DOI:10.11721/cqnuj20160310

解 Volterra 时滞积分方程的高精度外推算法*

肖 继 红

(四川大学 锦江学院数学教学部,四川 彭山 620860)

摘要:考虑 Volterra 时滞积分方程,证明了方程解的存在唯一性。通过梯形积分公式和中矩形公式离散方程,并通过插值逼近非整数结点,得到了一个数值新算法,其收敛阶达到 $O(h^2)$,通过采用外推技术,使收敛阶能提高到 $O(h^3)$,并给出后验误差估计。最后的数值算例很好地验证了理论结果。

关键词:Volterra 时滞积分方程;求积法;渐进展开;外推;后验误差估计

中图分类号:O241.4;O241.83 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2016)03-0085-06

本文研究了下述的 Volterra 时滞积分方程:

$$u(t)=g(t)+\int_0^{qt}K(t,s;u(s))\mathrm{d}s,\ t\in I:=[0,T],\ q\in(0,1),\tag{1}$$

其中已知函数 $g(t):I\to\mathbf{R}$,$K:D\to\mathbf{R}$($D:=\{(t,s):0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$)。假设 $K\in C^m(D)$ 和 $g\in C^m(I)$,则 Volterra 时滞积分方程的解 $u(t)\in C^m(I)$。

当今各种类型的时滞积分方程已经广泛用于力学、生态学、控制论、随机过程、经济管理和流行病学等诸多领域中。一般来说,时滞方程无论理论和算法都较通常积分方程复杂。关于各种时滞方程的各种数值方法引起了广泛的关注[1-8]。

Brunner 在他的著作[2]中对 Volterra 时滞方程有系统的阐述,主要的研究方法是配置法,还可参见文献[5]。研究时滞方程的其他方法还有谱方法[7]和 Runge-Kutta 法等。文献[13]从数值稳定性方面对时滞方程进行了研究。通过外推法研究该方程的比较少,外推法[4,9,12]在对积分方程的研究方面起着非常重要的作用。本文主要利用求积法和外推技术,分析了该方程的算法,能使收敛误差精度更高。通过理论分析和最后的数值算例很好地说明了外推技术能减少存储量与计算量。

1 解的存在唯一性

首先构建 Picard 迭代序列 $\{u_n(t)\}(n=1,2,\cdots)$:

$$\begin{cases}u_0(t)=g(t),\\ u_n(t)=g(t)+\int_0^{qt}K(t,s;u_{n-1}(s))\mathrm{d}s。\end{cases}\tag{2}$$

对任意的连续函数 u,v,则存在非负函数 $M(t,s)$,$N(t)$,其中 $M(t,s)$ 满足 Lipschitz 界:

$$|K(t,s;u)-K(t,s;v)|\leqslant M(t,s)|u-v|\tag{3}$$

和

$$\int_0^t|K(t,s;g(s))|\mathrm{d}s\leqslant N(t)。\tag{4}$$

为了得到收敛性分析,假设

$$\int_0^t\left(\int_0^x M^2(t,s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^t M^2(x)\mathrm{d}x\leqslant M^2<1,\tag{5}$$

$$\int_0^t N^2(s)\mathrm{d}s\leqslant N^2,\tag{6}$$

这里 M,N 是两个正常数。

* **收稿日期**:2015-09-26 **修回日期**:200-00-00 **网络出版时间**:2016-04-30 9:42

资助项目:四川省教育厅自然科学基金(No. 14ZB0424);四川大学锦江学院青年教师科研基金(No. QJ140607)

作者简介:肖继红,男,讲师,研究方向为微分方程数值解,E-mail:xiaojh2752@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160430.0942.004.html

定理1 设 $g(t)$ 和 $K(t,s;u(s))\in C^3[0,T]$，满足条件(3)～(6)。令

$$u(t)=u_1(t)+\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}(t)-u_n(t)),\tag{7}$$

则 Picard 迭代序列 $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 绝对收敛于 $u(t)$ 且方程(1)存在唯一解。

证明 首先，证解的唯一性，设 u,v 是(1)式的两个解，

$$|u(t)-v(t)|^2\leqslant\left\{\int_0^{qt}|K(t,s;u(s))-K(t,s;v(s))|\mathrm{d}x\right\}^2\leqslant$$

$$\int_0^t M^2(t,s)\mathrm{d}s\cdot\int_0^t|u(s)-v(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant M^2(t)\cdot\int_0^t|u(s)-v(s)|^2\mathrm{d}s,\tag{8}$$

在(8)式两边积分得

$$\int_0^t|u(s)-v(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant M^2\int_0^t M^2(s)\mathrm{d}s<\int_0^t|u(s)-v(s)|^2\mathrm{d}s,\tag{9}$$

显然矛盾，证得解具有唯一性。

其次，证解的存在性，利用假设可得

$$|u_1(t)-u_0(t)|\leqslant\int_0^{qt}|K(t,s;g(s))|\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t|K(t,s;g(s))|^2\mathrm{d}s\leqslant N(t)。\tag{10}$$

利用数学归纳法和 Schwarz 不等式来证明方程(1)的存在性，

$$|u_2(t)-u_1(t)|\leqslant\int_0^{qt}|K(t,s;u_1(s))-K(t,s;u_0(s))|\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\int_0^t M(t,s)|u_1(s)-u_0(s)|\mathrm{d}s\leqslant\sqrt{\int_0^t M^2(t,s)\mathrm{d}s}\cdot\sqrt{\int_0^t N^2(s)\mathrm{d}s}=NM(t)。\tag{11}$$

假设有 $|u_n(t)-u_{n-1}(t)|\leqslant NM^{n-2}M(t)$ 成立，所以

$$|u_{n+1}(t)-u_n(t)|\leqslant\int_0^t M(t,s)|u_n(s)-u_{n-1}(s)|\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t M(t,s)NM^{n-2}M(s)\mathrm{d}s\leqslant$$

$$NM^{n-2}\sqrt{\int_0^t M^2(t,s)\mathrm{d}s}\cdot\sqrt{\int_0^t M^2(s)\mathrm{d}s}\leqslant NM^{n-1}M(t),\tag{12}$$

可得

$$|u_{n+1}(t)-u_n(t)|^2\leqslant N^2M^{2(n-1)}M^2(t)。\tag{13}$$

在(13)式两边从0到 t 积分得

$$\int_0^t|u_{n+1}(s)-u_n(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant N^2M^{2n},\tag{14}$$

当 $n\to\infty$ 时，Picard 迭代序列 $\{u_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列，几乎处处一致收敛于 $u(t)$。 证毕

2 数值算法

下面给出一些重要的引理，梯形求积公式和中矩形求积公式的 Euler-Maclaurin 展开式(Marchuk[10])。

引理1 令 $f(x)\in C^{2k+1}[a,b]$，取 $h=\dfrac{b-a}{n}$，则成立梯形积分公式的渐进展开式

$$T_n(f)=h\left[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+\cdots+f(a+(n-1)h)+\frac{1}{2}f(b)\right]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+$$

$$\frac{B_2}{2!}h^2[f'(b)-f'(a)]+\cdots+\frac{B_{2k}}{(2k)!}h^{2k}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]+h^{2k+1}\int_a^b p_{2k+1}\left(n\frac{x-a}{b-a}\right)f^{(2k+1)}(x)\mathrm{d}x,$$

其中 B_{2k} 是 Bernoulli 数，$B_2=\dfrac{1}{6}$，$B_4=-\dfrac{1}{30}$，…，$p_{2k+1}(x)=(-1)^{k-1}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin(2\pi nx)}{(2\pi n)^{2k+1}}$。

中矩形积分公式的渐进展开式：

$$M_n(f)=h\left[f\left(a+\frac{h}{2}\right)+f\left(a+\frac{3h}{2}\right)+\cdots+f\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)\right]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{B_2\left(\frac{1}{2}\right)}{2!}h^2[f'(b)-f'(a)]+\cdots+$$

$$\frac{B_{2k}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2k)!}h^{2k}[f^{(2k-1)}(b)-f^{(2k-1)}(a)]+h^{2k+1}\int_a^b p_{2k+1}\left(\frac{1}{2}-n\frac{x-a}{b-a}\right)f^{(2k)}(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $B_{2j}\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(1-\frac{1}{2^{2j-1}}\right)B_{2j}$。

首先在区间[0,T]上取步长 $h=\frac{T}{N}$,令 $t_i=ih,i=1,2,\cdots,N$。在方程(1)中令 $t=t_i$,得到

$$u(t_i)=g(t_i)+\int_0^{qt_i}K(t_i,s;u(s))\mathrm{d}s=g(t_i)+\int_0^{t_{[qi]}}K(t_i,s;u(s))\mathrm{d}s+\int_{t_{[qi]}}^{qt_i}K(t_i,s;u(s))\mathrm{d}s=g(t_i)+I_1+I_2,\tag{15}$$

其中[qi]表示不超过 qi 的最大整数,$I_1=\int_0^{t_{[qi]}}K(t_i,s;u(s))\mathrm{d}s,I_2=\int_{t_{[qi]}}^{qt_i}K(t_i,s;u(s))\mathrm{d}s$。当 $f(x)\in C^2[a,b]$,$h=\frac{b-a}{N}$对于梯形公式存在界 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]+h\sum_{k=1}^{N-1}f(a+kh)-\frac{h^2}{12}f''(\eta),\eta\in(a,b)$,对中矩形公式有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)+\frac{h^3}{24}f''(\xi),\xi\in(a,b)$。

下面对积分离散化,在[0,$t_{[qi]}$]采用梯形公式,[$t_{[qi]}$,qt_i]上采用中矩形公式,可得到:$I_1\approx h\sum_{k=0}^{[qi]-1}K(t_i,t_k;u_k)+\frac{h}{2}K(t_i,t_{[qi]};u_{[qi]})$,$I_2\approx(qt_i-t_{[qi]})K\left(t_i,\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2};u\left(\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2}\right)\right)$。

由于时间的延时性,$u\left(\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2}\right)$用相邻的结点 $u(t_{[qi]}),u(t_{[qi]+1})$插值逼近。由于 $t_{[qi]}\leqslant\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2}\leqslant t_{[qi]+1}$,所以可令$\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2}=\beta t_{[qi]}+(1-\beta)t_{[qi]+1},0\leqslant\beta\leqslant1$,此处 $\beta=1-\frac{qi-[qi]}{2}$。利用 Taylor 公式,可得

$$u\left(\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2}\right)=\beta u(t_{[qi]})+(1-\beta)u(t_{[qi]+1})-\frac{\beta(1-\beta)}{2}h^2u''\left(\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2}\right)+O(h^3)。\tag{16}$$

可利用 $\beta u(t_{[qi]})+(1-\beta)u(t_{[qi]+1})$去近似逼近 $u\left(\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2}\right)$。可以得到该方程的离散方程,找 $u(t_i)$的近似值 u_i:

$$\begin{cases}u_0=g(t_0),\\ u_i=g(t_i)+\frac{h}{2}K(t_i,t_0;u_0)+h\sum_{k=1}^{[qi]-1}K(t_i,t;u_k)+\frac{h}{2}K(t_i,t_{[qi]};u_{[qi]})+\\ \qquad(qt_i-t_{[qi]})K\left(t_i,\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2};\beta u_{[qi]}+(1-\beta)u_{[qi]+1}\right)。\end{cases}\tag{17}$$

方程(17)是一个非线性方程,$u_i,i=0,1,\cdots,N$ 可以通过下面的迭代算法去计算。

算法 1:

Step 1　置充分小的 $\varepsilon>0,u_0=g(t_0),i:=1$;

Step 2　置 $u_i^0=u_{i-1},m:=0$,计算 $u_i^{m+1}(i\leqslant N)$通过下面的简单迭代:

$$u_i^{m+1}=g(t_i)+\frac{h}{2}K(t_i,t_0;u_0)+h\sum_{k=1}^{[qi]-1}K(t_i,t_k;u_k^m)+\frac{h}{2}K(t_i,t_{[qi]};u_{[qi]}^m)+(qt_i-t_{[qi]})K\left(t_i,\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2};\beta u_{[qi]}+(1-\beta)u_{[qi]+1}^m\right);$$

Step 3　假设有$|u_i^{m+1}-u_i^m|\leqslant\varepsilon$,置 $u_i:=u_i^{m+1}$,且 $i:=i+1$,继续 Step 2;否则,置 $m:=m+1$,进行 Step 2。

3 收敛性分析,误差估计

离散 Grownwall 不等式(Marchuk,Shaidurov[10];吕涛[11])

引理 2　假设非负序列$\{y_n,n=1,2,\cdots,N\}$满足 $y_0=0,y_n\leqslant A+Bh\sum_{j=0}^{n-1}y_j$,那么存在不依赖于 h 的常数使得 $\max_{0\leqslant i\leqslant N}y_j\leqslant Ae^B$。

定理 3　假设方程(1)的解 $u(t)\in C^3[0,T]$和核 $K(t,s;\cdot)\in C^3[0,T]\times[0,T]$,且满足 Lipschitz 条件 $|K(t,s;u)-K(t,s;v)|\leqslant L|u-v|,(t,s)\in D$,常数 L 与 h 无关。记 $e_i^h=u(t_i)-u_i^h$,则存在不依赖于 h 的常数

$C>0$,使得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}|e_i^h|\leqslant Ch^2。\tag{18}$$

证明 对 I_1 用梯形公式渐进展开,有渐进误差 E_{I_1},对 I_2 用中矩形公式渐进展开,有渐进误差 E_{I_2}。$E_{I_1}=-\frac{h^2}{12}\int_0^{t_{[qi]}}\frac{\partial^2}{\partial s^2}K(t_i,s;u(s))\mathrm{d}s+O(h^3)=-Q_1(t_i)h^2+O(h^3)$,$E_{I_2}=-\frac{\beta(1-\beta)}{2}(qt_i-t_{[qi]})h^2u''\left(\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2}\right)\cdot K'_u\left(t_i,\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2};\beta u(t_{[qi]})+(1-\beta)u(t_{[qi]+1})\right)+\frac{\bar{h}^2}{12}\int_{t_{[qi]}}^{qt_i}\frac{\partial^2}{\partial s^2}K(t_i,s;u(s))\mathrm{d}s+O(h^3)=Q_2(t_i)h^2+\frac{\bar{h}^2-h^2}{12}\cdot\int_{t_{[qi]}}^{qt_i}\frac{\partial^2}{\partial s^2}K(t_i,s;u(s))\mathrm{d}s+O(h^3)=Q_2(t_i)h^2+\frac{\bar{h}^2-h^2}{12}\int_{t_{[qi]}}^{qt_i}\frac{\partial^2}{\partial s^2}K(t_i,s;u(s))\mathrm{d}s+O(h^3)=Q_2(t_i)h^2+O(h^2)$,这里 $Q_2(t_i)=-\frac{\beta(1-\beta)}{2}(qt_i-t_{[qi]})u''\left(\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2}\right)K'_u\left(t_i,\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2};\beta u(t_{[qi]})+(1-\beta)u(t_{[qi]+1})\right)+\frac{1}{12}\int_{t_{[qi]}}^{qt_i}\frac{\partial^2}{\partial s^2}K(t_i,s;u(s))\mathrm{d}s$,$K'_u(t,s;u(s))=\frac{\partial}{\partial u}K(t,s;u(s))$。

从上面的关系式,可以得到下面的关系式:

$$\begin{aligned}u(t_i)=&g(t_i)+h\sum_{k=1}^{[qi]-1}K(t_i,t_k;u(t_k))+\frac{h}{2}K(t_i,t_{[qi]};u(t_{[qi]}))+\\&(qt_i-t_{[qi]})K\left(t_i,\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2};\beta u(t_{[qi]})+(1-\beta)u(t_{[qi]+1})\right)+(Q_2(t_i)-Q_1(t_i))h^2+O(h^3),\end{aligned}\tag{19}$$

用(19)式减去(13)式,可以得到误差$\{e_i^h\}$满足的方程组

$$\begin{cases}e_0^h=0,\\e_i^h=h\sum\limits_{k=1}^{[qi]-1}[K(t_i,t_k;u(t_k))-K(t_i,t_k;u_k^h)]+\frac{h}{2}[K(t_i,t_{[qi]};u(t_{[qi]}))-K(t_i,t_{[qi]};u_{[qi]}^h)]+(qt_i-t_{[qi]})\cdot\\\quad\left[K\left(t_i,\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2};\beta u(t_{[qi]})+(1-\beta)u(t_{[qi]+1})\right)-K\left(t_i,\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2};\beta u_{[qi]}^h+(1-\beta)u_{[qi]+1}^h\right)\right]+\\\quad(Q_2(t_i)-Q(t_i))h^2+O(h^2)。\end{cases}\tag{20}$$

两边取绝对值,由 Lipschitz 条件,可以得到$\{e_i^h\}$所满足的不等式组:

$$\begin{cases}|e_0^h|=0,\\|e_i^h|\leqslant Lh\sum\limits_{k=1}^{[qi]-1}|e_k^h|+L\left(\frac{h}{2}+\beta(qt_i-t_{[qi]})\right)|e_{[qi]}^h|+(1-\beta)L(qt_i-t_{[qi]})|e_{[qi]+1}^h|+\\\quad|Q_2(t_i)-Q_1(t_i)|h^2+O(h^2)。\end{cases}\tag{21}$$

取 $A=\sup\limits_{h>0}\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\0\leqslant t\leqslant T}}\left\{L,\frac{L}{2}+L\beta\frac{qt_i-t_{[qi]}}{h},(1-\beta)L\frac{qt_i-t_{[qi]}}{h}\right\}$,$B=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}|(Q_1(t_2)-Q_2(t_1))h^2+O(h^2)|$,则有

$$|e_0^h|\leqslant B+Ah\sum_{k=1}^{i-1}|e_k^h|,1\leqslant i\leqslant N。\tag{22}$$

由引理2,可得$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}|e_i^h|\leqslant Be^A$,这里 $B=O(h^2)$,$A<\infty$。对于某个不依赖于 h 的常数 $C>0$,得到:

$$\max_{1\leqslant i\leqslant N}|e_i|\leqslant Ch^2。\tag{23}$$

即得到定理的证明。 证毕

4 外推方法和后验误差估计

定理3意味着算法1的收敛阶是 $O(h^2)$,在工程中浪费太多的CPU时间才能达到满意的解。为了改善算法1的收敛阶,给出算法1的误差的渐进展开式,进而考虑外推技术和后验误差估计。从(20)式可得:

$$\begin{cases}e_0^h=0,\\e_i^h=h\sum\limits_{k=1}^{[qi]-1}K'_u(t_i,t_k;u(t_k))e_k^h+\frac{h}{2}K'_u(t_i,t_{[qi]};u(t_{[qi]}))e_{[qi]}^h+(qt_i-t_{[qi]})K'_u\Bigg(t_i,\\\quad\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2};\beta u(t_{[qi]})+(1-\beta)u(t_{[qi]+1})\Bigg)(\beta e_{[qi]}^h+(1-\beta)e_{[qi]+1}^h)+(Q_2(t_i)-Q_1(t_i))h^2+O(h^2)。\end{cases}\tag{24}$$

对已知的 $u(t)$，考虑下面辅助的 Volterra 型时滞积分方程，设$\{\hat{Q}_k(t), k=1,2\}$满足下述的积分方程：

$$\hat{Q}_k(t)=Q_k(t)+\int_0^{qt}K_u(t,s;u(s))\hat{Q}_k(s)\mathrm{d}s, \tag{25}$$

并且$\{\hat{Q}_k(t_i)\}$满足它的近似方程：

$$\hat{Q}_k(t_i)=Q_k(t_i)+h\sum_{k=1}^{[qi]-1}K_u(t_i,t_k;u(t_k))\hat{Q}_k(t_i)+\frac{h}{2}K'_u(t_i,t_{[qi]};u(t_{[qi]}))\hat{Q}_k(t_{[qi]})+(qt_i-t_{[qi]})\cdot$$
$$K_u\left(t_i,\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2};\beta u(t_{[qi]})+(1-\beta)u(t_{[qi]+1})\right)(\beta\hat{Q}_k(t_{[qi]})+(1-\beta)\hat{Q}_k(t_{[qi]+1})),k=1,2。 \tag{26}$$

用与定理 3 相类似的方法，可得到 $$\max_{1\leqslant i\leqslant N}|\hat{Q}_k(t_i)-Q_k(t_i)|\leqslant Ch^2。 \tag{27}$$

把(26)式代入(24)式中，令$\hat{e}_i^h=e_i^h+(\hat{Q}_2(t_i)-\hat{Q}_1(t_i))h^2$，可以得到：

$$\hat{e}_i^h=h\sum_{k=1}^{[qi]-1}K_u(t_i,t_{k+\frac{1}{2}};u(t_{k+\frac{1}{2}}))\hat{e}_k^h+\frac{h}{2}K'_u(t_i,t_{[qi]};u(t_{[qi]}))\hat{e}_{[qi]}^h+$$
$$(qt_i-t_{[qi]})K_u\left(t_i,\frac{qt_i+t_{[qi]}}{2};\beta u(t_{[qi]})+(1-\beta)u(t_{[qi]+1})\right)(\beta\hat{e}_{[qi]}^h+(1-\beta)\hat{e}_{[qi]+1}^h)+O(h^3)。 \tag{28}$$

由离散 Gronwall 不等式，存在常数 C 满足： $$\max_{1\leqslant i\leqslant N}|\hat{e}_i^h|\leqslant Ch^3, \tag{29}$$

所以可以得到渐进展开式

$$u_i^h=u(t_i)+(\hat{Q}_2(t_i)-\hat{Q}_1(t_i))h^2+O(h^3)。 \tag{30}$$

由上面的讨论，可以得到下面的定理 4。

定理 4　设方程(1)的解 $u\in C^3[0,T]$，且 $K,g\in C^3[0,T]$，$K(t,s;u(s))$关于 u 满足 Lipschitz 条件$|K(t,s;u)-K(t,s;v)|\leqslant L|u-v|,(t,s)\in D$，则存在函数$\hat{Q}_k(t)(k=1,2)$与步长 h 无关，满足渐进展开式(30)。

这充分说明算法的精度可以采用 Richardson 外推技术来提高。有

$$u_i^e=\frac{4u_i^{\frac{h}{2}}-u_i^h}{3}=u(t_i)+O(h^3), \tag{31}$$

这里 $u_i^{\frac{h}{2}}$ 在算法(19)中用$\frac{h}{2}$代 h 算出来的。从上式得到 $u_i^e-u(t_i)$的精度阶为 $O(h^3)$。可以进一步得到后验渐进误差估计为：

$$|u_i^{\frac{h}{2}}-u_i^h|=\left|\frac{4u_i^{\frac{h}{2}}-u_i^h}{3}-u(t_i)+\frac{u_i^h-u_i^{\frac{h}{2}}}{3}\right|\leqslant\left|\frac{4u_i^{\frac{h}{2}}-u_i^h}{3}-u(t_i)\right|+\left|\frac{u_i^h-u_i^{\frac{h}{2}}}{3}\right|=$$
$$|u_i^e-u(t_i)|+\left|\frac{u_i^h-u_i^{\frac{h}{2}}}{3}\right|+O(h^3)。 \tag{32}$$

可以通过$\left|\frac{u_i^h-u_i^{\frac{h}{2}}}{3}\right|$来逼近$|u_i^{\frac{h}{2}}-u(t_i)|$的误差。通过这种方法也可以构建自适应算法。

5 数值算例

为了说明该算法的有效性，这里考察两个数值例子。

例 1　从文献[2]中选择 $q=0.9$ 和 $g(t)=t-0.405t^4-0.243t^3$，考虑下面的线性方程：$u(t)=t-0.405t^4-0.243t^3+\int_0^{0.9t}(t^2+s)u(s)\mathrm{d}s,t\in[0,1]$。 该方程有精确解 $u(t)=t$。用数值算法算出 $h=0.05$ 的误差 e_h 和 $h=0.025$ 时的误差 $e_{\frac{h}{2}}$ 的数值结果如表 1 所示。通过表 1 可知，误差比的范围为 3.79～4.71，与理论值 4 接近，意外着算法的代数精度是 2，与理论分析吻合。这也充分说明外推能大大提高精度，非常有效。

表 1　线性方程对算法 1 的数值结果

Tab. 1　The mumerical results of linear equation to algorithm 1

t	e_h	$e_{\frac{h}{2}}$	误差比	外推误差	后验误差
0.2	8.81e−5	1.87e−5	4.71	−4.42e−6	2.31e−5
0.4	1.59e−4	3.88e−5	4.07	−9.59e−7	3.97e−5
0.6	2.45e−4	6.46e−5	3.79	4.53e−6	6.00e−5
0.8	4.10e−4	1.02e−4	4.00	−1.04e−7	1.03e−5
1.0	6.71e−4	1.69e−5	3.98	1.04e−6	1.67e−5

例 2 选择 $q=0.95$ 和 $g(t)=1.95t\cos(0.95t)-\sin(0.95t)$，考虑非线性方程 $u(t)=1.95t\cos(0.95t)-\sin(0.95t)+\int_0^{0.95t}(t+s)\sin u(s)\mathrm{d}s$。该方程有精确解 $u(t)=t$。$h=0.5$，数值算法的误差如表 2 所示。通过表 2 可知，误差比的最小值为 3.18，接近于 $4=2^2$，然而由于该方程为非线性方程，当 $t=0.3,0.5,0.7,0.9$ 时，误差比为 14.11～15.44，算法的代数精度为 2。外推在提高精度方面非常有效。

表 2 非线性方程对算法 1 的数值结果

Tab. 2 The numerical results of nonlinear equation to algorithm 1

t	e_h	$e_{\frac{h}{2}}$	误差比	外推误差	后验误差
0.2	1.81e−5	5.75e−5	3.18	4.91e−6	1.32e−5
0.4	3.99e−5	1.47e−4	3.67	4.33e−6	3.56e−5
0.6	6.07e−5	2.38e−4	3.92	1.51e−6	5.92e−5
0.8	8.48e−5	3.31e−4	3.90	2.73e−6	8.20e−5
1.0	1.07e−4	4.16e−4	3.89	3.97e−6	1.03e−5

参考文献：

[1] Chambers L G. Some properties of the functional equation $\varphi(x)=f(x)+\int_0^{\lambda x}g(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y$ [J]. Internat J Math Math Sci，1990，14(1)：27-44.

[2] Brunner H. Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations[M]. London：Cambridge University Press，2004.

[3] Brunner H，Lin Y P，Zhang S H. Higher accuracy methods for second-kind Volterra integral equations based on asymptotic expansions of iterated Galerkin methods[J]. J Integral Equation Appl，1998，10(4)：375-396.

[4] 吕涛，石济民，林政宝. 分裂外推与组合技巧[M]. 北京：科学出版社，1998.
Lü T，Shi J M，Lin Z B. The splitting extrapolation and combination methods[M]. Beijing：Science Press，1998.

[5] Kress R. Linear integral equations[M]. Berlin：Springer-Verlag Press，1989.

[6] Andreoli G. Sulle equazioni integrali[J]. Rend Cire Mat Palermo，1914，37(1)：76-112.

[7] Ali I，Brunner H，Tang T. A spectral method forpantograph-type delay differential equations and its convergence analysis[J]. J Comput Math，2009，27(2-3)：254-265.

[8] Iserles A，Liu Y K. On pantograph integro-differential equations[J]. J Integral Equation Appl，1994，6(2)：213-237.

[9] Lin Q，Sloan I H，Xie R. Extrapolation of the iterated collocation method for integral equations of the second kind[J]. SIAM J Numel Anal，1990，27(6)：1535-1541.

[10] Marchuk G I，Shaidurov V V. Difference methods and their extrapolations[M]. Berlin：Springer-Verlag，1983.

[11] Lü T，Huang Y. A generalization of discrete Grownwall inequality and its application to weakly singular Volterra inregral equation of the second kind[J]. J Math Anal Appl，2003，282(1)：56-62.

[12] 吕涛. 高精度解多维问题的外推法[M]. 北京：科学出版社，2015.
Lü T. High-precision extrapolation methods for solving multi-dimensional problems[M]. Beijing：Science Press，2015.

[13] 田红炯，匡蛟勋. 滞时 Volterra 积分方程数值方法的数值稳定性分析[J]. 应用数学与力学，1995，16(5)：451-457.
Tian H J，Kuang J X. Numerical stability analysis ofnumerical methods for Volterra integral equations with delay argument[J]. Applied Mathematics and Mechanics，1995，16(5)：451-457.

A High-order Extrapolation Algorithm for Solving Volterra Delay Integral Equation

XIAO Jihong

(Mathematics Department，Sichuan University Jinjiang College，Pengshan Sichuan 620860，China)

Abstract：This paper considers Volterra delay integral equation. The existence and uniqueness of the solutions to this kind of equations are proved. Using trapezoidal integral formula and rectangular integral formula to disperse it，we obtain a new numerical algorithm by interpolation techniques for the non-integer node，and its convergence order can be up to $O(h^2)$. This paper also uses extrapolation techniques，making the convergence order up to $O(h^3)$ and giving a posteriori error estimate. The final numerical example verifies the theoretical results well.

Key words：Volterra delay integral equation；quadrature methods；asymptotic approximation；extrapolation；posteriori error estimate

（责任编辑 游中胜）