DOI:10.11721/cqnuj20160309

一类 H-V 功能性反应的捕食系统的持续性与稳定性分析*

胡春健[1]，王　莉[2]
(1.重庆财经职业学院 基础教学部，重庆 402160；2.重庆大学城第三中学校，重庆 401331)

摘要:分析了 Hassell-Varley 功能性反应的捕食系统的动力学行为。首先建立了一个新的具有 H-V 型功能性反应捕食系统的数学模型。然后给出持续生存的定义和两个基本引理，通过运用比较原理和分析技巧，获得了该捕食者-食饵系统的持续生存的充分条件。利用线性化方法和矩阵性质，得到系统在正平衡点局部渐近稳定。最后利用线性化方法，获得具常系数 H-V 功能性反应的捕食系统的局部稳定的充分条件。所得结果是新的，扩展了相关文献的一些结论。

关键词:Hassell-Varley 型功能性反应；捕食者-食饵系统；持续性；稳定性
中图分类号:O175　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)03-0074-05

捕食者-食饵相互作用关系是生物种群之间相互利用的基本关系之一，功能性反应在捕食者-食饵系统的研究中具有重要作用。由于功能性反应在捕食者-食饵系统研究中的重要作用，因此出现了大量的相关研究模型，包括研究最普遍的 Holling 模型、标准的 Lotka-Volterra 模型、Arditi & Ginzburg 研究的独立比例模型和 Hassell-Varley 模型，其中 H-V 模型是 Hassell 和 Varley 在 1969 年首次发现充裕的捕食者数量对捕食量有反作用的实验证据并提出的模型，该模型更形象地表述了生物系统相互作用的关系[1]。本文考虑具有一般的非线性饱和率的 H-V 型功能性反应的捕食者-食饵系统：

$$\begin{cases} x'=x(r(t)-b(t)x)-\dfrac{\alpha(t)x^2y}{\gamma(t)x^2+y^{2\delta}}, \\ y'=-y(k(t)-c(t)y)+\dfrac{\beta(t)x^2y}{\gamma(t)x^2+y^{2\delta}}。 \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(0)>0$，$y(0)>0$，$\delta\in(0,1)$；$x(t)$，$y(t)$分别表示食饵种群和捕食者种群在 t 时刻的密度；$r(t)$，$k(t)$，$\alpha(t)$，$\beta(t)$，$\gamma(t)$分别表示食饵内禀增长率、捕获率、半饱和常数、捕食者的死亡率和食饵生物量转化为捕食者生物量的转化率；δ 称为 Hassell-Varley 系数。该模型能够反映形成群体的捕食者之间的相互关系，对于某些构成群体的陆地捕食者，可设 $\delta=1/2$，而对某些构成群体的水生捕食者，设 $\delta=1/3$ 更合适些。若 $\delta=1$，即捕食者没有形成群体，则该模型就变为比率型捕食者-食饵系统。

近年来，H-V 反应的捕食系统已被很多学者进行了广泛而深入的研究[2-12]。刘秀湘等人[7]研究了具有 Hassell-Varley 型功能性反应的捕食者-食饵系统并建立了非自治差分方程模型，运用拓扑度的同伦不变性，得到了这类系统正周期解存在的充要条件。郭翠晶等人[8]利用重合度理论中的延拓定理，讨论了一类具有 Hassell-Varley 型功能性反应的捕食者-食饵系统正周期解的存在性，得到了保证正周期解存在性的充分判据。温绍雄等人[9]利用重合度理论中的延拓定理，讨论了一类时标动力学方程所刻画的具有 Hassell-Varley 型功能性反应的捕食者-食饵系统周期解的存在性。钟敏玲等人[10]研究了具 Hassell-Varley-Holling 功能性反应的非自治系统研究了种群的持续生存和绝灭性。但对于更一般的非线性饱和率 H-V 系统的持续性和稳定性仍然需要进一步讨论。

下面首先给出了一个新的具有 H-V 型功能性反应捕食系统的模型，运用比较定理，证明了具有 H-V 型功能性反应的捕食者-食饵系统的持续生存性；利用线性化方法和矩阵性质，得到系统在正平衡点局部渐近稳定。

1 具有 H-V 功能性反应的捕食系统的持续生存性

系统的持续生存对研究生物种群起着至关重要的作用，一个系统是否持续生存也是系统是否稳定的前提条

* 收稿日期:2015-11-09　　修回日期:2016-01-05　　网络出版时间:2016-04-30　9:42
作者简介:胡春健，女，副教授，研究方向为线性代数、高等数学，E-mail:153775376@qq.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160430.0942.006.html

件。因此先给出一般形式下的 H-V 型功能性反应的捕食者-食饵系统的持续生存的定义及结论。

对于 H-V 系统(1)，给出以下的持续生存性定义。

定义 1　如果存在正常数 m，$M(m<M)$，使得对于系统(1)的任意的正初始值的解$(x(t),y(t))$都有

$$\min\{\liminf_{t\to\infty} x(t),\liminf_{t\to\infty} y(t)\}\geqslant m,\max\{\limsup_{t\to\infty} x(t),\limsup_{t\to\infty} y(t)\}\leqslant M,$$

那么称系统(1)是持续生存的(考虑到生态的意义，这里只考虑初值 $x(0)>0$，$y(0)>0$ 的解$(x(t),y(t))$)。

这里考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=w\varphi(w),\tag{2}$$

其中 $\varphi\in C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$，$\varphi(0)>0$，当 $w>0$ 时有 $\varphi'(w)<0$ 并且有 $M>0$ 使 $\varphi(M)<0$。

引理 1[13]　纯量方程(2)有唯一的正平衡点 w^* 且在 $\mathbf{R}_+$ 上是全局渐近稳定的。

这里考虑函数：

$$f(z)=\frac{z}{(\theta+z^{2\delta})},\tag{3}$$

这里 $z\in[0,+\infty)$，$\theta>0$，$\delta\in(0,1)$，那么 $f'(z)=\dfrac{\theta+(1-2\delta)z^{2\delta}}{(\theta+z^{2\delta})^2}$。

引理 2[14]　对(3)式给出的函数 $f(z)$，有如下性质：1) 如果 $\delta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，那么当 $z\in[0,\infty)$ 有 $f'(z)>0$；2) 如果 $\delta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，那么当 $z\in[0,z_*]$时 $f'(z)\geqslant0$，而当 $z\in[z_*,\infty)$时 $f'(z)<0$，$z_*=\left(\dfrac{\theta}{2\delta-1}\right)^{\frac{1}{2\delta}}$，进一步有 $f(z)\leqslant f(z_*)=\dfrac{1}{2\delta}\left(\dfrac{2\delta-1}{\theta}\right)^{\frac{2\delta-1}{2\delta}}$。

下面讨论 H-V 系统是持续生存的。

定理 1　若 $\beta_m-k_M\gamma_M>0$ 且 $c_M<\dfrac{2\delta k_m}{2\delta+1+\gamma_m}$，其中定义

$$\beta_m=\min\beta(t),k_M=\max k(t),\ k_m=\min k(t),\gamma_M=\max\gamma(t),\gamma_m=\min\gamma(t),c_M=\max c(t),$$

则系统(1)是持续生存的。

证明　根据系统(1)知道 $x'(t)\leqslant x(r_M-b_m x)$，则有，

$$\limsup_{t\to\infty} x(t)\leqslant\frac{r_M}{b_m}=M_1,\tag{4}$$

所以对于任意的 $\varepsilon>0$，有 $T_1>0$ 使得 $t>T_1$ 的时候 $x(t)\leqslant M_1+\varepsilon$，则：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant-(k_m-c_My)y+\frac{\beta_M(M_1+\varepsilon)^2y}{\gamma_m(M_1+\varepsilon)^2+y^{2\delta}}=y\left[-(k_m-c_My)+\frac{\beta_M(M_1+\varepsilon)^2}{\gamma_m(M_1+\varepsilon)^2+y^{2\delta}}\right],t>T_1,$$

令 $\varphi_1(y)=-(k_m-c_My)+\dfrac{\beta_M(M_1+\varepsilon)^2}{\gamma_m(M_1+\varepsilon)^2+y^{2\delta}}$，根据条件 $\beta_m-(k_M-c_m)\gamma_M>0$ 得

$$\beta_M(M_1+\varepsilon)^2>(k_m-c_M)\gamma_m(M_1+\varepsilon)^2,$$

知 $\varphi_1(0)>0$，$\varphi'_1(y)<0$，则 $\varphi_1(y)=0$ 有唯一的正根，记为 y^*，根据引理 2 的结论 1)可以得到$\limsup\limits_{t\to\infty} y(t)\leqslant y^*$。再根据 ε 的任意性，有：

$$\limsup_{t\to\infty} y(t)\leqslant y^*=M_2,\tag{5}$$

因此存在 $T_2>0$ 有 $t>T_2$ 的时候 $y(t)\leqslant M_2+\varepsilon$。

下面讨论对系统(1)任意的有正初始值的解$(x(t),y(t))$有 $\min\{\liminf\limits_{t\to\infty} x(t),\liminf\limits_{t\to\infty} y(t)\}>m$。

1) 当 $1-2\delta\geqslant0$ 时，根据引理 2 的结论 2)，当 $t>T_2$ 有：

$$x'\geqslant x(r_m-b_Mx)-\frac{\alpha_Mx^2y}{\gamma_mx^2+y^{2\delta}}\geqslant x(r_m-b_Mx)-\frac{\alpha_Mx^2(M_2+\varepsilon)}{\gamma_mx^2+(M_2+\varepsilon)^{2\delta}}\geqslant$$
$$x\{r_m-[b_M+\alpha_M(M_2+\varepsilon)^{1-2\delta}]x\}。$$

根据引理 1 以及 ε 的任意性可以得到

$$\liminf_{t\to\infty} x(t)\geqslant\frac{r_m}{b_M+\alpha_MM_2^{1-2\delta}}。\tag{6}$$

2) 当 $1-2\delta<0$ 时,根据引理2的结论2)可得

$$x'\geqslant x(r_m-b_Mx)-\frac{\alpha_Mx^2y}{\gamma_mx^2+y^{2\delta}}=x(r_m-b_Mx)-\frac{\alpha_Mx^2}{\gamma_m\left(\frac{x^2}{y}\right)+y^{2\delta-1}}\geqslant$$

$$x(r_m-b_Mx)-\frac{\alpha_Mx^2}{2\delta}\left(\frac{2\delta-1}{\gamma_mx^2}\right)^{\frac{2\delta-1}{2\delta}}=x\left[r_m-b_Mx-\frac{\alpha_M}{2\delta}\left(\frac{2\delta-1}{\gamma_m}\right)^{\frac{2\delta-1}{2\delta}}x^{\frac{1}{\delta}}\right]。$$

令 $\psi_1(x)=r_m-b_Mx-\frac{\alpha_M}{2\delta}\left(\frac{2\delta-1}{\gamma_m}\right)^{\frac{2\delta-1}{2\delta}}x^{\frac{1}{\delta}}$,则 $\psi_1(0)>0$。根据引理2的结论1),有 $\liminf\limits_{t\to\infty}x(t)\geqslant x^*$,这里 x^* 是方程 $\varphi_1(x)=0$ 的唯一正根。

记 $m_1=\min\left\{x^*,\frac{a_m}{b_M+\alpha_MM_2^{1-2\delta}}\right\}$,那么 $\liminf\limits_{t\to\infty}x(t)\geqslant m_1$。因此有 $T_3>0$ 使得 $t>T_3$ 的时候有 $x(t)\geqslant m_1-\varepsilon$,并且

$$y'\geqslant y\left[-(k_M-c_my)+\frac{\beta_mx^2}{\gamma_Mx^2+y^{2\delta}}\right]=y\left[-(k_M-c_my)+\frac{\beta_m}{\gamma_M+\frac{y^{2\delta}}{x^2}}\right]\geqslant$$

$$y\left[-(k_M-c_my)+\frac{\beta_m}{\gamma_M+\frac{y^{2\delta}}{(m_1-\varepsilon)^2}}\right],$$

令 $\varphi_2(y)=-(k_M-c_my)+\frac{\beta_m}{\gamma_M+\frac{y^{2\delta}}{(m_1-\varepsilon)^2}}$。

根据定理1的条件有 $\varphi_2(0)>0,\varphi_2'(y)<0$ 知 $\varphi_2(y)=0$ 有唯一的正跟 y^{**},由引理1和 ε 的任意性可得到:

$$\liminf_{t\to\infty}y(t)\leqslant y^{**}=m_2。\tag{7}$$

由(4)~(7)式知系统(1)满足定义1,因此系统是持续生存的。 证毕

2 具有H-V功能性反应的捕食系统的稳定性

为了方便讨论,本节研究当 $\delta=\frac{1}{2}$,$c(t)=0$ 且各参数为常系数时,Hassell-Varley型功能性反应的捕食者-食饵系统的稳定性,模型如下:

$$\begin{cases}x'=x\left[(r-bx)-\frac{\alpha xy}{\gamma x^2+y}\right],\\ y'=y\left[-k+\frac{\beta x^2}{\gamma x^2+y}\right]。\end{cases}\tag{8}$$

其中 $x(0)>0,y(0)>0$;$x(t),y(t)$ 分别表示食饵种群和捕食者种群在 t 时刻的密度;r,k,α,β,γ 分别表示食饵内禀增长率、捕获率、半饱和常数、捕食者的死亡率和食饵生物量转化为捕食者生物量的转化率。

2.1 正平衡点的存在性

基于系统的生存意义,系统的正平衡点的存在性对于系统的研究具有十分重要的作用,现在考虑系统(8)的正平衡点的存在性,由

$$\begin{cases}x\left[(r-bx)-\frac{\alpha xy}{\gamma x^2+y}\right]=0,\\ y\left[-k+\frac{\beta x^2}{\gamma x^2+y}\right]=0。\end{cases}\tag{9}$$

解得

$$\begin{cases}x=\frac{\beta r}{\alpha(\beta-k\gamma)+\beta b},\\ y=\frac{\beta^2r^2(\beta-k\gamma)}{k[\alpha(\beta-k\gamma)+\beta b]^2}。\end{cases}\tag{10}$$

当 $\beta_m - k_M\gamma_M > 0$ 时,正平衡点(x^*, y^*)存在:

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{\beta r}{\alpha(\beta - k\gamma) + \beta b}, \frac{\beta^2 r^2 (\beta - k\gamma)}{k[\alpha(\beta - k\gamma) + \beta b]^2}\right), \tag{11}$$

且系统(9)有唯一的正平衡点(x^*, y^*)。

2.2 正平衡点的局部渐近稳定

定理 2　当 $\alpha_M(\beta_M - k_M\gamma_M) < b_m\beta_m$ 时,系统(8)在平衡点处(x^*, y^*)具有局部渐近稳定。

证明　系统(8)在平衡点(x^*, y^*)的雅可比矩阵为:

$$\boldsymbol{J}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - 2bx^* - \dfrac{2\alpha x^*(y^*)^2}{\gamma(x^*)^2 + (y^*)^2} & -\dfrac{\alpha\gamma(x^*)^2}{(\gamma(x^*)^2 + y^*)^2} \\ \dfrac{2\beta x^*(y^*)^2}{(\gamma(x^*)^2 + y^*)^2} & -k\dfrac{\beta\gamma(x^*)^2}{(\gamma(x^*)^2 + y^*)^2} \end{pmatrix}。\tag{12}$$

由(9)得:

$$\boldsymbol{J}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} r - 2bx^* - \dfrac{2\alpha x^*(y^*)^2}{\gamma(x^*)^2 + (y^*)^2} & \dfrac{-k^2\alpha\gamma}{\beta^2} \\ \dfrac{2\beta x^*(y^*)^2}{(\gamma(x^*)^2 + y^*)^2} & \dfrac{k(k\gamma - \beta)}{\beta} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

将(13)式经过初等变换,则有:

$$\begin{pmatrix} r - 2bx^* & \dfrac{-k\alpha}{\beta} \\ \dfrac{2\beta x^*(y^*)^2}{(\gamma(x^*)^2 + y^*)^2} & \dfrac{k(k\gamma - \beta)}{\beta} \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{G}(x^*, y^*), \tag{14}$$

将(11)式代入(14)式得:

$$\boldsymbol{G}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{r\{\alpha[\beta - k\gamma] - b\beta\}}{\alpha[\beta - k\gamma] + b\beta} & \dfrac{-k\alpha}{\beta} \\ 2r(\beta - k\gamma)^2\{[\beta - k\gamma] + b\beta\} & \dfrac{k(k\gamma - \beta)}{\beta} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

当 $\alpha_M(\beta_M - k_m\gamma_m) < b_m\beta_m$ 时,$g_{11} = \dfrac{r\{\alpha[\beta - k\gamma] - b\beta\}}{\alpha[\beta - k\gamma] + b\beta} < 0$,$g_{12} = \dfrac{-\alpha k}{\beta} < 0$,由于 $\beta_m - k_M\gamma_M > 0$,则:

$$g_{21} = 2r(\beta - k\gamma)^2\{[\beta - k\gamma] + b\beta\} > 0, g_{22} = \frac{k[k\gamma - \beta]}{\beta} < 0,$$

那么 $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} > 0$。

因此矩阵 $\boldsymbol{G}(x^*, y^*)$为负定矩阵,则 $\boldsymbol{J}(x^*, y^*)$也为负定矩阵,满足系统稳定性定义,故系统(1)在平衡点(x^*, y^*)处有局部渐近稳定。　　证毕

参考文献:

[1] Hassell M P, Varely G C. New inductive population model for insect parasites and its bearing on biological control[J]. Nature, 1969, 223: 1133-1137.

[2] Arediti R, Ginzburg L R. Coupling in predator-prey dynamics: Ratio-dependence[J]. Biology, 1989, 139: 311-326.

[3] 魏洪义,王国汉. 斯氏线虫对黄曲条跳甲的侵染能力[J]. 华南农业大学学报,1992,13(1):26-29.
Wei H Y, Wang G H. Innfectivity of the nematode, steinernema feltiae, to the striped flea beetle phyllotreta striolat[J]. J South China Agr Univ, 1992, 13(1): 26-29.

[4] 赵士熙,陈强. 奈树桑白蚧及其捕食性天敌日本方头甲[J]. 福建农业大学学报,1997,26(2):182-186.
Zhao S, Chen Q. Pseudaulacaspis pentagona and its predator Cybocephalus nipponicus in Nane tree[J]. Journal of Fujian Agricultural University, 1997, 26(2): 182-186.

[5] 邱明生,罗其荣. 草间小黑蛛对亚洲玉米螟捕食作用的研究[J]. 植保技术与推广,1998(6):10-12.
Qiu M, Luo Q. A study on predation of erigonidium graminicdum on ostrinia furnacalis[J]. Plant Protection Technology and Extension, 1998(6): 10-12.

[6] 杨燕燕,李照会. 异色郭公虫成虫对柏肤小蠹成虫捕食作用的研究[J]. 山东农业科学,2004(6):40-42.
Yang Y, Li Z. Predation of Tillus notatus on Phloeosinus aubei[J]. Shandong Agricultural Sciences, 2004(6): 40-42.

[7] 刘秀湘,黄立宏. 离散 Hassell-Varley 型功能性反应系统的正周期解[J]. 数学的实践与认识,2009,39(12):115-120.
Liu X, Huang L. Positive periodic solutions for a discrete system with Hassell-Varley type functional response[J].

Mathematics in Practice and Theory, 2009, 39(12): 115-120.

[8] 郭翠晶. 一类具有 Hassell-Varley 型功能性反应的捕食者—食饵系统周期解的存在性[D]. 长春:东北师范大学, 2009.

Guo C J. Positive periodic solutions for predator-prey system with Hassell-Varley tyre functional response[D]. Changchun: Northeast Normal University, 2009.

[9] 温绍雄,范猛. 离散 Hassell-Varley 型功能性反应的捕食者-食饵系统周期解的存在性[J]. 东北师大学报:自然科学版, 2011, 43(1): 10-15.

Wen S X, Fan M. Existence of periodic soluton of a predator-prey system with Hassell-Varley functional response. [J]. Journal of Northeast Normal University: Natural Science Edition, 2011, 43(1): 10-15.

[10] 钟敏玲,刘秀湘. 具有 Hassell-Varley-Holling 反应非自治捕食者-食饵系统的动力学分析[J]. 数学物理学报, 2011(5): 1295-1310.

Zhong M L, Liu X. Dynamical analysis of a predator-prey system with Hassell-Varley-Holling functional response [J]. Acta Mathematica Scientia, 2011(5): 1295-1310.

[11] 王长有. 具分布时滞和扩散影响的捕食-食饵模型的周期解[J]. 重庆邮电学院学报:自然科学版, 2006, 18(3): 409-412.

Wang C Y. Periodic solution of prey predator model with diffusion and distributed delay effects[J]. Journal of Chongqing Univertity of Posts and Telecommunications: Natural Science, 2006, 18(3): 409-412.

[12] 王长有,胡晓红. 时滞反应扩散方程有界解周期解的存在唯一性[J]. 重庆邮电学院学报:自然科学版, 2005, 17(5): 644-646.

Wang C Y, Hu X H. Existence and uniqueness of bounded solution periodic solution of reaction diffusion equation with time delay[J]. Journal of Chongqing Univertity of Posts and Telecommunications: Natural Science, 2005, 17(5): 644-646.

[13] Cantrell R S, Cosner C. Practical persistence in ecological models via comparison methods[J]. Pro Roy Soc Edinburgh Sect A, 1996, 126(2): 247-272.

[14] Cosner C. Variability, vagueness, and comparison methods for ecological models[J]. Bull Math Biol, 1996, 58(2): 207-246.

Permanence and Stability of Predator-prey System with Hassell-Varley Type Functional Response

HU Chunjian, WANG Li

(1. Department of Basic Courses Teaching, Chongqing Vocational College of Finance and Economics, Chongqing 402160;
2. Third Middle School of Chongqing University Town, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper discusses the permanence and stability of predator-prey system with Hassell- Varley type functional response. Firstly, a new model of the system is formulated. Then, by the skills of inequalities, we obtain a sufficient condition ensuring the permanence for predator-prey system is obtained. Finally, based on the results, stability of system is derived by using matrix theory. The obtained results are novel and improve some ones in existing publications.

Key words: Hassell-Varley type functional response; predator-prey system; permanence; stability

(责任编辑 黄 颖)