运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160329

M 次微分下多目标优化问题的最优性条件*

刘金杰，赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:主要考虑了一类带有不等式约束的非光滑多目标优化模型。在多目标优化的研究过程中,解的最优性条件一直是众多学者关注的内容。而对于非光滑多目标优化问题,利用广义微分的概念对其进行研究是非常有意义的研究课题。经典的广义微分工具包括 Clarke 广义梯度、Mordukhovich 次微分等等。利用 Mordukhovich 次微分的概念对多目标优化问题解的最优性条件进行推广,其中 Mordukhovich 次微分简记为 M 次微分。利用 Mordukhovich 伪凸的概念,建立了在 M 次微分意义下多目标优化问题弱有效解的必要充分最优性条件及其有效解的充分最优性条件。同时引入了 M 次微分意义下的线性化锥,并且利用该线性化锥构造了一个有效解的最优性条件的等价描述。最后对非光滑多目标优化的后续研究工作提出了一些可扩展的研究内容和问题。

关键词:M 次微分;非光滑多目标优化;最优性条件

中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)03-0001-05

众所周知,在经济管理、工程设计、交通运输等领域中,存在大量的多目标优化问题。自 20 世纪 70 年代以来,关于多目标优化理论与方法的研究已有大量重要而基础的研究成果。又由于多目标优化问题中目标函数或者约束函数不一定具有可微性,因此研究非光滑多目标优化问题就有了十分重要的理论意义与应用价值,其中关于非光滑多目标优化问题的最优性条件也受到了研究者们的广泛关注。特别地,在研究非光滑多目标问题中存在两类著名的广义微分工具:Clarke 广义梯度和 M 次微分,很多学者也对两者分别进行了研究和探讨。

2008 年,Winkler[1]通过 Clarke 方向导数和次微分讨论了 $C(T)$空间上凸向量优化问题中有效解和弱有效解的最优性条件;2015 年,文献[2]引入了 Clarke 方向导数意义下的线性化锥,同时文献[3]讨论了 $C(T)$空间上具有广义凸性条件的向量优化问题的最优性条件,并且通过 Clarke 方向导数意义下的线性化锥,提出了有效解的充分最优性条件的一个等价形式。基于文献[1-3]的启发,考虑通过 M 次微分讨论在 $\mathbf{R}^n$ 空间上具有广义凸性条件的多目标优化问题的最优性条件,并且引入在 M 次微分意义下的线性化锥,建立最优性条件的等价形式。

下面先给出了一些基本的定义和引理。然后建立了 M 次微分意义下非光滑多目标优化问题有效解和弱有效解的最优性条件,并且通过引入相应的线性化锥,给出了有效解最优性条件的一个等价形式。最后总结了本文的主要结果,提出了后续可能的一些研究课题。

1 预备知识

设 $C\subset\mathbf{R}^n$。int C,conv C 和 cl C 分别表示 C 的拓扑内部、凸包和闭包。集合 C 的代数内部、生成锥、极锥和在$\bar{x}$的法锥定义如下:

$$\text{core } C=\{x\in C\mid \forall\, y\in\mathbf{R}^n,\exists\,\lambda>0,x+\lambda y\in C\};\text{cone } C=\{\lambda a\mid a\in C,\lambda\geqslant 0\};$$

$$C^{\circ}=\{v\in\mathbf{R}^n\mid\langle v,d\rangle\leqslant 0,\forall\, d\in C\};N(C,\bar{x})=\{d\in\mathbf{R}^n\mid\langle d,x-\bar{x}\rangle\leqslant 0,\forall\, x\in C\}。$$

考虑下面的非光滑向量优化问题:

$$\text{(P)}\quad \min f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_l(x)),$$
$$\text{s.t. } g_j(x)\leqq 0,j=1,2,\cdots,m,x\in X\subset\mathbf{R}^n,$$

* **收稿日期**:2016-02-26　　**网络出版时间**:2016-04-29　18:34

资助项目:国家自然科学基金(No. 11431004; No. 11301574; No. 11271391);重庆市基础与前沿研究计划项目(No. cstc2015jcyjA00027);重庆市教委科学技术研究项目(No. KJ1500303)

作者简介:刘金杰,女,研究方向为多目标优化理论, E-mail: 332070262@qq.com;**通信作者**:赵克全,副教授,E-mail: kequanz@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160429.1834.006.html

其中 $f_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}, i\in I=\{1,2,\cdots,l\}$ 且 $g_j:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}, j\in J=\{1,2,\cdots,m\}$ 为局部 Lipschitz，X 是包含于 $\mathbf{R}^n$ 的非空闭凸子集。问题(P)的可行集表示为 $S=\{x\in\mathbf{R}^n: g_j(x)\leqq 0, j\in J\}$，其中 $\tilde{J}(\bar{x})=\{j\in J\mid g_j(\bar{x})=0\}$。

定义 1[4] 设 $\bar{x}\in S$，1) 若不存在 $x\in S$ 使得 $f(x)\leqslant f(\bar{x})$，则称 $\bar{x}$ 为问题(P)的有效解，其集合记为 $EFF(f(S),\mathbf{R}^l_+)$；2) 若不存在 $x\in S$ 使得 $f(x)<f(\bar{x})$，则称 $\bar{x}$ 为问题(P)的弱有效解，其集合记为 $EFF_W(f(S),\mathbf{R}^l_+)$。

定义 2[4] 设 $C\subset\mathbf{R}^n$，$\bar{x}\in\mathrm{cl}\,C$。C 在 $\bar{x}$ 处的切锥定义为：

$$T(C;\bar{x}):=\{d\in\mathbf{R}^n\mid\exists\{(x_n,t_n)\}\subset(C\times\mathbf{R}_{++}),\ \mathrm{s.t.}\ x_n\to\bar{x}, t_n(x_n-\bar{x})\to d\}。$$

注 1 1) $N(C,\bar{x})=T(C,\bar{x})^\circ$；2) $T(C,\bar{x})=\mathrm{cl}\bigcup\limits_{\tau>0}\tau(C-\bar{x})$。

定义 3[5] 设 Ω 是包含于 $\mathbf{R}^n$ 的非空子集。给定 $x\in\Omega$ 及 $\varepsilon\geqslant 0$，则 Ω 在 $\bar{x}$ 处的 M 法锥定义如下：

$$\hat{N}(\bar{x};\Omega):=\limsup_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x},\varepsilon\downarrow 0}\hat{N}_\varepsilon(\bar{x};\Omega),$$

其中 $\hat{N}_\varepsilon(\bar{x};\Omega)=\left\{x^*\in\mathbf{R}^n\,\middle|\,\limsup\limits_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}}\dfrac{\langle x^*,x-\bar{x}\rangle}{\|x-\bar{x}\|}\leqq\varepsilon\right\}$。

注 2 1) 若 $x\notin\Omega$，则有 $\hat{N}(\bar{x};\Omega)=\varnothing$；2) 若 Ω 是凸集，则有 $\hat{N}(\bar{x};\Omega)=N(\bar{x};\Omega)$。

定义 4[5] 考虑广义实值函数 $\varphi:\mathbf{R}^n\to\overline{\mathbf{R}}=[-\infty,+\infty]$，$\bar{x}\in\mathbf{R}^n$ 且 $|\varphi(\bar{x})|<\infty$，则 φ 在 $\bar{x}$ 处的 M 次微分集定义为 $\partial_M\varphi(\bar{x})=\{x^*\in\mathbf{R}^n:(x^*,-1)\in\hat{N}((\bar{x},\varphi(\bar{x}));\mathrm{epi}\,\varphi)\}$。

注 3 若 $|\varphi(\bar{x})|=\infty$，则有 $\partial_M\varphi(\bar{x})=\varnothing$。

定义 5[6] 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是局部 Lipschitz 且 $\bar{x},v\in\mathbf{R}^n$，则 f 在 $\bar{x}$ 处沿着方向 v 的 Clarke 方向导数定义为 $f^\circ(\bar{x},v)=\limsup\limits_{y\to\bar{x},t\downarrow 0}\dfrac{f(y+tv)-f(y)}{t}$，且 f 在 $\bar{x}$ 处的 Clarke 次微分集合为 $\partial_C f(\bar{x})=\{\xi\in\mathbf{R}^n\mid\langle\xi,v\rangle\leqslant f^\circ(\bar{x},v),\forall v\in\mathbf{R}^n\}$。

注 4 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在 $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$ 处是局部 Lipschitz，则有 $\partial_C f(\bar{x})=\mathrm{cl\ conv}\,\partial_M f(\bar{x})$。

引理 1[5] 设 φ 在包含 $[x,y]$ 的开集上是局部 Lipschitz，则存在 $c\in[x,y)$，$\xi\in\partial_M\varphi(c)$，使得 $\varphi(y)-\varphi(x)\leqslant\langle\xi,y-x\rangle$。

引理 2[7] 对于局部 Lipschitz 的函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$，$\partial_M f(x)$ 是外半连续的，即有

$$\limsup_{x\to\bar{x}}\partial_M f(x)\subset\partial_M f(\bar{x}),\ \forall\,\bar{x}\in\mathbf{R}^n。$$

定义 6[8] 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是局部 Lipschitz。若对于任意 $x,y\in\mathbf{R}^n$，$x\neq y$，有

$$f(x)<f(y)\Rightarrow\langle\xi,x-y\rangle<0,\ \forall\,\xi\in\partial_M f(y),$$

则称 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上伪凸。

引理 3 对于问题(P)，设 $\bar{x}\in S$ 且 $f_i(x), i\in I$ 和 $g_j(x), j\in J$ 在 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz。则集合

$$(\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in\tilde{J}(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x}))$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中有界。

引理 3 通过注 4 和文献[3]中的引理 3.1 可证。

引理 4[1] 设 A 和 B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个子集，且 A 是有界的，则有 $\mathrm{cl}\,(A+B)=\mathrm{cl}\,A+\mathrm{cl}\,B$。

引理 5[3] 设 A,B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的两个锥，则有 $0\in\mathrm{core}\,(A+B)\Leftrightarrow A+B=\mathbf{R}^n$。

引理 6[9] 设 $K_1,K_2,\cdots,K_m$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的非空凸锥，则有 $(\mathrm{cl}\,K_1\cap\cdots\cap\mathrm{cl}\,K_m)^\circ=\mathrm{cl}\,(K_1^\circ+\cdots+K_m^\circ)$。

2 主要结果

本部分在文献[3]的基础上建立了 M 次微分意义下弱有效解的充分必要条件和有效解的充分性条件，并且基于 Burachik 和 Rizvi 的工作[10]，引入了 M 次微分意义下的线性化锥，进而建立了有效解的充分性条件的一个等价形式。

定理 1 （弱有效解的充分必要条件）对于非光滑多目标规划问题(P)，假设 $\bar{x}\in S$，函数 $f_i(x), i\in I$ 和 $g_j(x), j\in J$ 在 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz 且在 $\mathbf{R}^n$ 上伪凸，则有 $\bar{x}\in EFF_W(f(S),\mathbf{R}^l_+)$ 当且仅当

$$0\in\mathrm{cl}\,(\mathrm{conv}\,((\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in\tilde{J}(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x}))))+\hat{N}(X,\bar{x})。$$

证明 必要性。假设 $\bar{x}\notin EFF_W(f(S),\mathbf{R}^l_+)$，则存在 $x\in X\setminus\{\bar{x}\}$，使得

$$f_i(x)<f_i(\bar{x}),\ \forall\,i\in I;\ g_j(x)\leqslant 0=g_j(\bar{x}),\ \forall\,j\in\tilde{J}(\bar{x})。$$

因为 $f_i(x),i\in I$ 和 $g_j(x),j\in J$ 均为伪凸函数，则有

$$\langle \xi_i, x-\bar{x}\rangle<0,\ \forall\ \xi_i\in\partial_M f_i(\bar{x}),\ \forall\ i\in I;\langle \eta_j, x-\bar{x}\rangle<0,\ \forall\ \eta_j\in\partial_M g_j(\bar{x}),\ \forall\ j\in\tilde{J}(\bar{x})。$$

故存在一个常数 $M_1<0$，使得 $\langle \xi_i, x-\bar{x}\rangle\leqslant M_1,\ \forall\ \xi_i\in\partial_M f_i(\bar{x}),\ \forall\ i\in I$。同理存在一个常数 $M_2<0$，使得 $\langle \eta_j, x-\bar{x}\rangle\leqslant M_2,\ \forall\ \eta_j\in\partial_M g_j(\bar{x}),\ \forall\ j\in\tilde{J}(\bar{x})$。

因此对于 $\forall\ \alpha\in \mathrm{cl}(\mathrm{conv}((\bigcup\limits_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup\limits_{j\in\tilde{J}(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x}))))$，可得 $\langle\alpha, x-\bar{x}\rangle\leqslant\max\{M_1,M_2\}<0$。

另一方面，由注 2 可知，对 $\forall\ \beta\in\hat{N}(X,\bar{x})$，有 $\langle\beta,x-\bar{x}\rangle\leqslant 0$。故可知 $\langle\alpha+\beta,x-\bar{x}\rangle<0$。即

$$0\notin \mathrm{cl}(\mathrm{conv}((\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in\tilde{J}(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x}))))+\hat{N}(X,\bar{x})。$$

充分性。由注 2、引理 3 和引理 4 可知，集合

$$\mathrm{cl}(\mathrm{conv}((\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in\tilde{J}(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x}))))+\hat{N}(X,\bar{x})$$

是闭凸集。假设 $0\notin \mathrm{cl}(\mathrm{conv}((\bigcup\limits_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup\limits_{j\in\tilde{J}(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x}))))+\hat{N}(X,\bar{x})$，则由强凸集分离定理可知：$\exists\ p\in\mathbf{R}^n$，$p\neq 0$，且 $M<0$ 使得

$$\langle\xi+\eta,p\rangle\leqslant M<0,\ \forall\ \xi\in\mathrm{conv}((\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in\tilde{J}(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x}))),\ \forall\ \eta\in\hat{N}(X,\bar{x})。$$

又因为 X 是凸集，且 $\hat{N}(X,\bar{x})$ 是 X 在 $\bar{x}$ 处的基本法锥，故知 $p\in T(X,\bar{x})=\mathrm{cl}\bigcup\limits_{\tau>0}\tau(X-\bar{x})$。令 $\eta=0$，则有 $\langle\xi,p\rangle\leqslant M<0,\ \forall\ \xi\in\mathrm{conv}\ ((\bigcup\limits_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x})))$。即：

$$\langle \xi_i, x-\bar{x}\rangle<0,\ \forall\ \xi_i\in\partial_M f_i(\bar{x}),\ \forall\ i\in I;\langle \eta_j, x-\bar{x}\rangle<0,\ \forall\ \eta_j\in\partial_M g_j(\bar{x}),\ \forall\ j\in\tilde{J}(\bar{x})。$$

由于 $p\in T(X,\bar{x})$，则存在 $\{(x_n,t_n)\}\subset X\times\mathbf{R}_{++}$ 使得 $x_n\to\bar{x}$ 且 $t_n(x_n-\bar{x})\to p$。根据中值定理，存在 $v_n^i\in[\bar{x},x_n)$ 且 $\xi_n^i\in\partial_M f_i(v_n^i)$ 使得

$$f_i(x_n)-f_i(\bar{x})\leqslant\langle\xi_n^i,x_n-\bar{x}\rangle,\ \forall\ i\in I,$$

其中 $v_n^i=\bar{x}+\lambda_n^i(x_n-\bar{x}),\lambda_n^i\in[0,1)$。因此 $v_n^i\to\bar{x}$。又因为 $f_i(x)$ 是局部 Lipschitz，故知序列 $\{\xi_n^i\}$ 有界。因此在序列 $\{\xi_n^i\}$ 中存在收敛子列。不失一般性，将其记为 $\{\xi_n^i\}$，则有 $\{\xi_n^i\}\to\xi_0^i,i\in I$。由 M 次微分的外半连续性可知 $\xi_0^i\in\partial_M f_i(\bar{x}),\ \forall\ i\in I$。故有

$$t_n(f_i(x_n)-f_i(\bar{x}))\leqq\langle\xi_n^i,t_n-(x_n-\bar{x})\rangle,$$

$$\lim_{n\to\infty}t_n(f_i(x_n)-f_i(\bar{x}))\leqq\lim_{n\to\infty}\langle\xi_n^i,t_n(x_n-\bar{x})\rangle=\langle\xi_0^i,p\rangle<0。$$

因此存在 $N_i>0$，使得当 $n>N_i$ 时有 $f_i(x_n)<f_i(\bar{x})$。故当 $n>\max\{N_i\}_{i\in I}$ 时，有 $f_i(x_n)<f_i(\bar{x}),\ \forall\ i\in I$。

同理，$g_j(x_n)<g_j(\bar{x}),\ \forall\ j\in\tilde{J}(\bar{x})$。又知当 $j\notin\tilde{J}(\bar{x})$ 时，$g_j(\bar{x})<0$。由 $g_j(x)$ 的连续性有 $g_j(x_n)\leqslant 0$。因此有 $\bar{x}\notin EFF_W(f(S),\mathbf{R}_+^l)$。　　证毕

定理 2　（有效解的充分性条件）对于非光滑多目标规划问题(P)，假设 $\bar{x}\in S$，函数 $f_i(x),i\in I$ 和 $g_j(x),j\in J$ 在 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz 且在 $\mathbf{R}^n$ 上伪凸。若有

$$0\in\mathrm{core}(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}(\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in\tilde{J}(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x})))))+\hat{N}(X,\bar{x})),$$

则 $\bar{x}\in EFF(f(S),\mathbf{R}_+^l)$。

证明　设 $\bar{x}\notin EFF(f(S),\mathbf{R}_+^l)$，$A=(\bigcup\limits_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup\limits_{j\in\tilde{J}(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x}))$，则 $\exists\ x\in X\backslash\{\bar{x}\},i_0\in I$，使得

$$f_{i_0}(x)<f_{i_0}(\bar{x});f_i(x)\leqslant f_i(\bar{x}),\ \forall\ i\in I\backslash\{i_0\};g_j(x)\leqslant 0=g_j(\bar{x}),\ \forall\ j\in\tilde{J}(\bar{x})。$$

因为 $f_i(x),i\in I$ 和 $g_j(x),j\in J$ 均为伪凸函数，则由定义可知对于 $\forall\ \gamma\in A$，有 $\langle\gamma,x-\bar{x}\rangle\leqslant 0$。又由凸包和锥包的定义可知，对 $\forall\ v\in\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\ A))$，有 $\langle v,x-\bar{x}\rangle\leqslant 0$。现对 $\forall\ z\in\mathrm{core}(\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\ A))+\hat{N}(X,\bar{x}))$，有对于任意给定的 $d\in\mathbf{R}^n$，$\exists\lambda>0$，使得

$$z+\lambda d\in\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\ A))+\hat{N}(X,\bar{x})。$$

因此，存在 $z_1\in\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(\mathrm{conv}\ A))$ 以及 $z_2\in\hat{N}(X,\bar{x})$ 使得 $z+\lambda d=z_1+z_2$。又由 X 的凸性可知，$\hat{N}(X,\bar{x})=N(X,\bar{x})$。因此有

$$\langle z_1,x-\bar{x}\rangle\leqslant 0,\langle z_2,y-\bar{x}\rangle\leqslant 0,\ \forall\ y\in X。$$

令 $y=x,d=x-\bar{x}$，则有 $\langle z+\lambda d,x-\bar{x}\rangle\leqslant 0;\langle z+\lambda(x-\bar{x}),x-\bar{x}\rangle\leqslant 0$。

又由于 $x\neq\bar{x}$ 且 $\lambda\langle x-\bar{x},x-\bar{x}\rangle=\lambda\|x-\bar{x}\|>0$，则有 $\langle z,x-\bar{x}\rangle<0$。由 z 的任意性可知

$$0\notin\operatorname{core}(\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(\operatorname{conv}((\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in J(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x})))))+\hat{N}(X,\bar{x})),$$

与条件矛盾。 证毕

推论 1 对于非光滑多目标规划问题(P)，假设 $\bar{x}\in S$，函数 $f_i(x),i\in I$ 在 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz 且在 $\mathbf{R}^n$ 上伪凸。若有 $0\in\operatorname{core}(\operatorname{cl}(\operatorname{conv}(\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x})))+\hat{N}(X,\bar{x}))$，则 $\bar{x}\in EFF(f(S),\mathbf{R}^l_+)$。

1994年，Maeda 首次引入集合 $Q(\bar{x})$，$Q^i(\bar{x})$ 对正则性条件进行推广并建立了强 Kuhn-Tucker 必要最优性条件[10]；2012年，Burachik 和 Rizvi 引入了新的集合[11]：对于 $\bar{x}\in X$，有

$$M^i(\bar{x})=\{x\in\mathbf{R}^n\mid g(x)\leqq 0,f_i(x)\leqq f_i(\bar{x})\},i\in I;M(\bar{x})=\bigcap_{i\in I}M^i(\bar{x})。$$

2015年，赵克全基于 Burachik 和 Rizvi 的工作，提出了关于集合 $M(\bar{x})$，$M^i(\bar{x})$ 的 Clarke 方向导数意义下的线性化锥[2]。因此在 Burachik，Rizvi 和赵克全的工作基础上[2,11]，提出关于集合 $M(\bar{x})$，$M^i(\bar{x})$ 的 M 次微分意义下的线性化锥如下。

定义 7 在 M 次微分意义下，集合 $M(\bar{x})$ 在 $\bar{x}$ 处的线性化锥定义为：

$$L_M(M(\bar{x}),\bar{x})=\{d\in\mathbf{R}^n\mid\langle\xi,d\rangle\leqq 0,\forall\xi\in\partial_M f_i(\bar{x}),i\in I,\langle\eta,d\rangle\leqq 0,\forall\eta\in\partial_M g_j(\bar{x}),j\in J(\bar{x})\}。$$

简记为 $L_M(M(\bar{x}),\bar{x})=\{d\in\mathbf{R}^n\mid\langle\partial_M f_i(\bar{x}),d\rangle\leqq 0,i\in I,\langle\partial_M g_j(\bar{x}),d\rangle\leqq 0,j\in J(\bar{x})\}$。

注 5 在 $\mathbf{R}^n$ 空间中，$L_M(M(\bar{x}),\bar{x})$ 是闭凸锥。

定理 3 对于非光滑多目标规划问题(P)，假设 $\bar{x}\in S$，函数 $f_i(x),i\in I$ 和 $g_j(x),j\in J$ 在 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz，则有

$$0\in\operatorname{core}(\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(\operatorname{conv}((\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in J(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x})))))+\hat{N}(X,\bar{x}))\Leftrightarrow L_M(M(\bar{x}),\bar{x})\cap T(X,\bar{x})=\{0\}。$$

证明 显然有 $L_M(M(\bar{x}),\bar{x})\cap T(X,\bar{x})=\{0\}\Leftrightarrow(L_M(M(\bar{x}),\bar{x})\cap T(X,\bar{x}))^\circ=\mathbf{R}^n$。由引理6和集合 $(L_M(M(\bar{x}),\bar{x})^\circ+N(X,\bar{x}))$ 的凸性可知

$$(L_M(M(\bar{x}),\bar{x})\cap T(X,\bar{x}))^\circ=\operatorname{cl}(L_M(M(\bar{x}),\bar{x})^\circ+T(X,\bar{x})^\circ)=\operatorname{cl}(L_M(M(\bar{x}),\bar{x})^\circ+N(X,\bar{x}))=$$
$$L_M(M(\bar{x}),\bar{x})^\circ+N(X,\bar{x})=\mathbf{R}^n。$$

又由引理5和集合 X 的凸性可知，

$$L_M(M(\bar{x}),\bar{x})\cap T(X,\bar{x})=\{0\}\Leftrightarrow 0\in\operatorname{core}(L_M(M(\bar{x}),\bar{x})^\circ+\hat{N}(X,\bar{x}))。$$

现只需证 $L_M(M(\bar{x}),\bar{x})^\circ=\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(\operatorname{conv}((\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in J(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x})))))$ 即可。

由定义可知，

$$L_M(M(\bar{x}),\bar{x})^\circ=((\bigcap_{i\in I}(\partial_M f_i(\bar{x}))^\circ)\cap(\bigcap_{j\in J(\bar{x})}(\partial_M g_j(\bar{x}))^\circ))^\circ=((\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))^\circ\cap(\bigcup_{j\in J(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x}))^\circ)^\circ=$$
$$((\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in J(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x})))^{\circ\circ}=(\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(\operatorname{conv}((\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in J(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x}))))))^{\circ\circ}。$$

即有 $L_M(M(\bar{x}),\bar{x})^\circ=\operatorname{cl}(\operatorname{cone}(\operatorname{conv}((\bigcup_{i\in I}\partial_M f_i(\bar{x}))\cup(\bigcup_{j\in J(\bar{x})}\partial_M g_j(\bar{x})))))$ 成立。 证毕

定理 4 对于非光滑多目标规划问题(P)，假设 $\bar{x}\in S$，函数 $f_i(x),i\in I$ 和 $g_j(x),j\in J$ 在 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz 且在 $\mathbf{R}^n$ 上伪凸。若 $L_M(M(\bar{x}),\bar{x})\cap T(X,\bar{x})=\{0\}$，则有 $\bar{x}\in EFF(f(S),\mathbf{R}^l_+)$。

由定理2和定理3易证定理4。

3 结论和展望

本文使用 M 次微分工具，讨论了在 $\mathbf{R}^n$ 空间中非光滑多目标规划问题的最优性条件。并且基于 Burachik 和 Rizvi 的工作[11]，引入了在 M 次微分意义下的线性化锥。通过线性化锥，建立了有效解的充分最优性条件的一个等价形式。在后续的工作里，可以讨论在一般的 Asplund 空间中是否具有相同的结论，以及在一般的无限维空间中是否具有相同的结论，比如：$C(T)$ 空间等等。同时，本文中主要结果需要的广义凸性是否可进一步减弱；在 M 次微分的意义下是否可以对各类真有效解建立类似的最优性条件等。

参考文献：

[1] Winkler K. A characterization of efficient and weakly efficient points in convex vector optimization[J]. SIAM Jour-

nal on Optimization,2008,19(2):756-765.
[2] Zhao K Q. Strong Kuhn-Tucker optimality in nonsmooth multiobjective optimization problems[J]. Pacific Journal of Optimization,2015,11(3):483-494.
[3] Zhao K Q, Yang X M. Characterizations of efficient and weakly efficient points in nonconvex vector optimization [J]. Journal of Global Optimization,2015,61(3):575-590.
[4] Jahn J. Vector optimization[M]. New York:Springer-Verlag,2004.
[5] Mordukhovich B S. Variational analysis and generalized differentiation I: basic theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
[6] Clarke F H. Optimization and nonsmooth analysis[M]. New York:Wiley,1983.
[7] Rockafellar R T, Wets R J. Variational analysis[M]. Berlin:Springer-Verlag,1998.
[8] Fan L, Liu S, Gao S. Generalized monotonicity and convexity of non-differentiable functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2003,279(1):276-289.
[9] Rockafellar R T. Convex analysis[M]. New York: Princeton University Press,1970.
[10] Maeda T. Constraint qualifications in multiobjective optimization problems: differentiable case[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1994,80(3):483-500.
[11] Burachik R S, Rizvi M M. On weak and strong Kuhn-Tucker conditions for smooth multiobjective optimization [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2012,155(2):477-491.

Operations Research and Cybernetics

Optimality Conditions for Multiobjective Optimization Problems in Terms of the M Subdifferential

LIU Jinjie, ZHAO Kequan
(School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Throughout this paper, we consider the nonsmooth multiobjective programming problem with inequality constraints. In the studying of the multiobjective programming problem, many researchers focus on the optimality of the solutions. What's more, for the nonsmooth multiobjective programming problem, it is meaningful to discuss in the term of the generalized differential. The classical generalized differential tools include the Clarke subdifferential and the Mordukhovich's subdifferential. In our paper, we mainly use the Mordukhovich's subdifferential to study the nonsmooth multiobjective programming problem. The M subdifferential is short of the Mordukhovich's subdifferential. In this paper, we introduce the definition of the Mordukhovich's pseudoconvex. Then the necessary and sufficient optimality condition of the weak efficiency solutions and the sufficient optimality condition of the efficiency solutions are given. What's more, we introduce the concept of the linearizing cones by using the Mordukhovich's subdifferential and propose an equivalent description of the efficient solutions' optimality condition with it. Finally, we give some further research problems for following study.

Key words: M subdifferential; nonsmooth multiobjective programming; optimality conditions

（责任编辑　黄　颖）