运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160318

广义 Kuhn-Tucker 真有效解在非光滑向量优化中的充分条件*

瞿先平[1,2]

(1. 重庆电讯职业学院 基础部,重庆 402247;2. 重庆理工大学 计算机科学与工程学院,重庆 400054)

摘要:考虑带不等式约束的非光滑向量优化问题,并且引入带 Clarke 导数的广义 Kuhn-Tucker 约束品性,分别在广义 Kuhn-Tucker 约束品性成立和约束函数是凹函数这两种情况下,证明了 Geoffrion 真有效解是广义 Kuhn-Tucker 真有效解。

关键词:非光滑向量优化;广义 Kuhn-Tucker 约束品性;Geoffrion 真有效解;广义 Kuhn-Tucker 真有效解

中图分类号:O221.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2016)03-0011-04

众所周知向量优化问题中有效解的研究一直是最重要的研究课题之一,它为决策者提供了一种折中的解决方案。但是有一些有效解呈现了一些异常的性质,为了解决这种现象,引入了许多真有效解的概念。在文献[1]中指出 Kuhn 和 Tucker 引入了最原始的真有效解的概念,即 Kuhn-Tucker 真有效解,Geoffrion 在文献[2]中提出了另一种真有效解,即 Geoffrion 真有效解,这在一定程度上消除了一些异常的有效点,并且给出了它的一些比较好的性质。

为了研究向量 Lagrange 乘子的存在性,在文献[3-7]中研究了向量优化的最优性条件并提出了多种约束品性,如 Kuhn-Tucker 约束品性(KTCQ)、Zangwill 约束品性、Mangasarian-Fromovitz 约束品性、basic 约束品性、线性无关约束品性。文献[2]证明了在 Kuhn-Tucker 约束品性条件下 Geoffrion 真有效解和 Kuhn-Tucker 真有效解之间的关系。

本文讨论了带 Clarke 导数的广义 Kuhn-Tucker 真有效解和广义 Kuhn-Tucker 约束品性(GKTCQ)。并证明了在广义 Kuhn-Tucker 约束品性成立和约束函数是凹函数这两种情况下,Geoffrion 真有效解是广义 Kuhn-Tucker 真有效解。

1 预备知识

在本文中,设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧氏空间。为了方便起见,对 $x,y\in\mathbf{R}^n$,记 $x\geqq y\Leftrightarrow x_i\geqslant y_i, i=1,2,\cdots,n$;$x\geqslant y\Leftrightarrow x\geqq y$ 且 $x\neq y$;$x>y\Leftrightarrow x_i>y_i, i=1,2,\cdots,n$。

下面给出一些基本概念和引理。

定义 1[8] 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在给定点 $x\in\mathbf{R}^n$ 处是局部 Lipschitz 函数。f 在 $x\in\mathbf{R}^n$ 沿方向 $v\in\mathbf{R}^n$ 的 Clarke 方向导数为 $f^\circ(x;v)=\limsup\limits_{y\to x,\lambda\to 0^+}\dfrac{f(y+\lambda v)-f(y)}{\lambda}$,$f$ 在 $x\in\mathbf{R}^n$ 的 Clarke 次微分是

$$\partial^C f(x)=\{\xi\in\mathbf{R}^n: f^\circ(x;v)\geqslant\langle\xi,v\rangle,\ \forall v\in\mathbf{R}^n\}。$$

定义 2[9] 函数 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 称为凹函数,如果对任意 $x,y\in\mathbf{R}^n$ 和任意 $\lambda\in[0,1]$ 满足

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)。$$

若 f 在 $\mathbf{R}^n$ 是局部 Lipschitz 函数,则 f 是凹函数等价于 $f(y)\leqslant f(x)+f^\circ(x;y-x),\ \forall x,y\in\mathbf{R}^n$。

本文考虑如下带不等式约束的非光滑向量优化问题:

$$\begin{aligned}(\mathrm{VP})\ \min\ & f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_l(x)),\\ \mathrm{s.t.}\ & g(x)=(g_1(x),g_2(x),\cdots,g_m(x))\leqq 0。\end{aligned}$$

* **收稿日期**:2015-03-27 **修回日期**:2015-11-17 **网络出版时间**:2016-04-29 18:37

资助项目:国家自然科学基金(No. 61502065);四川省高校重点实验室开放基金(No. 2015WZJ02)

作者简介:瞿先平,女,讲师,研究方向为最优化理论及计算机图像图形学,E-mail:281144085@qq.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160429.1837.028.html

其中实值函数 $f_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}, i\in I:=\{1,2,\cdots,l\}$ 和 $g_j:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}, j\in J:=\{1,2,\cdots,m\}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上均为局部 Lipschitz 函数。问题(VP)的可行集 D 为 $D=\{x:g(x)\leqslant 0\}$。设 $J(x)=\{j\in J:g_j(x)=0\}$。

定义 3[1] 可行解 $\bar{x}\in D$ 是问题(VP)的有效解,若不存在 $x\in D$ 使得 $f(x)\leqslant f(\bar{x})$。

定义 4[2] 设可行解 $\bar{x}\in D$ 是问题(VP)的 Geoffrion 真有效解,若 $\bar{x}$ 是问题(VP)的有效解且存在实数 $M>0$,使得对任意的 $i(i=1,2,\cdots,l)$ 及任意满足 $f_i(x)<f_i(\bar{x})$ 的 $x\in D$,总存在满足 $f_j(x)>f_j(\bar{x})$ 的 j,使得 $\dfrac{f_i(x)-f_i(\bar{x})}{f_j(\bar{x})-f_j(x)}\leqslant M$。

定义 5[1] 可行解 $\bar{x}\in D$ 是问题(VP)的广义 Kuhn-Tucker 真有效解,若 $\bar{x}$ 是问题(VP)的有效解且不等式系统

$$f_{i_0}^{\circ}(\bar{x};d)<0,存在\ i_0\in I; \tag{1}$$

$$f_k^{\circ}(\bar{x};d)\leqslant 0,\ \forall k\in I\backslash\{i_0\}; \tag{2}$$

$$g_j^{\circ}(\bar{x};d)\leqslant 0,\ \forall j\in J(\bar{x}) \tag{3}$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中无解。

引理 1[8] 设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上为局部 Lipschitz 函数,则:1) 函数 $d\to f^{\circ}(x;d)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是有限的、正齐次的、次可加的;2) $f^{\circ}(x;d)$ 在点 (x,d) 处是上半连续函数;3) $(-f)^{\circ}(x;d)=f^{\circ}(x;-d)$;4) $f^{\circ}(x;v)=\max\{\langle\xi,v\rangle,\forall\xi\in\partial^C f(x),\forall v\in\mathbf{R}^n\}$。

引理 2[8] 设 $x,y\in\mathbf{R}^n$ 和 f 在包含线段 $[x,y]$ 的开集上是局部 Lipschitz 函数,则在线段 (x,y) 上存在一点 u 使得 $f(y)-f(x)\in\langle\partial^C f(u),y-x\rangle$。

2 主要结论

下面给出广义 Kuhn-Tucker 约束品性(GKTCQ)。

(GKTCQ) 对任意满足 $g_j^{\circ}(\bar{x};d)\leqslant 0,\forall j\in J$ 的 $d\in\mathbf{R}^n$,存在一个实数 $\bar{t}>0$,函数 $\theta:[0,\bar{t}]\to\mathbf{R}^n$ 和 $\alpha>0$ 使得 $\theta(0)=\bar{x}, g(\theta(t))\leqq 0,\forall t\in[0,\bar{t}]$ 和 $\theta'(0)=\alpha d$。

定理 1 设 $\bar{x}\in D$ 是问题(VP)的可行解,并且假设在点 $\bar{x}$ 处(GKTCQ)成立。如果 $\bar{x}\in D$ 是问题(VP)的 Geoffrion 真有效解,则 $\bar{x}$ 是问题(VP)的广义 Kuhn-Tucker 真有效解。

证明 因为 $\bar{x}\in D$ 是问题(VP)的 Geoffrion 真有效解,则显然 $\bar{x}$ 是问题(VP)的有效解。为了证明 $\bar{x}$ 是问题(VP)的广义 Kuhn-Tucker 真有效解,只需要证明任意 $d\in\mathbf{R}^n$ 都有系统(1)~(3)式不成立即可。下面利用反证法来证明。

假设对任意固定的 $i\in I$,存在 $d^i\in\mathbf{R}^n$ 使得

$$f_i^{\circ}(\bar{x};d^i)<0; \tag{4}$$

$$f_k^{\circ}(\bar{x};d^i)\leqslant 0,\ \forall k\in I\backslash\{i\}; \tag{5}$$

$$g_j^{\circ}(\bar{x};d^i)\leqslant 0,\ \forall j\in J(\bar{x})。 \tag{6}$$

由(GKTCQ)和(6)式,可得存在实数 $\bar{t}>0$,函数 $\theta:[0,\bar{t}]\to\mathbf{R}^n$ 和 $\alpha>0$ 使得 $\theta(0)=\bar{x}, g(\theta(t))\leqq 0,\forall t\in[0,\bar{t}]$ 和 $\theta'(0)=\alpha d^i$,显然 $\theta(t)\in D,\forall t\in[0,\bar{t}]$。

下面考虑对任意收敛于 0 的正的序列 $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}\subseteq(0,\bar{t})$,对任意 $m\in\mathbf{N}$,定义集合

$$\Gamma_m=\{k\in I\backslash\{i\}:f_k(\theta(t_m))>f_k(\bar{x})\}。$$

显然对任意 $m\in\mathbf{N},\Gamma_m\neq\varnothing$。假设对任意 $m\in\mathbf{N},\Gamma_m$ 是恒定的。通过引理 2,可得在线段 $[\theta(t_m),\bar{x}]$ 中存在 u_{im},即存在 $\bar{\lambda}_i\in(0,1)$ 使得 $u_{im}=\bar{x}+\bar{\lambda}_i(\theta(t_m)-\bar{x})$,和存在 $\xi_i\in\partial^C f_i(u_{im})$,存在 $v_m\in(0,t_m)$ 使得

$$f_i(\theta(t_m))-f_i(\bar{x})=\langle\xi_i,\theta(t_m)-\bar{x}\rangle, \tag{7}$$

$$\theta(t_m)-\bar{x}=\theta(t_m)-\theta(0)=t_m\theta'(v_m),\ \forall m\in\mathbf{N}。 \tag{8}$$

由(7),(8)式可知 $f_i(\theta(t_m))-f_i(\bar{x})=t_m\langle\xi_i,\theta'(v_m)\rangle$,再联合引理 1 的结论 4),$\theta'(v_m)\in\mathbf{R}^n, t_m\in(0,\bar{t})$ 以及(4)式可得

$$f_i(\theta(t_m))-f_i(\bar{x})=t_m\langle\xi_i,\theta'(v_m)\rangle\leqslant t_m f_i^{\circ}(\bar{x};d^i)<0,$$

即 $f_i(\theta(t_m))-f_i(\bar{x})<0$。因此显然可以得到

$$-\langle \xi_i, \theta'(v_m)\rangle > 0。\tag{9}$$

再由引理 2 可得，在线段$[\theta(t_m), \bar{x}]$中存在 u_{km}，即存在 $\bar{\lambda}_k \in (0,1)$使得 $u_{km} = \bar{x} + \bar{\lambda}_k(\theta(t_m) - \bar{x})$，和存在 $\xi_k \in \partial^C f_k(u_{km})$使得

$$f_k(\theta(t_m)) - f_k(\bar{x}) = \langle \xi_k, \theta(t_m) - \bar{x}\rangle > 0, \forall k \in \Gamma_m。\tag{10}$$

因此由引理 1 的结论 4)及(7)，(8)和(10)式可得

$$f_i^\circ(u_{im}; \theta'(v_m)) \geqslant \langle \xi_i, \theta'(v_m)\rangle = \langle \xi_i, (\theta(t_m) - \bar{x})/t_m\rangle,\tag{11}$$

$$f_k^\circ(u_{km}; \theta'(v_m)) \geqslant \langle \xi_k, \theta'(v_m)\rangle = \langle \xi_k, (\theta(t_m) - \bar{x})/t_m\rangle > 0。\tag{12}$$

又因为 $u_{im} \to \bar{x}(m \to \infty)$，$u_{km} \to \bar{x}(m \to \infty)$，$t_m \to 0(m \to \infty)$，$v_m \to 0(m \to \infty)$，则由 $\alpha > 0$，引理 1 的结论 1)和 2)及(4)，(5)和(12)式可得

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} f_i^\circ(u_{im}; \theta'(v_m)) \leqslant f_i^\circ(\bar{x}; \theta'(0)) = f_i^\circ(\bar{x}; \alpha d^i) = \alpha f_i^\circ(\bar{x}; d^i) < 0,\tag{13}$$

$$0 \leqslant \overline{\lim_{m \to \infty}} f_k^\circ(u_{km}; \theta'(v_m)) \leqslant f_k^\circ(\bar{x}; \theta'(0)) = f_k^\circ(\bar{x}; \alpha d^i) = \alpha f_k^\circ(\bar{x}; d^i) \leqslant 0,$$

即

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} f_k^\circ(u_{km}; \theta'(v_m)) = \alpha f_k^\circ(\bar{x}; d^i) = 0。\tag{14}$$

另一方面，由(7)～(12)式，可得对任意 $k \in \Gamma_m$，有

$$\frac{f_i(\bar{x}) - f_i(\theta(t_m))}{f_k(\theta(t_m)) - f_k(\bar{x})} = \frac{-[f_i(\theta(t_m)) - f_i(\bar{x})]}{f_k(\theta(t_m)) - f_k(\bar{x})} = \frac{-\langle \xi_i, \theta(t_m) - \bar{x}\rangle}{\langle \xi_k, \theta(t_m) - \bar{x}\rangle} =$$

$$\frac{-\langle \xi_i, t_m\theta'(v_m)\rangle}{\langle \xi_k, t_m\theta'(v_m)\rangle} = \frac{-\langle \xi_i, \theta'(v_m)\rangle}{\langle \xi_k, \theta'(v_m)\rangle} \geqslant \frac{-\langle \xi_i, \theta'(v_m)\rangle}{f_k^\circ(u_{km}; \theta'(v_m))} \geqslant \frac{-f_i^\circ(u_{im}; \theta'(v_m))}{f_k^\circ(u_{km}; \theta'(v_m))}。\tag{15}$$

因此由(13)～(15)式可得

$$\lim_{m \to \infty} \frac{f_i(\bar{x}) - f_i(\theta(t_m))}{f_k(\theta(t_m)) - f_k(\bar{x})} \geqslant \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{-f_i^\circ(u_{im}; \theta'(v_m))}{f_k^\circ(u_{km}; \theta'(v_m))} = \frac{\overline{\lim\limits_{m \to \infty}}[-f_i^\circ(u_{im}; \theta'(v_m))]}{\overline{\lim\limits_{m \to \infty}} f_k^\circ(u_{km}; \theta'(v_m))} = +\infty,$$

这是与$\bar{x} \in D$ 是问题(VP)的 Geoffrion 真有效解矛盾，故假设不成立，因此$\bar{x}$是问题(VP)的广义 Kuhn-Tucker 真有效解。

证毕

注 1　若问题(VP)中的实值函数 $f_i: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, i \in I$ 和 $g_j: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j \in J$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上均为可微函数，则定理 1 可退化为文献[1]中定理 2.51。

定理 2　设$\bar{x} \in D$ 是问题(VP)的可行解，并且假设 $g_j(x)$，$(j \in J)$均是凹函数。如果$\bar{x} \in D$ 是问题(VP)的 Geoffrion 真有效解，则$\bar{x}$是问题(VP)的广义 Kuhn-Tucker 真有效解。

证明　类似定理 1 的证明，假设对任意固定的 $i \in I$ 和存在 $d^i \in \mathbf{R}^n$ 使得(4)～(6)式成立。对任意收敛于 0 的正的序列$\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$，设 $x_m^i = \bar{x} + t_m d^i$，显然 $x_m^i \to \bar{x}(m \to \infty)$。

因为 $g_j(x)$，$(j \in J)$均是凹函数，联合引理 1 的结论 1)和(6)式，可得

$$g_j(x_m^i) = g_j(\bar{x} + t_m d^i) \leqslant g_j(\bar{x}) + g_j^\circ(\bar{x}; t_m d^i) = g_j(\bar{x}) + t_m g_j^\circ(\bar{x}; d^i) \leqslant 0。$$

因此 $x_m^i \in D$。在定理 1 的证明过程中，设 $\alpha = 1$，$\bar{t}$充分大和 $\theta(t) = \bar{x} + td^i$，即 $\theta(t_m) = x_m^i$，因此

$$\lim_{m \to \infty} \frac{f_i(\bar{x}) - f_i(x_m^i)}{f_k(x_m^i) - f_k(\bar{x})} \geqslant \frac{\overline{\lim\limits_{m \to \infty}}[-f_i^\circ(u_{im}; d^i)]}{\overline{\lim\limits_{m \to \infty}} f_k^\circ(u_{km}; d^i)} = +\infty,$$

这是与$\bar{x} \in D$ 是问题(VP)的 Geoffrion 真有效解矛盾，故假设不成立，因此$\bar{x}$是问题(VP)的广义 Kuhn-Tucker 真有效解。

证毕

注 2　若问题(VP)中的实值函数 $f_i: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, i \in I$ 和 $g_j: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, j \in J$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上均为可微函数，则定理 2 可退化为文献[1]中定理 2.52。

参考文献：

[1] Ehrgott M. Multicriteria optimization[M]. 2nd Edition. Berlin: Springer, 2005.

[2] Geoffrion A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. J Matb Anal Appl, 1968, 22: 618-630.

[3] Li X F. Constraint qualifications in nonsmooth multiobjective optimization[J]. J Optim Theory Appl, 2000, 106(2):

373-398.

[4] Giorgi G, Jiménez B, Novo V. On constraint qualifications in directionally differentiable multiobjective optimization problems[J]. RAIRO Oper Res, 2004, 38: 255-274.

[5] Golestani M, Nobakhtian S. Nonsmooth multiobjective programming and constraint qualifications[J]. Optimization, 2013, 62(6): 783-795.

[6] 彭再云,雷鸣,刘亚威,等. 一类可微凸多目标分式规划的最优性条件[J]. 重庆交通大学学报:自然科学版,2009,28(1):156-157.

Peng Z Y, Lei M, Liu Y W, et al. Optimal condition for a kind of multi-objective fractional programming with differential convexity functions[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University: Natural Science, 2009, 28(1): 156-157.

[7] Peng Z Y, Xu S, Long X J. Optimality conditions for weak ψ-sharp minima in vector optimization problems[J]. Positivity, 2013, 17(3): 475-482.

[8] Clarke F H. Optimization and nonsmooth analysis[M]. New York: Wiley, 1983.

[9] Avriel M, Diewert W E, Schaible S. Generalized concavity[M]. New York: Plenum Press, 1988.

Operations Research and Cybernetics

Sufficient Conditions of Generalized Kuhn-Tucker Proper Efficiency in Nonsmooth Vector Optimization

QU Xianping[1,2]

(1. Department of Chongqing Telecommunication Polytechnic College, Chongqing 402247;

2. College of Computer Science and Engineering, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: In this paper, we consider a nonsmooth vector optimization problem with inequality constraints. We introduce generalized Kuhn-Tucker constraint qualification in terms of Clarke derivative. Moreover, we prove Geoffrion proper efficient is generalized Kuhn-Tucker properly efficient under generalized Kuhn-Tucker constraint qualification holds or constraint functions are concave.

Key words: Nonsmooth vector optimizations; Generalized Kuhn-Tucker constraint qualification; Geoffrion proper efficient; Generalized Kuhn-Tucker properly efficient

(责任编辑 黄 颖)