DOI:10.11721/cqnuj20160304

推广的曲率熵不等式*

马 磊[1], 曾春娜[2]
(1.广东石油化工学院 高州师范学院,广东 茂名 525200;2.重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:曲率积分不等式不仅对刻画曲率流的演化过程起关键性作用,而且对人们理解晶体生长、燃烧过程也起着重要的作用。利用凸函数的性质与仿射等周不等式,推广了 $\mathbf{R}^2$ 中的曲率熵不等式,得到了 $\mathbf{R}^n$ 中类似的关于 Gauss 曲率的不等式,并证明了等号成立的情形。事实上,当 $n=2$ 时,给出了已有的曲率熵不等式的一个简化证明。

关键词:凸体;曲率熵不等式;Gauss 曲率;仿射等周不等式

中图分类号:O186.5 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2016)03-0071-03

在 20 世纪末,Green-Osher 在推广 Gage 关于等周不等式[1]方面的工作时得到了一系列的关于曲率积分的不等式[2]。这些不等式对于刻画曲率流的演化过程起着关键性作用[3-4]。目前关于 Green-Osher 的工作推广、加强及最新进展可参见文献[5-9]。作为 Green-Osher 在文献[2]中得到的重要结论之一,曲率熵不等式表述如下。

设 K 为 $\mathbf{R}^2$ 中边界光滑的紧致闭凸集,则 K 的面积 A,边界曲线 ∂K 的相对曲率 κ,满足不等式

$$\int_{\partial K}\kappa\log(\kappa)\mathrm{d}s+\pi\log\left(\frac{A}{\pi}\right)\geqslant 0。\tag{1}$$

虽然 Green-Osher 在文献[2]中称不等式(1)也为等周不等式,但遗憾的是其并没有讨论该不等式等号成立的情形。在文献[8]中作者中利用分析的方法给出了(1)式一种新的证明方法,并得到了等号仅对圆成立。

本文主要研究 $\mathbf{R}^n$ 中具有正曲率且边界 C^2 光滑的凸体的情形,利用凸函数的性质与仿射等周不等式,得到了 $\mathbf{R}^n(n\geqslant 2)$ 中关于 Gauss 曲率类似(1)式的不等式。特殊地,当 $n=2$ 时,即为 Green-Osher 所得到的(1)式。此类不等式对于人们理解晶体生长、燃烧过程以及曲线的演过程起着重要作用[3-4,10]。

1 预备知识

设 $\mathcal{K}^n$ 为欧式空间 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致凸集族,B_n 为 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球。$\mathcal{K}^n$ 中所有包含非空内点的凸集叫做凸体,记为 $\mathcal{K}_0^n$。凸体 $M\subseteq\mathbf{R}^n$ 的体积记作 $V(M)$。单位球 B_n 的体积记为 ω_n。设 $K\in\mathcal{K}^n$,K 的支持函数 $h(K,\cdot):\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 定义为[11]:$h(K,x)=\max\{x\cdot y:y\in K\}$。$K$ 的曲率函数 $F(K,u)$ 为定义在 S^{n-1} 上 Hessian 矩阵 $\nabla^2 h(K,u)$ 的 $n-1$ 阶主子式的和。当 K 的边界 ∂K 具有正曲率且 C^2 光滑时,$\mathbf{S}^{n-1}$ 上的 Lebesgue 测度 S_K 的 Radon-Nykodim 导数为曲率函数且等于 ∂K 的 Gauss 曲率 $G(K,\cdot)$ 的倒数[11]:

$$\frac{\mathrm{d}S_K}{\mathrm{d}u}=F(K,u)=\frac{1}{G(K,\nu^{-1}(u))},\tag{2}$$

其中 S_K 为 K 的表面积测度,ν^{-1} 为 Gauss 映射 $\nu:\partial K\to S^{n-1}$ 的逆映射。特殊地,当 K 为平面 $\mathbf{R}^2$ 中边界光滑凸体时 Gauss 曲率即为 K 的边界曲线的曲率 κ。

* **收稿日期:**2015-12-16 **修回日期:**2015-12-27 **网络出版时间:**2016-04-30 9:42

资助项目:国家自然科学基金天元基金(No. 11326073);重庆市教委科学技术研究项目(No. KJ1500312);重庆市基础与前沿研究项目(No. cstc2014jcyjA00019);重庆师范大学国家基金预研项目(No. 14XYY028);广东石油化工学院高州师范学院教育科学十二五规划项目(No. 2015GSKT01)

作者简介:马磊,男,讲师,研究方向为积分几何与凸几何分析,E-mail: maleiyou@163.com;**通信作者:**曾春娜,副教授,E-mail: zengchn@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160430.0942.016.html

当凸体 K 的边界$\partial K C^2$ 光滑时,凸体经典的仿射表面积的定义为[11]

$$\Omega(K)=\int_{S^{n-1}} F(K,u)^{\frac{n}{n+1}}\mathrm{d}u。\tag{3}$$

2 主要结论及其证明

下面的引理为著名的仿射等周不等式[11],对证明本文的结论起着重要的作用。

引理 1 设 $K\in K_0^n$,且边界 C^2 光滑具有正的 Gauss 曲率,则

$$\Omega(K)^{n+1}\leqslant n^{n+1}\omega_n^2 V(K)^{n-1},\tag{4}$$

等号成立当且仅当 K 为椭球。

定理 1 设 K 为 $\mathbf{R}^n$ 中边界 C^2 光滑的凸体($K\in K_0^n$),则 K 的体积 $V(K)$,K 的边界曲面的 Gauss 曲率 $G(K,x)$,满足不等式

$$\int_{\partial K} G(K,x)\log G(K,x)\mathrm{d}S_K+\omega_n\log\left(\frac{V(K)}{\omega_n}\right)^{n-1}\geqslant 0,\tag{5}$$

等号成立当且仅当 K 为球。

证明 由(2)式可得

$$\int_{\partial K} G(K,x)\log G(K,x)\mathrm{d}S_K=\int_{S^{n-1}}\log\frac{1}{F(K,u)}\mathrm{d}u=-\frac{n+1}{n}\int_{S^{n-1}}\log F(K,u)^{\frac{n}{n+1}}\mathrm{d}u。$$

令 $f(t)=-\log t$,由于 $f(t)$为凸函数。因此,根据 Jensen 不等式与(3)式可知

$$-\frac{n+1}{n}\int_{S^{n-1}}\log F(K,u)^{\frac{n}{n+1}}\mathrm{d}u\geqslant-\frac{n+1}{n}(n\omega_n)\log\left(\frac{\int_{S^{n-1}}F(K,u)^{\frac{n}{n+1}}\mathrm{d}u}{n\omega_n}\right)=-\omega_n\log\left(\frac{\Omega(K)}{n\omega_n}\right)^{n+1}。\tag{6}$$

又因 $f(t)$在$(0,+\infty)$上为减函数,由引理 1 中仿射等周不等式(4)可知(5)式成立。

下面讨论等号成立的情形。由于 $f(t)$严格单调递减,(6)式等号成立当且仅当 $F(K,u)$为常数,即(6)式等号成立当且仅当 K 为球(当 $F(K,u)$)为常数时 K 为球[12]。由前面的证明过程可知当且仅当(4)式与(6)式同时取等号时(5)式才能取得等号。根据(4)式等号成立的条件可知,(5)式等号成立当且仅当 K 为球(这里因为球可以看作特殊的椭球,即焦点重合的椭球)。

综上可知定理得证。 证毕

特殊地,当 $n=2$ 时,(5)式即为 Green-Osher 所得到的结果不等式(1)。

参考文献:

[1] Gage M. An isoperimetric inequality with applications to curve shortening[J]. Duke Mathematical Journal,1983,50:1225-1229.

[2] Green M,Osher S. Steiner polynomials,wulff flows,and some new isoperimetric inequalities for conver plane curves [J]. Asian Journal of Mathematics,1999,3(3):659-676.

[3] Pan S L,Yang J N. On a non-local perimeter-preserving curve evolution problem for convex plane curves[J]. Manuscripta Mathematica,2008,127(4):469-484.

[4] Lin Y C,Tsai D H. Application of Andrews and Green-Osher inequalities to nonlocal flow of convex plane curves[J]. Journal of Evolution Equations,2012,12(4):833-854.

[5] 潘生亮,唐学远,汪小玉. Gage 等周不等式的加强形式[J]. 数学年刊:A 辑,2008,29(3):301-306.

Pan S L,Tang X Y,Wang X Y. A strengthened form of Gage's isoperimetric inequality[J]. Chinese Annals of Mathematics,Series A,2008,29(3):301-306.

[6] 周家足,任德麟. 从积分几何观点看几何不等式[J]. 数学物理学报,2010,30(5):1322-1339.

Zhou J Z,Ren D L. Geometric inequalities-from integral geometry point of view[J]. Acta Mathematic Scientia,2010,30(5):1322-1339.

[7] 马磊,曾春娜. 关于曲率积分不等式的注记[J]. 数学杂志,2014,34(5):925-930.

Ma L,Zeng C N. Some notes on curvature integral inequalities[J]. Journal of Mathematics,2014,34(5):925-930.

[8] 马磊,曾春娜. 曲率熵不等式的一种新证明[J]. 西南大学学报:自然科学版,2015,37(4):27-29.

Ma L,Zeng C N. A new proof of the entropy inequality for curvature[J]. Journal of Southwest University:Natural Science Edition,2015,37(4):27-29.

[9] Gao L,Pan S,Yang Y. Some notes on Green-Osher's inequality[J]. Journal of Mathematical Inequalities,2015,9(2):369-380.

[10] Osher S,Merriman B. The Wulff shape as the asymptotic limit of a growing crystalline interface[J]. Asian Journal of Mathematics,1997,1:560-571.

[11] Schneider R. Convex bodies:The Brunn-Minkowski theory[M]. Cambridge:Cambridge University Press,2014.

[12] Osserman R. Curvature in the eighties[J]. American Mathematical Monthly,1990,97(8):731-735.

The Generalized Entropy Inequality for Curvature

MA Lei[1], ZENG Chunna[2]

(1. Gaozhou Normal College, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong 525200;

2. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The inequality for curvature integral not only plays a key role in the evolution of the curvature flow, but also plays an important role in the understanding of the crystal growth and the combustion process. So it is significant to study the inequality for curvature integral. In this paper, we generalize the entropy inequality for curvature in $\mathbf{R}^2$. By convexity of function and affine isoperimetric inequality, we obtain inequalities in $\mathbf{R}^n$ similar to the entropy inequality for Gauss curvature. In fact, when $n=2$, a simplified proof of the entropy inequality for curvature is obtained in [2].

Key words: convex body; entropy inequality for curvature; Gauss curvature; affine isoperimetric inequality

(责任编辑 黄 颖)