运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20160308

一个可中断三台可拒绝平行机半在线排序问题*

荣建华[1], 彭 丽[1], 张玲玲[1], 侯丽英[2]

(1. 石家庄铁道大学 四方学院, 石家庄 051132; 2. 南京农业大学 理学院, 南京 210095)

摘要:研究了工件带有拒绝费用的 3 台平行机半在线算法。工件逐个到达,当工件到达时可以被接收加工,消耗一定的加工时间,也可以被拒绝,但此时要付出一定的拒绝费用。进一步假定工件的加工时间与拒绝费用事先成固定比例 $\alpha(\alpha\geqslant 0)$。目标为被接收工件的最大完工时间与被拒绝工件的总罚值之和最小。针对工件加工可中断情形,设计出半在线算法 ARH,并证明算法 ARH 的竞争比为关于参数 α 的分段函数,且为紧界。

关键词:同型机;拒绝费用;中断加工;在线排序;竞争比

中图分类号:O223 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2016)03-0015-05

在经典的排序文献中,工件不允许被拒绝,即任何工件都必须被安排到机器上进行加工。然而在实际的生产实践中,生产决策者并非总是如此。随着社会经济的迅速发展,市场竞争也越来越激烈,为了使企业在市场竞争中立于不败之地,良好的调度管理和有效的控制成本成为企业间竞争的重要因素。因此在现有的生产资源有限的前提下,为了使企业获得尽可能多的的利润,生产厂家有时不得不拒绝一些资源耗费较多但带来的利润却较少的工件。基于实际生产中上述问题比较常见,所以工件带拒绝费用的排序问题受到研究人员广泛关注。

下面主要研究了工件带拒绝费用的 3 台平行机半在线排序问题。基本模型描述如下:设有 3 台机器 M_1, M_2, M_3 和 n 个工件 $J_1, J_2, \cdots, J_n$,每台机器的加工速度相同,每个工件 J_j 带两个参数 (p_j, t_j),p_j 表示其拒绝费用,t_j 表示其加工时间。当工件 J_j 到达后,生产决策者需马上做出决定,工件可以被拒绝,但要付出一定的拒绝费用;也可以选择被加工,花费一定的加工时间。目标为被拒绝工件的总拒绝费用与被加工工件的最大完工时间(Makespan)之和最小。文中进一步假设每个工件的拒绝费用和加工时间成固定比例 $\alpha(\alpha\geqslant 0)$,且文中允许工件中断加工(Preemptive),即任何工件允许在加工过程中中断,在之后的某一时刻分配给另外的机器进行加工,以上排序模型用三参数法表示为$P3\,|\,prmt, rej, p_j=\alpha t_j\,|\,W$。

对于排序问题,人们致力于研究它的近似算法,通常用竞争比 ρ_A 来衡量算法 A 的优劣。设 $C^A(I)$为用算法 A 安排实例 I 所得的目标值,$C^{OPT}(I)$为离线排序下的最优值,则定义 $\rho_A=\inf\{l\,|\,C^A(I)\leqslant lC^{OPT}(I), \forall I\}$,一个排序问题具有下界 ρ_L 是指不存在一个算法 A,它的竞争比严格小于 ρ_L。如果某算法 A 的竞争比与它相应的下界相等,即 $\rho_A=\rho_L$,则称该算法为最优近似算法。

对于带拒绝费用的离线的平行机排序问题(简记成 MSR),最早开始在文献[1]中提出,并确定了一个完全多项式近似方案。对于带拒绝费用的在线的平行机排序问题 MSR,且加工不允许中断,Bartal[1] 等人对任意的机器数 m 设计出一个最佳算法 RTP(T),它的竞争比为 2.618;特别针对机器数为 2 时,进一步提出算法 RP(α),证明该算法的竞争比为 1.618,且该算法最优;同时对于机器数为 3,提出算法并证明竞争比为 2,下界为 1.839。文献[2]将该问题推广到 2 台同类机的情形(简记为 USR1),当机器数分别为 2 和 3 时,给出了在线算法 LSR,证明了该算法关于 s 的参数竞争比。当机器台数为 2 时,文献[3]在区间 $s\in\left(1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$进一步将算法作了修改,并在$\left[1.385, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$处达到最优。对于加工可中断的 MSR 情形,文献[4]对机器数 $m\geqslant 2$ 得到了一个算法,它的竞争

* **收稿日期**:2015-04-19 **修回日期**:2016-01-01 **网络出版时间**:2016-04-30 9:42

资助项目:国家自然科学基金数学天元基金(No. 11426133);河北省高等教育科学研究课题(No. GJXH2015-289);河北省高等教育教学改革研究与实践项目(No. 2015GJJG293);河北省高等教育科学研究课题(No. GJXH2015-291)

作者简介:荣建华,女,讲师,研究方向为组合最优化、排序理论,E-mail:rongjianhua2006@126.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160430.0942.008.html

比为$\frac{4+\sqrt{10}}{3}<2.38743$,当机器数充分大时,下界为 2.124 57。文献[5]研究了一类目标函数为极小化加权总完工时间的可拒绝排序,文中针对到达时间都相同的同型机排序问题,设计了伪多项式时间的动态规划算法,并给出了相应的 FPTAS 算法。文献[6]进一步将带拒绝的排序问题作了推广,考虑的是带有到达时间、拒绝费用、不可用区间的单机排序问题,文中给出一个近似算法,并证明该算法为 3-因子算法,最后得到一个全多项式时间近似方案,并证明该方案的时间复杂性 $o\left(\frac{n2}{\varepsilon}\right)$。文献[7-9]讨论了一类工件的拒绝费用和加工时间成固定比例 $\alpha(\alpha\geqslant 0)$的平行机排序问题,文献[7]针对机器数 $m=2$ 时,设计出在线算法 NPRL,证明算法的竞争比 ρ_{NPRL}和下界均为关于参数 α 的分段函数。且当 $\alpha\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup[1,+\infty)$时算法已达到最优。当机器数 $m=3$ 时,文献[8]设计出在线算法 PRL,证明算法的竞争比 ρ_{PRL}和下界均为关于参数 T 的分段函数,且在 T 的绝大多数区间上算法最优。对于可中断加工的且带拒绝费用的平行机半在线排序问题,文献[9]对于机器台数 $m=2$ 时,设计出半在线算法 PRH,同时给出问题的下界,且当 $\alpha\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{6},+\infty\right)$时算法达到最优。

带拒绝费用的平行机半在线排序问题,因为它的组合结构比较复杂,难度也比较大,所以目前研究的结果很少。本文是基于文献[9]的基础上,针对机器台数 $m=3$ 时,将算法进行适当改进,设计出半在线算法 ARH,证明了该算法竞争比 ρ_{ARH}为关于参数 α 的分段函数,且在 α 的各个区间上由算法所得的竞争比均严格小于 2。此结果进一步说明了半在线信息或条件可以设计出比在线情况性能比更好的算法。

1 ARH 算法的设计

问题$P3|prmt,rej,p_j=\alpha t_j|W$ 的描述已在引言中介绍,下面对文中涉及到的符号作统一规定:J 表示工件集;J_j 表示第 j 个工件;A 表示 ARH 算法中被加工的工件集;$\overline{A}$表示最优算法中被加工的工件集;R 表示 ARH 算法中被拒绝的工件集;$\overline{R}$表示最优算法中被拒绝的工件集;y 表示 ARH 算法中最后一个完工的工件,由它决定了被加工工件集的最大完工时间;$L(S),S\subseteq J$ 表示 S 中所有工件的加工总长度;$P(S),S\subseteq J$ 表示 S 中所有工件的总罚值;$C(T),T\subseteq J$ 表示 T 为被加工工件集时的最大完工时间;$C^{\mathrm{OPT}}(T),T\subseteq J$ 表示将 T 中所有工件接收加工产生的最优;$W^{A}=C(A)+P(R)$表示 ARH 算法的目标值;$W^{\mathrm{OPT}}=C(\overline{A})+P(\overline{R})$表示最优算法的目标值;$\rho_{\mathrm{ARH}}$表示 ARH 算法的竞争比。

算法的中心思想:如果 α 较大,即工件的拒绝费用相对于工件加工时间较大,则将工件接收;如果 α 较小,即每个工件的拒绝费用相对于工件加工时间较小,故将工件拒绝较好。由于在同型机排序中,对于加工可中断情形,文献[10]已给出最优算法,当机器台数 $m=3$ 时,竞争比为 1.42。对于加工可中断可拒绝的同型机排序,文献[9]设计出 PRH 算法,在算法中当参数 $\alpha\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{6},+\infty\right]$时达到最优。

为了便于设计算法和分析竞争比,建立下述准备知识。

1) 对于加工可中断的同型机排序问题,离线情形下的最优值为 $C^{\mathrm{OPT}}=\max\left\{\frac{\sum_{j=1}^{n}t_j}{m},\max\{t_j\}\right\}$[10]。

2) 对于 3 台可中断同型机半在线排序,当工件 J_j 达到时,令当前机器 M_1,M_2,M_3 的负荷分别为 L_1,L_2,L_3,分配完工件 J_j 后的机器负荷分别为 L_1',L_2',L_3',最优解值为 $C^{\mathrm{OPT'}}$($C^{\mathrm{OPT'}}$通过(1)式中所描述的计算可得)。

H 规则:1) 将工件 J_j 尽可能分给机器 M_3 加工,只要 $L_3'=L_3+t_{j_3}\leqslant\frac{3}{2}C^{\mathrm{OPT'}}$,其中 t_{j_3}为工件 J_j 被分给机器 M_3 部分的长度;2) 如果情形 1)中还无法完成工件 J_j 的加工,则将工件剩余部分按 LS 规则分给机器 M_1,M_2 加工,即将剩余部分安排到能使工件最早完工的机器 M_1 或 M_2 上加工。

注 1 H 算法确保在任何时刻,3 台机器的负荷满足 $L_1\leqslant L_3,L_2\leqslant L_3$,且 $L_3\leqslant\frac{3}{2}C^{\mathrm{OPT}}$。

注 2 算法确保每一步可行。

注 3 算法保证 $C(J)\leqslant\frac{3}{2}\max\left\{\frac{1}{3}L(J),\max(t_j)\right\}$。

算法 ARH　1）当 $\alpha\in[0,a_0)$ 时，拒绝所有工件；2）当 $\alpha\in[a_0,+\infty)$ 时，接受所有工件并按 H 规则分配加工。其中 a_0 是方程 $3\alpha=\frac{9}{6\alpha+1}$ 的正根，且 $a_0=\frac{-1+\sqrt{73}}{12}\approx0.628\,7$。

2 主要结果

引理 1　当 $\alpha\in\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$ 时，且在最优解中最少有一个工件（记为 x）被拒绝，则有 $W^{\mathrm{OPT}}\geqslant P(\{x\})+\frac{1}{3}L(J\backslash\{x\})$。

证明　因为当 $\alpha\in\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$ 时，对每个工件 J_j，总有 $p_j=\alpha t_j\geqslant\frac{1}{3}t_j$，所以有

$$W^{\mathrm{OPT}}=P(\overline{R})+C(\overline{A})=P(\{x\})+P(\overline{R}\backslash\{x\})+C(\overline{A})\geqslant P(\{x\})+\alpha L(\overline{R}\backslash\{x\})+\frac{1}{3}L(\overline{A})\geqslant$$

$$P(\{x\})+\frac{1}{3}\left[L(\overline{R}\backslash\{x\})+\frac{1}{3}L(\overline{A})\right]=P(\{x\})+\frac{1}{3}L(J\backslash\{x\})。$$

证毕

定理 1　ARH 算法的竞争比为 $\rho_{\mathrm{ARH}}=\begin{cases}1,\alpha\in\left[0,\frac{1}{3}\right),\\ 3\alpha,\alpha\in\left[\frac{1}{3},a_0\right),\\ \frac{9}{6\alpha+1},\alpha\in\left[a_0,\frac{5}{6}\right),\\ \frac{3}{2},\alpha\in\left[\frac{5}{6},+\infty\right)。\end{cases}$

证明　下面对参数 α 的不同取值范围分情况进行讨论。

情况 1，当 $\alpha\in[0,a_0)$ 时，根据算法所有工件均被拒绝，此时有：

$$W^{\mathrm{ARH}}=P(J)=P(\overline{A}\cup\overline{R})=P(\overline{A})+P(\overline{R})=\alpha L(\overline{A})+P(\overline{R})\leqslant3\alpha C(\overline{A})+P(\overline{R})\leqslant$$

$$\max\{3\alpha,1\}[C(\overline{A})+P(\overline{R})]=\max\{3\alpha,1\}W^{\mathrm{OPT}}\tag{1}$$

若 $\alpha\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$，则有 $W^{\mathrm{ARH}}\leqslant W^{\mathrm{OPT}}$，此时算法已为最优。

若 $\alpha\in\left[\frac{1}{3},a_0\right)$，则有 $W^{\mathrm{ARH}}\leqslant3\alpha W^{\mathrm{OPT}}$。

情况 2，当 $\alpha\in[a_0,1)$ 时，根据算法所有工件均被接收，并按 H 规则安排加工，则有 $W^{\mathrm{ARH}}=C(J)$，令 x 为工件集 J 中加工长度最大的工件，以下对 x 的长度范围分情况讨论。

子情况 2.1，当 $t_x\leqslant\frac{1}{3}L(J)$，根据注 3 得：

$$W^{\mathrm{ARH}}=C(J)\leqslant\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}L(J)=\frac{1}{2}L(J)=\frac{1}{2}L(\overline{A})+\frac{1}{2}L(\overline{R})=\frac{1}{2}L(\overline{A})+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\alpha}P(\overline{R})\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\times3C(\overline{A})+\frac{1}{2}\times3P(\overline{R})=\frac{3}{2}[C(\overline{A})+P(\overline{R})]=\frac{3}{2}W^{\mathrm{OPT}}。$$

子情况 2.2，若 $t_x>\frac{1}{3}L(J)$，则有 $W^{\mathrm{OPT}}(J)=t_x$，此时 $W^{\mathrm{ARH}}=C(J)\leqslant\frac{3}{2}t_x$。

若 x 在最优解中被接收加工，则有 $W^{\mathrm{OPT}}(J)\geqslant t_x$，易得 $W^{\mathrm{ARH}}\leqslant\frac{3}{2}t_x\leqslant\frac{3}{2}W^{\mathrm{OPT}}$。

下面假定 x 在最优解中被拒绝，进一步假设分配 x 时，机器 M_1,M_2,M_3 的负荷分别为 L_1',L_2',L_3'，由算法 H 可知，必有 $L_1'\leqslant L_3',L_2'\leqslant L_3'$，成立。于是有：

1）若 $L_3'+t_x>\frac{3}{2}t_x$，则根据 H 规则，x 被拆分成 x_1,x_3 两部分，其中 x_3 分给 M_3 加工，x_1 按 LS 算法分给 M_1,M_2 加工，此时有

$$W^{\mathrm{ARH}}=C(J)=L_3'+t_{x_3}=\frac{3}{2}t_x。\tag{2}$$

因为在 x 之后,所有工件将按 LS 算法分给 M_1,M_2 加工,可知 $L_3'=\frac{3}{2}t_x-t_{x_3}\geqslant\frac{3}{2}t_x-t_x=\frac{1}{2}t_x$ 且

$$L(J\backslash\{x\})\geqslant L_3'\geqslant\frac{1}{2}t_x \tag{3}$$

成立。

另外,再由引理 1 可知:

$$W^{\mathrm{OPT}}\geqslant P(\{x\})+\frac{1}{3}L(J\backslash\{x\})\geqslant\alpha t_x+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}t_x=\left(\alpha+\frac{1}{6}\right)t_x。 \tag{4}$$

综合(2),(4)式最终可得 $\frac{W^{\mathrm{ARH}}}{W^{\mathrm{OPT}}}\leqslant\frac{\frac{3}{2}t_x}{\left(\alpha+\frac{1}{6}\right)t_x}=\frac{9}{6\alpha+1}$。

2) 若 $L_3'+t_x\leqslant\frac{3}{2}t_x$,则 x 整体分给 M_3 加工,且 M_3 的负荷不会超过 $\frac{3}{2}t_x$,记 M_3 上除去 x 之外的剩余负荷为 $\bar{L}_3$,则有:

$$W^{\mathrm{ARH}}=C(J)=\bar{L}_3+t_{x_3}\leqslant\frac{3}{2}t_x \tag{5}$$

以及

$$\bar{L}_3\leqslant\frac{3}{2}t_x-t_x=\frac{1}{2}t_x。 \tag{6}$$

另外,再由引理 1 得到:

$$W^{\mathrm{OPT}}\geqslant P(\{x\})+\frac{1}{3}L(J\backslash\{x\})\geqslant\alpha t_x+\frac{1}{3}\bar{L}_3。 \tag{7}$$

最后综合(5)~(7)式得到 $\frac{W^{\mathrm{ARH}}}{W^{\mathrm{OPT}}}\leqslant\frac{\bar{L}_3+t_x}{\alpha t_x+\frac{1}{3}\bar{L}_3}\leqslant\frac{t_x+\frac{1}{2}t_x}{\alpha t_x+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}t_x}=\frac{9}{6\alpha+1}$。其中第 2 个不等式由于当 $\alpha\in\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$ 时,函数 $\frac{\bar{L}_3+t_x}{\alpha t_x+\frac{1}{3}\bar{L}_3}$ 为关于 $\bar{L}_3$ 的单调递减函数。

综合情况 2 中结论,最终有 $\frac{W^{\mathrm{ARH}}}{W^{\mathrm{OPT}}}\leqslant\max\left\{\frac{9}{6\alpha+1},\frac{3}{2}\right\}=\begin{cases}\frac{9}{6\alpha+1},\alpha\in\left[a_0,\frac{5}{6}\right),\\ \frac{3}{2},\alpha\in\left[\frac{5}{6},1\right)。\end{cases}$

情况 3,$\alpha\in[1,+\infty)$。此时每个工件均满足 $p_j\geqslant t_j$,显然最优算法必将所有工件均接收加工,情况相当于不可拒绝的情形,因此算法上界即为 $\frac{W^{\mathrm{ARH}}}{W^{\mathrm{OPT}}}\leqslant\frac{3}{2}$。 证毕

下面构造实例说明以上界是紧的。

1) 当 $\alpha\in\left[0,\frac{1}{3}\right)$ 时,算法已为最优。

2) 当 $\alpha\in\left[\frac{1}{3},a_0\right)$ 时,取工件 $J_1=(1,a)$,$J_2=(1,a)$,$J_3=(1,a)$,根据算法它们均被拒绝,$W^{\mathrm{ARH}}=3\alpha$,而在最优解中它们将全部被接收并分给不同的机器进行加工,于是 $\frac{W^{\mathrm{ARH}}}{W^{\mathrm{OPT}}}\leqslant\frac{3\alpha}{1}=3\alpha$。

3) 当 $\alpha\in\left[a_0,\frac{5}{6}\right)$ 时,取工件 $J_1=(1,a)$,$J_2=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}a\right)$,$J_3=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}a\right)$,$J_4=\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}a\right)$,算法将它们全部接收并都分配给机器 M_3 加工,$W^{\mathrm{ARH}}=\frac{3}{2}$,而在最优解中将拒绝 J_1,但接收 J_2,J_3,J_4 且分给不同的机器加工,$W^{\mathrm{OPT}}=\alpha+\frac{1}{6}$,于是得 $\frac{W^{\mathrm{ARH}}}{W^{\mathrm{OPT}}}=\frac{\frac{3}{2}}{\alpha+\frac{1}{6}}=\frac{9}{6\alpha+1}$。

4) 当 $\alpha\in\left[\frac{5}{6},+\infty\right)$ 时,取工件 $J_1=(1,a)$,$J_2=(1,a)$,$J_3=(1,a)$,$J_4=(1,a)$,$J_5=(1,a)$,$J_6=(1,a)$, $J_7=(3,3a)$,算法将它们全部接收并按 H 算法分配加工,得 $W^{\mathrm{ARH}}=\frac{9}{2}$,而在最优解中也将其全部接收,得 $W^{\mathrm{OPT}}=3$,于是得到 $\frac{W^{\mathrm{ARH}}}{W^{\mathrm{OPT}}}=\frac{3}{2}$。

3 结语

讨论了加工可中断的且带拒绝费用的平行机半在线排序问题,设计出半在线算法 ARH,并给出算法的竞争比。接下来将致力于将上述问题中的机器台数推广到任意台 m,构造相应的算法并分析算法的竞争比。

参考文献:

[1] Bartal Y, Leonardi S, Marchetti-Spaccamela A, et al. Multiprocessor scheduling with rejection[C]//Proceedings of the 7th Annual ACM-SIAM Symposium On Discrete Algorithms, 1996: 95-103.

[2] He Y, Min X. On-line uniform machine scheduling with rejection[J]. Computing, 2000, 65: 1-12.

[3] Dosa G, He Y. Preemption and non-preemption on-line algorithms for schuduling with rejection on two uniform machines[J]. Computing, 2006, 76: 149-162.

[4] Seiden S S. Preemptive multiprocessor scheduling with rejection[J]. Theoretical Computer Science, 2001, 262: 437-458.

[5] 张树霞,张峰. 极小化加权总完工时间的工件可拒绝排序[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2012,29(5):10-12.
Zhang S X, Zhang F. Scheduling with rejection to minimize the total weighted completion time[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2012, 29(5): 10-12.

[6] 刘澈,罗成新. 带到达时间、不可用区间、拒绝工件的单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报:自然科学版,2013,30(1):17-20.
Liu C, Luo C X. Single machine scheduling problem with release dates, rejection and an unavailable interval[J]. Journal of Chongqing Normal University: Natural Science, 2013, 30(1): 17-20.

[7] 闵啸. 一种特殊情形不可中断的两台可拒绝同型机在线排序问题[J]. 数学的实践与认识,2006,36(6):163-169.
MIN X. A special case of preemptive on-line scheduling on two identical machines with rejection[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2006, 36(6): 163-169.

[8] 闵啸. 一特殊情形的三台可拒绝同型机在线排序问题[J]. 嘉兴学院学报,2006,18(3):44-47.
Min X. A special case of nonpreemptive on-line scheduling on three identical machine with rejection[J]. Journal of Jiaxing University, 2006, 18(3): 44-47.

[9] 闵啸,张玉才. 一个可中断两台可拒绝同型机半在线排序问题[J]. 浙江大学学报:理学版,2007,14(5):509-514.
Min X, Zhang Y C. Preemptive semi on-line scheduling on two identical machines with rejection[J]. Journal of Zhejiang University: Science Edition, 2007, 14(5): 509-514.

[10] Chen B, Vliet A V, Woeginger G J. An optimal algorithm for preemptive on line scheduling[J]. Operations Research Letters, 1995, 18: 127-131.

Operations Research and Cybernetics

Preemptive Semi On-line Scheduling on Three Identical Machines with Rejection

RONG Jianhua[1], PENG Li[1], ZHANG Lingling[1], HOU Liying[2]

(1. Sifang College, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 051132;

2. College of Sciences, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China)

Abstract: Investigates the semi on-line scheduling problem on three identical machines with rejection. The job comes one by one, and when a job arrives, it can be accepted and scheduled on some machine or rejected by paying its penalty. And it is further assumed that the processing time of each job and its penalty forms the regular proportion denoted by $\alpha(\alpha\geqslant 0)$ in advance. The objective is to minimize the sum of the makespan produced by the accepted jobs and the total penalty of the jobs which have been rejected. Preemption is allowed. For this version, we present an semi on-line algorithm ARH and prove the competitive ratio.

Key words: identical machine; rejection; preemptive; on-line scheduling; competitive ratio

(责任编辑 黄 颖)