异面的圆柱面,当拼接边界为与圆柱面轴线垂直的平面所截出的圆周曲线时,存在三次 GC^1 拼接曲面的充要条件,文献[9-11]分别研究了用广义圆柱螺旋管道、以 Bézier 曲线为轴线的管道与分别以推广的 Hartmann 函数曲线和两锥面交线为轴线的管道,实现了两个轴异面管道之间的光滑拼接问题。

为了丰富两个轴异面管道曲面之间的光滑拼接曲面,本文基于两异面直线可用单叶双曲螺旋线光滑拼接的情况,研究了用单叶双曲螺旋管实现两个轴异面管道之间的光滑拼接问题,举出具体实例,给出拼接效果图。

1 基本理论

定义 1 设单叶双曲面 $f(x, y, z) = 0$, 其中 $f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$, 其上的一个质点绕 z 轴匀速旋转上升的水平角度为 t , 该质点的运动轨迹称为单叶双曲螺旋线 $r(t)$, 如图 1 所示。其一般方程形式为

$$r(t) : \begin{cases} x = a \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}} \cos t, \\ y = b \sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}} \sin t, t \in (-\infty, +\infty), \\ z = \frac{Lt}{2\pi}, \end{cases}$$

其中 $a, b, c, L \neq 2\pi c$ 均为正数。

定义 2 一个圆的圆心沿着单叶双曲螺旋线做匀速运动,并且始终保持其圆平面垂直于单叶双曲螺旋线的瞬时点切线,则该圆的轨迹形成的曲面称为单叶双曲螺旋管,如图 2 所示,圆运动时圆心的轨迹称为轴线。单叶双曲螺旋管 Φ 的一般表达式为

* 收稿日期:2015-09-08 修回日期:2015-12-03 网络出版时间:2016-1-20 21:26

资助项目:国家自然科学基金(No. 11561052);内蒙古民族大学科学研究基金项目(No. NMDGP1415)

作者简介:邱梦鸾,女,研究方向为计算机辅助几何设计,E-mail:751881414@qq.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160120.2126.060.html

$$\Phi(\theta, t) = r(t) + r(N\cos\theta + B\sin\theta), t \in (-\infty, +\infty), \theta \in [0, 2\pi],$$

其中 $N = \frac{(r' \times r'') \times r'}{|(r' \times r'') \times r'|}$, $B = \frac{r' \times r''}{|r' \times r''|}$ 分别表示单叶双曲螺旋线 $r(t)$ 的单位主法矢、单位副法矢, r 表示单叶双曲螺旋管 Φ 的半径。

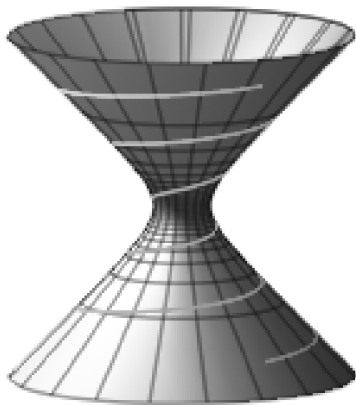


图 1 单叶双曲螺旋线的示意图

Fig. 1 The schematic diagram of hyperbolic spiral of one sheet



图 2 单叶双曲螺旋管的示意图

Fig. 2 The schematic diagram of hyperbolic spiral pipe of one sheet

给定两个轴异面直圆管道的一般表达式为:

$$\Phi_i: \Phi_i(\theta, t) = l_i(t) + r_i(e_{i1}\cos\theta + e_{i2}\sin\theta), i = 1, 2, t \in (-\infty, +\infty), \theta \in [0, 2\pi],$$

其中 $l_i: \frac{x-x_i}{A_i} = \frac{y-y_i}{B_i} = \frac{z-z_i}{C_i}, i = 1, 2$ 分别为 $\Phi_i, i = 1, 2$ 的轴线方程, 且 $e_{i1} = \left[\frac{B_i}{\sqrt{A_i^2+B_i^2}}, -\frac{A_i}{\sqrt{A_i^2+B_i^2}}, 0 \right]$, $e_{i2} = \left[\frac{A_i C_i}{\sqrt{A_i^2+B_i^2}\sqrt{A_i^2+B_i^2+C_i^2}}, \frac{B_i C_i}{\sqrt{A_i^2+B_i^2}\sqrt{A_i^2+B_i^2+C_i^2}}, -\frac{\sqrt{A_i^2+B_i^2}}{\sqrt{A_i^2+B_i^2+C_i^2}} \right], i = 1, 2, r_i (i = 1, 2)$ 分别表示 $\Phi_i (i = 1, 2)$ 的半径。

在几何造型中,关于参数曲线、曲面拼接的连续条件有两种不同的度量方法。一种是满足于数学上严格定义的函数曲线可微性方法,即曲线在连接处具有直到 n 阶连续导矢,另一种是满足相对宽松的约束条件的几何连续性方法,即合成曲线在拼接点处满足不同于 C^n 的某一组约束条件。工程上主要采用后者。

定义 3^[12] 若方向向量 α 和 β 的每一个分量为 C^n 连续,称 α 和 β 为 C^n 连续。

定义 4 若空间曲线 C 与两条空间异面直线 l_1, l_2 分别在拼接点处 C^n 连续,则称 C 与 l_1, l_2 C^n 连续。

定理 1 在拼接截面处,当单叶双曲螺旋管 Φ 的轴线与给定直圆管道 Φ_1 的轴线为 G^1 连续, Φ 的两互相垂直的半径的大小和方向与 Φ_1 对应的两互相垂直的半径的大小和方向均达到 C^1 连续,则 Φ 与 Φ_1 为 G^1 连续。

证明 根据上述条件可知, Φ_1 的一般表达式为

$$\Phi_1(\theta, t) = l_1(t) + r_1(e_{11}\cos\theta + e_{12}\sin\theta), t \in (-\infty, +\infty), \theta \in [0, 2\pi],$$

其中 $e_{11} = \left[\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}, -\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}, 0 \right], e_{12} = \left[\frac{A_1 C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}, \frac{B_1 C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}, -\frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}} \right]$,

且 $d_1 = [A_1, B_1, C_1]$ 表示 l_1 的方向向量, $e_{11} \perp e_{12}, e_{11} \perp d_1, e_{12} \perp d_1, r_1$ 表示 Φ_1 的半径。以 Γ_1 表示 Φ_1 在拼接点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 处截面圆的边界,其表达式为

$$\Gamma_1: C(\theta) = M_1 + r_1(e_{11}\cos\theta + e_{12}\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi],$$

又 Φ 的表达式为

$$\Phi(\theta, t) = r(t) + r(N\cos\theta + B\sin\theta), t \in (-\infty, +\infty), \theta \in [0, 2\pi],$$

其中 N, B 分别表示 $r(t)$ 的单位主法矢和单位副法矢, r 表示 Φ 截面圆的半径,且 $N \perp B$ 。

根据题设中的条件可知 $r(t)$ 在拼接点处: $r(t_1) = (x_1, y_1, z_1), r'(t_1) = \rho d_1, \rho > 0$ 。 Φ 的两互相垂直的半径: $r = r_1, N(t_1) = e_{11}, B(t_1) = e_{12}, r' = r_1' = 0, N'(t_1) = 0, B'(t_1) = 0$ 。易知 Φ 在边界 $\Gamma_1: \Phi(\theta, t_1) = (x_1, y_1, z_1) + r_1(e_{11}\cos\theta + e_{12}\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi]$, 即 $C(\theta)$ 。又 Φ 在边界 Γ_1 处沿轴线方向的切向为 $\Phi'(\theta, t_1) = r'(t_1) = \rho d_1$, 因边

界 Γ_1 上给定圆管 Φ_1 沿轴线方向的切向量为 d_1 , 则 Φ_1 与 Φ 沿 Γ_1 的切方向相同。因此 Φ 与 Φ_1 在边界 Γ_1 上任一点有相同的切平面。即两者达到 G^1 连续。 证毕

定理 2 能够 G^1 光滑拼接两个半径相同的轴异面管道 Φ_1 和 Φ_2 的单叶双曲螺旋管 Φ 应满足的条件:

1) 轴线拼接点处位置连续: $r(t_1) = M_1(x_1, y_1, z_1), r(t_2) = M_2(x_2, y_2, z_2)$, 即

$$x_1 = a\sqrt{1 + \frac{z_1^2}{c^2}} \cos t_1, y_1 = b\sqrt{1 + \frac{z_1^2}{c^2}} \sin t_1, z_1 = \frac{Lt_1}{2\pi}, x_2 = a\sqrt{1 + \frac{z_2^2}{c^2}} \cos t_2, y_2 = b\sqrt{1 + \frac{z_2^2}{c^2}} \sin t_2, z_2 = \frac{Lt_2}{2\pi}.$$

2) 轴线拼接点处斜率连续: $d_1 = \varepsilon \cdot r'(t_1), d_2 = \delta \cdot r'(t_2), \varepsilon, \delta > 0$, 即

$$A_1 = \varepsilon \cdot \left(\frac{aL^2 t_1}{4\pi^2 c^2 \sqrt{1 + \frac{z_1^2}{c^2}}} \cos t_1 - a\sqrt{1 + \frac{z_1^2}{c^2}} \sin t_1 \right), B_1 = \varepsilon \cdot \left(\frac{bL^2 t_1}{4\pi^2 c^2 \sqrt{1 + \frac{z_1^2}{c^2}}} \sin t_1 + b\sqrt{1 + \frac{z_1^2}{c^2}} \cos t_1 \right), C_1 = \varepsilon \cdot \left(\frac{L}{2\pi} \right),$$

$$A_2 = \delta \cdot \left(\frac{aL^2 t_2}{4\pi^2 c^2 \sqrt{1 + \frac{z_2^2}{c^2}}} \cos t_2 - a\sqrt{1 + \frac{z_2^2}{c^2}} \sin t_2 \right), B_2 = \delta \cdot \left(\frac{bL^2 t_2}{4\pi^2 c^2 \sqrt{1 + \frac{z_2^2}{c^2}}} \sin t_2 + b\sqrt{1 + \frac{z_2^2}{c^2}} \cos t_2 \right), C_2 = \delta \cdot \left(\frac{L}{2\pi} \right).$$

3) 半径相同: $r = r_1 = r_2$ 。

则单叶双曲螺旋管 Φ 的一般方程形式为:

$$\begin{cases} x = a\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}} \cos t + r(N_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta), \\ y = b\sqrt{1 + \frac{z^2}{c^2}} \sin t + r(N_2 \cos \theta + B_2 \sin \theta), t \in [t_1, t_2], \theta \in [0, 2\pi], \\ z = \frac{Lt}{2\pi} + r(N_3 \cos \theta + B_3 \sin \theta), \end{cases}$$

其中 $a, b, c, L \neq 2\pi c$ 均为正数, $N = [N_1, N_2, N_3], B = [B_1, B_2, B_3]$ 分别为 $r(t)$ 的单位主法矢、单位副法矢。

2 实际举例

例 1 给定两个半径相同的轴异面管道 Φ_1 和 Φ_2 , 其参数方程形式分别如下:

$$\Phi_1: \begin{cases} x = 5 - \frac{2}{\pi}t + \frac{5\pi}{\sqrt{4+25\pi^2}} \cos \theta - \frac{2\pi}{\sqrt{(4+25\pi^2)(4+26\pi^2)}} \sin \theta, \\ y = 5t + \frac{2}{\sqrt{4+25\pi^2}} \cos \theta + \frac{5\pi^2}{\sqrt{(4+25\pi^2)(4+26\pi^2)}} \sin \theta, t \in [-1, 0], \theta \in [0, 2\pi], \\ z = -2\pi + t - \frac{\sqrt{4+25\pi^2}}{\sqrt{4+26\pi^2}} \sin \theta, \end{cases}$$

$$\Phi_2: \begin{cases} x = -\frac{5}{2}t + \frac{2}{\sqrt{4+25\pi^2}} \cos \theta - \frac{10\pi^2}{\sqrt{(4+25\pi^2)(4+29\pi^2)}} \sin \theta, \\ y = \frac{5}{2} + \frac{t}{\pi} + \frac{5\pi}{\sqrt{4+25\pi^2}} \cos \theta + \frac{4\pi}{\sqrt{(4+25\pi^2)(4+29\pi^2)}} \sin \theta, t \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], \\ z = \frac{\pi}{2} + t - \frac{\sqrt{4+25\pi^2}}{\sqrt{4+29\pi^2}} \sin \theta, \end{cases}$$

则能够光滑拼接管道 Φ_1 和 Φ_2 的单叶双曲螺旋管的参数方程为

$$\begin{cases} x = \sqrt{5 + \frac{5t^2}{\pi^2}} \cos t + N_1 \cos \theta + B_1 \sin \theta, \\ y = \sqrt{5 + \frac{5t^2}{\pi^2}} \sin t + N_2 \cos \theta + B_2 \sin \theta, t \in \left[-2\pi, \frac{\pi}{2}\right], \theta \in [0, 2\pi], \\ z = t + N_3 \cos \theta + B_3 \sin \theta, \end{cases}$$

其中 $N = (N_1, N_2, N_3), B = (B_1, B_2, B_3)$ 分别是 $r(t) = \left(\sqrt{5 + \frac{5t^2}{\pi^2}} \cos t, \sqrt{5 + \frac{5t^2}{\pi^2}} \sin t, t\right)$ 的单位主法矢和单位副法

矢,如图 3 所示。

例 2 给定两个半径相同的轴异面管道 Φ_3 和 Φ_4 ,其参数方程形式分别如下:

$$\Phi_3 : \begin{cases} x = 2\sqrt{10} - \frac{9\sqrt{10}}{20\pi}t + \frac{80\pi}{\sqrt{81+1600\pi^2}}\cos\theta - \frac{108\sqrt{10}}{\sqrt{(81+1600\pi^2)(441+1600\pi^2)}}\sin\theta, \\ y = 2\sqrt{10}t + \frac{18}{\sqrt{81+1600\pi^2}}\cos\theta - \frac{480\sqrt{10}\pi}{\sqrt{(81+1600\pi^2)(441+1600\pi^2)}}\sin\theta, t \in [-1, 0], \theta \in [0, 2\pi], \\ z = -12 + \frac{3}{\pi}t - \frac{2\sqrt{81+1600\pi^2}}{\sqrt{441+1600\pi^2}}\sin\theta, \end{cases}$$

$$\Phi_4 : \begin{cases} x = 2\sqrt{10} + \frac{9\sqrt{10}}{20\pi}t + \frac{80\pi}{\sqrt{81+1600\pi^2}}\cos\theta + \frac{108\sqrt{10}}{\sqrt{(81+1600\pi^2)(441+1600\pi^2)}}\sin\theta, \\ y = 2\sqrt{10}t - \frac{18}{\sqrt{81+1600\pi^2}}\cos\theta + \frac{480\sqrt{10}\pi}{\sqrt{(81+1600\pi^2)(441+1600\pi^2)}}\sin\theta, t \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi], \\ z = 12 + \frac{3}{\pi}t - \frac{2\sqrt{81+1600\pi^2}}{\sqrt{441+1600\pi^2}}\sin\theta, \end{cases}$$

则能够光滑拼接管道 Φ_3 和 Φ_4 的单叶双曲螺旋管的方程为

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{1 + \frac{z^2}{16}}\cos t + 2(N_1\cos\theta + B_1\sin\theta), \\ x = 2\sqrt{1 + \frac{z^2}{16}}\sin t + 2(N_2\cos\theta + B_2\sin\theta), t \in [-4\pi, 4\pi], \theta \in [0, 2\pi], \\ x = \frac{3}{\pi}t + 2(N_3\cos\theta + B_3\sin\theta), \end{cases}$$

其中 $N = (N_1, N_2, N_3), B = (B_1, B_2, B_3)$ 分别是 $r(t) = \left(2\sqrt{1 + \frac{z^2}{16}}\cos t, 2\sqrt{1 + \frac{z^2}{16}}\sin t, \frac{3}{\pi}t\right)$ 的单位主法矢和单位副法矢,如图 4 所示。

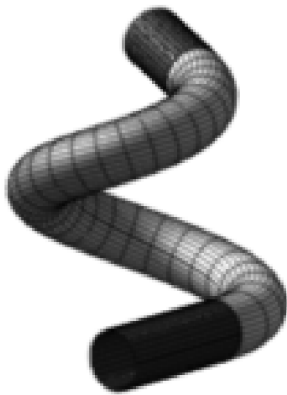


图 3 用单叶双曲螺旋管光滑拼接 Φ_1 和 Φ_2

Fig. 3 Employing hyperbolic spiral pipe of one sheet to smoothly blend two non-coplanar tubes Φ_1 and Φ_2

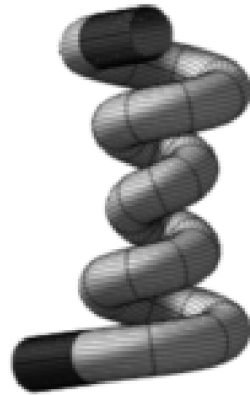


图 4 用单叶双曲螺旋管光滑拼接 Φ_3 和 Φ_4

Fig. 4 Employing hyperbolic spiral pipe of one sheet to smoothly blend two non-coplanar tubes Φ_3 and Φ_4

参考文献:

[1] 吴文俊,王定康. CAGD 中的代数曲面拟合问题[J]. 数学的实践与认识,1994(3):26-31.
 Wu W J, Wang D K. The algebraic surface fitting problem in CAGD[J]. Mathematics in Practice and Theory, 1994 (3):26-31.
 [2] Wu T R, Zhou Y S. On blending of several quadratic alge-

braic surfaces[J]. CAGD,2000,17 (8):759-766.
 [3] Chen F L, Chen C S, Deng J S. Blending pipe surfaces with piecewise algebraic surfaces[J]. Chinese Journal of Computers,2000,23(9):911-916.
 [4] Hartmann E. G_n-continuous connections between normal ringed surfaces[J]. CAGD,2001,18(8):751-770.

- [5] Cheng J S. Blending quadric surfaces via a base curvemethod[J]. Computer Mathematics, 2003, 77-86.
- [6] 程进三, 高小山. 构造两个曲面的拼接曲面[J]. 工程图学学报, 2005, 1: 39-44.
Cheng J S, Gao X S. Constructing blending surface for two arbitrary surfaces [J]. Journal of Engineering Graphics, 2005, 1: 39-44.
- [7] 雷娜, 崔丽, 伍铁如. 两个轴异面的管道拼接[J]. 吉林大学学报: 理学版, 2002, 40(2): 138-140.
Lei N, Cui L, Wu T R. Blending tubes whose axes are non-coplanar [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2002, 40(2): 138-140.
- [8] 白根柱, 展丙军, 雷娜. 两个轴异面圆柱面的光滑拼接问题 [J]. 吉林大学学报: 理学版, 2007, 45(2): 216-218.
Bai G Z, Zhan B J, Lei N. Blending of two cylinders with axes in different planes [J]. Journal of Jilin University: Science Edition, 2007, 45(2): 216-218.
- [9] Wang H, Bai G Z. Employing generalized cylindrical helioids tube to smoothly blending tubes whose axes are non-coplanar [C] // Proceedings of the 2013 international conference on vehicle & mechanical engineering and information technology. Switzerland: Trans Tech Publications Press, 2013, 380-384; 4028-4032.
- [10] Bai G Z, Wang H, Yin Z J. Employing generalized Bezier tube to smoothly blending tubes whose axes are non-coplanar [C] // Proceedings of the 2014 international conference on advances in materials science and information technologies in industry. Switzerland: Trans Tech Publications Press, 2014, 513-517; 2301-2306.
- [11] Bai G Z, Liu S Y, Wang H, et al. A novel method for smooth blending cylindrical surfaces whose axes are non-coplanar with intersecting line of two tapered surfaces [C] // Manufacturing Technology, electronics, computer and information technology applications. Switzerland: Trans Tech Publications Press, 2014, 687-691; 1470-1473.
- [12] 刘雪峰. 环面构造管道拼接曲面的方法及其连续性 [J]. 中国科学技术大学学报, 2004, 34(1): 20-28.
Liu X F. Blending pipe surface by ringed surface and its continuity [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2004, 34(1): 20-28.

Employing Hyperbolic Spiral Pipe of One Sheet to Smoothly Blend Tubes Whose Axes is Non-coplanar

QIU Mengluan, XIAO Lin, BAI Genzhu

(College of Mathematics, Inner Mongolia University for Nationalities, Tongliao Inner Mongolia 028000, China)

Abstract: This paper discusses the problem of the smooth blending between two tubes whose axes are non-coplanar with the hyperbolic spiral pipe of one sheet, and gives the smooth blending conditions: the axes of the two tubes whose axes are non-coplanar and the axis of hyperbolic spiral pipe of one sheet in splicing point meet position continuous: $r(t_1) = M_1(x_1, y_1, z_1)$, $r(t_2) = M_2(x_2, y_2, z_2)$, the slope continuous: $d_1 = \epsilon \cdot r'(t_1)$, $d_2 = \delta \cdot r'(t_2)$ ($q, \zeta > 0$), and the pipe radius is the same, at the same time, obtains smooth blending parameter surface. And citing specific examples, and using mathematical software Maple to draw the splicing effect pictures. This study has important theoretical significance and practical application value for the design of industrial products.

Key words: two tubes whose axes are non-coplanar axes; the hyperbolic spiral pipe of one sheet; smooth blending

(责任编辑 游中胜)