2016 年 5 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　May 2016
第 33 卷 第 3 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 33 No. 3

DOI:10.11721/cqnuj20160324

基于覆盖的粗糙集代数*

孔庆钊[1,2]，韦增欣[3]
(1.华东理工大学 理学院，上海 200237；2.集美大学 理学院，福建 厦门 361021；
3.广西大学 数学与信息科学学院，南宁 530004)

摘要:一个粗糙集代数是由集合代数加上一对对偶近似算子构成的。首先研究了两种类型的基于覆盖的粗糙集代数的相关性质,可以得到在经典覆盖的情形下,粗糙集代数没有很好的性质。为此,引入了单调的覆盖的概念,进而讨论了在单调覆盖的情形下粗糙集代数的相关性质,得到了许多很好的结果。

关键词:覆盖;单调;粗糙集代数;近似算子
中图分类号:TP18　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)03-0098-04

粗糙集理论自从波兰数学家 Pawlak 引入以来便广泛应用于模糊识别、数据挖掘、股票分析和理疗诊断等领域。在粗糙集理论中,下近似和上近似是两个非常重要的概念。通过把下近似和上近似视为最基本的概念,将注意力放在研究粗糙集理论中所产生的代数系统上,利用一个公理集来刻画上下近似算子,揭示公理集与此条件下所产生的代数系统之间的联系的粗糙集理论研究方法就被称为公理性[1-5]。例如:姚一豫就用公理性方法给出了诸多经典的粗糙集代数系统并进行了探讨[5]。另外,吴伟志也用公理性方法对各种模糊粗糙集近似算子和粗糙近似算子进行了刻画和研究[6-7]。与此同时,粗糙集代数也得到了定义和讨论[8]。

另一方面,经典的 Pawlak 粗糙集的上下近似算子是用等价关系来定义的,而等价关系显得有些“苛刻”,在解决实际问题时不是很适用。由等价关系得到一个划分,而覆盖作为划分的一种推广自从被 Zakonski 引入以来便引起了许多学者的关注[9-13]。

本文利用公理性方法建立并讨论了基于覆盖的粗糙集代数的有关性质,得到了一些有意义的结果。

1 预备知识

设$(U,\mathbf{R})$是一近似空间,其中 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是一个非空有限集;$\mathbf{R}=\{R_1,R_2,\cdots,R_m\}$是等价关系的集合。设 $R\subseteq\mathbf{R}$,记$[x]_R=\{y\mid(x,y)\in R\}$,$U/R=\{[x]_R\mid x\in U\}$。

定义 1[14]　设$(U,\mathbf{R})$是一个近似空间,$R\subseteq\mathbf{R}$,对任意的 $X\subseteq U$,称 $\underline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\subseteq X\}$;$\overline{R}(X)=\{x\in U\mid[x]_R\cap X\neq\varphi\}$为 X 的关于等价关系 R 的 Pawlak 下近似和上近似。

定义 2[14]　算子 $L,H:2^U\to2^U$ 称为对偶的,如果对$\forall X\subseteq U$,它们满足:$(L_0)LX=\sim H\sim X$;$(H_0)HX=\sim L\sim X$。

定义 3[14]　设 $L,H:2^U\to2^U$ 是一对对偶算子,如果 L 满足公理(L_1)和(L_2),或者等价地,H 满足公理(H_1)和(H_2),则系统$(2^U,\cap,\cup,\sim,L,H)$称为一个粗糙集代数,L,H 称为近似算子。其中,对$\forall X,Y\subseteq U$,有

(L_1) $LU=U$;

(L_2) $L(X\cap Y)=LX\cap LY$;

(H_1) $H\varphi=\varphi$;

(H_2) $H(X\cup Y)=HX\cup HY$。

定义 4　设 U 是一个非空有限集,$C=\{K\mid K\subseteq U\}$满足:(1)对$\forall K_i\in C$,有 $K_i\neq\varphi$;(2)$\bigcup_{K\in C}K=U$,称 C 为 U 的

---

* 收稿日期:2015-04-19　修回日期:2015-11-04　网络出版时间:2016-04-29 18:34
资助项目:国家自然科学基金(NO. 11161003;No. 11261006;No. 61472463;No. 61402064);福建省教育厅科技项目(No. JA15281)
作者简介:孔庆钊,男,讲师,博士研究生,研究方向为人工智能与优化,E-mail: kongqingzhao@163.com
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20160429.1834.016.html

一个覆盖,称(U,C)为基于覆盖的近似空间。对任意 $x\in U$,记 $st(x,U)=\{K\mid x\in K\}=\{K_x^1,K_x^2,\cdots,K_x^n\}$。若对这 n 个集合 $K_x^1,K_x^2,\cdots,K_x^n$ 能重新进行排序得到 $K_x^{i_1},K_x^{i_2},\cdots,K_x^{i_n}$,使得 $K_x^{i_1}\subseteq K_x^{i_2}\subseteq\cdots\subseteq K_x^{i_n}$,则称 C 为 U 的一个单调覆盖,称(U,C)为基于单调覆盖的近似空间。这里,记 $K_x^{\min}=K_x^1$。对任意 $x\in U$,记 $N(x)=\bigcap\{K\in C\mid x\in K\}$。

定义 5[12,15] 设(U,C)为基于覆盖的近似空间,对任意 $X\subseteq U$,记

(1) $\underline{C}_1(X)=\bigcup\{K\in C\mid K\subseteq X\}$,$\overline{C}_1(X)=\sim\underline{C}(\sim X)$;

(2) $\underline{C}_2(X)=\bigcup\{x\in U\mid N(x)\subseteq X\}$,$\overline{C}_2(X)=\{x\in U\mid N(x)\cap X\neq\varphi\}$,

则分别称$\underline{C}_i(X)$和$\overline{C}_i(X)$ $(i=1,2)$为 X 基于覆盖 C 的第 i 型下近似和上近似,称$\underline{C}_i$和$\overline{C}_i$ $(i=1,2)$为 X 基于覆盖 C 的第 i 型下近似算子和上近似算子。

若系统$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_i,\overline{C}_i)$满足定义 3,则称之为基于覆盖的第 i 型粗糙集代数。

2 基于覆盖的第 1 型粗糙集代数

2.1 基于一般覆盖的第 1 型粗糙集代数

在文献[16]中,作者系统论述了覆盖粗糙集的有关性质,基于文献[16],有如下结论。

定理 1[16] 设(U,C)为基于覆盖的近似空间,对任意 $X,Y\subseteq U$,有

(1) $\underline{C}_1(U)=\overline{C}_1(U)=U$, $\underline{C}_1(\varphi)=\overline{C}_1(\varphi)=\varphi$;

(2) $\underline{C}_1(X)\subseteq X\subseteq\overline{C}_1(X)$;

(3) $X\subseteq Y\Rightarrow\underline{C}_1(X)\subseteq\underline{C}_1(Y)$和$\overline{C}_1(X)\subseteq\overline{C}_1(Y)$;

(4) $\underline{C}_1(\underline{C}_1(X))=\underline{C}_1(X)$, $\overline{C}_1(\overline{C}_1(X))=\overline{C}_1(X)$。

根据定义 3,系统$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_1,\overline{C}_1)$在通常情况下能构成一个粗糙集代数吗?答案是否定的。下面举个例子来解释这个问题。

例 1 设 $U=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$,$K_1=\{x_1,x_2,x_3\}$,$K_2=\{x_4,x_5\}$,$K_3=\{x_3,x_4,x_5\}$,$K_4=\{x_3,x_5,x_6\}$,则 $C=\{K_1,K_2,K_3,K_4\}$为 U 的一个覆盖。

取 $X_1=\{x_3,x_4,x_5\}$,$Y_1=\{x_1,x_2,x_3\}$,则有$\underline{C}_1(X_1\cap Y_1)=\varphi$,而$\underline{C}_1(X_1)\cap\underline{C}_1(Y_1)=\{x_3\}$。所以$\underline{C}_1(X_1\cap Y_1)\neq\underline{C}_1(X_1)\cap\underline{C}_1(Y_1)$。

取 $X_2=\{x_1,x_2,x_6\}$,$Y_2=\{x_4,x_5,x_6\}$,则有$\overline{C}_1(X_2)\cup\overline{C}_1(Y_2)=\{x_1,x_2,x_4,x_5,x_6\}$,$\overline{C}_1(X_2\cup Y_2)=U$,所以$\overline{C}_1(X_2\cup Y_2)\neq\overline{C}_1(X_2)\cup\overline{C}_1(Y_2)$。

这样,根据例 1 和定义 3 知,系统$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_1,\overline{C}_1)$不构成粗糙集代数。

2.2 基于单调覆盖的第 1 型粗糙集代数

由例 1 知,系统$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_1,\overline{C}_1)$在通常情况下不构成一个粗糙集代数。原因是对任意 $X,Y\subseteq U$,等式$\underline{C}_1(X\cap Y)=\underline{C}_1(X)\cap\underline{C}_1(Y)$和$\underline{C}_1(X\cap Y)=\underline{C}_1(X)\cap\underline{C}_1(Y)$不成立。那么在什么条件下上面的等式成立呢?

定理 2 设(U,C)为基于单调覆盖的近似空间,对任意 $X,Y\subseteq U$,有

(1) $\underline{C}_1(X\cap Y)=\underline{C}_1(X)\cap\underline{C}_1(Y)$;

(2) $\overline{C}_1(X\cup Y)=\overline{C}_1(X)\cup\overline{C}_1(Y)$。

证明 (1)⇒由定理 1 显然可证。⇐对 $\forall x\in\underline{C}_1(X)\cap\underline{C}_1(Y)$,有 $x\in\underline{C}_1(X)$和 $x\in\underline{C}_1(Y)$,从而由定义 5 可以得到 $K_x^{\min}\subseteq X$ 和 $K_x^{\min}\subseteq Y$,这样就有 $K_x^{\min}\subseteq X\cap Y$,于是 $x\in\underline{C}_1(X\cap Y)$。

(2) 由(1)和定义 5 可得$\overline{C}_1(X\cup Y)=\sim\underline{C}_1(\sim(X\cup Y))=\sim\underline{C}_1(\sim X\cap\sim Y)=\sim(\underline{C}_1(\sim X)\cap\underline{C}_1(\sim Y))=\sim\underline{C}_1(\sim X)\cup\sim\underline{C}_1(\sim Y)=\overline{C}_1(X)\cup\overline{C}_1(Y)$。

由定义 3 和定理 2,有下面的结论:

定理 3 设(U,C)为基于单调覆盖的近似空间,则$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_1,\overline{C}_1)$构成粗糙集代数。

根据定义 3,定理 1 和定理 2 显然可得。

定理 4 设(U,C)为基于单调覆盖的近似空间,则$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_1\,\underline{C}_1,\overline{C}_1\ \overline{C}_1)$构成粗糙集代数。

证明 对 $\forall X,Y\subseteq U$,有下列性质:

(1)$\underline{C}_1(\underline{C}_1(U))=\underline{C}_1(U)=U$；

(2) 由定理1和定理2，有$\underline{C}_1(\underline{C}_1(X\cap Y))=\underline{C}_1(X\cap Y)=\underline{C}_1(X)\cap\underline{C}_1(Y)=\underline{C}_1(\underline{C}_1(X))\cap\underline{C}_1(\underline{C}_1(Y))$；

(3) 由定义5，有$\overline{C}_1(\overline{C}_1(X))=\overline{C}_1(\sim\underline{C}_1(\sim X))=\sim\underline{C}_1(\sim(\sim\underline{C}_1(\sim X)))=\sim\underline{C}_1(\underline{C}_1(\sim X))$，从而$\underline{C}_1\underline{C}_1$和$\overline{C}_1\overline{C}_1$构成一对对偶算子。

根据定义3，定理得证。　　证毕

仿定理4的证明，可得到下面的定理5。

定理5　设(U,C)为基于单调覆盖的近似空间，则$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_1\cdots\underline{C}_1,\overline{C}_1\cdots\overline{C}_1)$构成粗糙集代数。

3 基于覆盖的第2型粗糙集代数

3.1 基于一般覆盖的第2型粗糙集代数

同样基于文献[16]，有如下结论：

定理6[16]　设(U,C)为基于覆盖的近似空间，对任意$X,Y\subseteq U$，有

(1) $\underline{C}_2(U)=\overline{C}_2(U)=U$，$\underline{C}_2(\varphi)=\overline{C}_2(\varphi)=\varphi$；

(2) $\underline{C}_2(X)\subseteq X\subseteq\overline{C}_2(X)$；

(3) $X\subseteq Y\Rightarrow\underline{C}_2(X)\subseteq\underline{C}_2(Y)$和$\overline{C}_2(X)\subseteq\overline{C}_2(Y)$；

(4) $\underline{C}_2(\underline{C}_2(X))=\underline{C}_2(X)$，$\overline{C}_2(\overline{C}_2(X))=\overline{C}_2(X)$；

(5) $\underline{C}_2(X\cap Y)=\underline{C}_2(X)\cap\underline{C}_2(Y)$；$\overline{C}_2(X\cup Y)=\overline{C}_2(X)\cup\overline{C}_2(Y)$。

根据定义3，系统$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_2,\overline{C}_2)$在通常情况下能构成一个粗糙集代数吗？答案同样也是否定的。下面举个例子来回答这个问题。

例2　设$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_6\}$，$K_1=\{x_1,x_2,x_3\}$，$K_2=\{x_2,x_4\}$，$K_3=\{x_4,x_5\}$，$K_4=\{x_6\}$，则$C=\{K_1,K_2,K_3,K_4\}$为U的一个覆盖。

取$X=\{x_2,x_4,x_5\}$，则有$\overline{C}_2(X)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，$\sim\underline{C}_2(\sim X)=\{x_2,x_4,x_5\}$。显然$\overline{C}_2(X)\neq\sim\underline{C}_2(\sim X)$。所以$\underline{C}_2$和$\overline{C}_2$不是一对对偶算子。

从而，根据例1和定义3，系统$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_2,\overline{C}_2)$不构成粗糙集代数。

3.2 基于单调覆盖的第2型粗糙集代数

由定理6和例2知，系统$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_2,\overline{C}_2)$不构成粗糙集代数的原因不是因为等式$\underline{C}_2(X\cap Y)=\underline{C}_2(X)\cap\underline{C}_2(Y)$和$\overline{C}_2(X\cup Y)=\overline{C}_2(X)\cup\overline{C}_2(Y)$不成立，而是因为$\underline{C}_2$和$\overline{C}_2$不是一对对偶算子。那么在什么条件下$\underline{C}_2$和$\overline{C}_2$是一对对偶算子呢？

定理7　设(U,C)为基于单调覆盖的近似空间，则$\underline{C}_2$和$\overline{C}_2$是一对对偶算子。

证明　对$\forall X\subseteq U$，有$\forall x\in\sim\overline{C}_2(X)\Leftrightarrow x\notin\overline{C}_2(X)\Leftrightarrow K_x^{\min}\cap X=\varphi\Leftrightarrow K_x^{\min}\subseteq\sim X\Leftrightarrow x\in\underline{C}_2(\sim X)$，从而有$\overline{C}_2(X)=\sim\underline{C}_2(\sim X)$，所以$\underline{C}_2$和$\overline{C}_2$是一对对偶算子。　　证毕

根据定义3和定理7，有如下结论：

定理8　设(U,C)为基于单调覆盖的近似空间，则$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_2,\overline{C}_2)$构成粗糙集代数。

根据定义3，定理6和定理7显然可得。

定理9　设(U,C)为基于单调覆盖的近似空间，则$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_2\underline{C}_2,\overline{C}_2\overline{C}_2)$构成粗糙集代数。

仿定理4可证。

类似，也有下面的定理10。

定理10　设(U,C)为基于单调覆盖的近似空间，则$(2^U,\cap,\cup,\sim,\underline{C}_2\cdots\underline{C}_2,\overline{C}_2\cdots\overline{C}_2)$构成粗糙集代数。

4 结束语

经典的Pawlak粗糙集代数系统已经讨论得比较清楚，理论比较完善。而本文则在前人工作的基础上进一步讨论了覆盖的粗糙集代数系统。为了得到更为满意的性质，引入单调等价关系，讨论了基于单调等价关系的覆盖粗糙集代数的性质，得到了诸多漂亮的结论，丰富和完善了相关的理论。

参考文献：

[1] Comer S. An algebraic approach to the approach to the approximation of information[J]. Foundamenta Informaticae, 1991, 14: 492-502.

[2] Lin T Y, Liu Q. Rough approximate operators: axiomatic rough set theory[C]//In: Ziarko W. (ed.): Roughsets, fuzzy sets and knowledge discovery Springer. Berlin: Springer, 1994: 256-260.

[3] Pomykala J A. Approximation operations in approximation space[J]. Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Mathematics, 1987, 35: 653-662.

[4] Yao Y Y. Two views of the theory of rough sets in finite universes[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1996, 15: 291-317.

[5] Yao Y Y. Constructive and algebraic methods of the theory of rough sets[J]. Information Sciences, 1998, 109: 21-47.

[6] Wu W Z, Mi J S, Zhang W X. Generalized fuzzy rough sets [J]. Information Sciences, 2003, 151: 263-282.

[7] 吴伟志，张文修，徐宗本. 模糊粗糙集的构造与公理化方法[J]. 计算机学报，2004，27：197-203.
Wu W Z, Zhang W X, Xu Z B. Construction and axiom approaches of rough sets[J]. Journal of Computers, 2004, 27: 197-203.

[8] 徐优红. 模糊粗糙集代数[J]. 模糊系统与数学，2007，21：121-128.
Xu Y H. Fuzzy rough set algebra[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2007, 21: 121-128.

[9] Yang T, Li Q. Reduction about approximation spaces of covering generalized rough sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2010, 51: 335-345.

[10] Zhu W. Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering[J]. Information Sciences, 2009, 179: 210-225.

[11] Zhu W. Topological approaches to covering rough sets[J]. Information Sciences, 2007, 177(6): 1499-1508.

[12] Yao Y Y, Yao B X. Covering based rough set approximations[J]. Information Sciences, 2012, 200(1): 91-107.

[13] Xu W H, Zhang W X. Measuring roughness of generalized rough sets induced by a covering[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2007, 158: 2443-2455.

[14] 张文修，吴伟志，梁吉业，等. 粗糙集理论与方法[M]. 北京：科学出版社，2001.
Zhang W X, Wu W Z, Liang J Y, et al. Theory and approach of rough sets[M]. Beijing: Science Press, 2001.

[15] Zhu W, Wang F Y. On three types of covering rough sets [J]. IEEE Transactions on Knowledge Data Engineering, 2007, 19(8): 1131-1144.

[16] Oian K, Gao Y, Pei Z. On covering rough sets[C]//In: Yao J T et al. (Eds.): RSKT 2007, LNA 4481. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007: 4-41.

Covering-Based Rough Set Algebra

KONG Qingzhao[1,2], WEI Zengxin[3]

(1. College of Science, East China University of Science and Technology, Shanghai 200237;
2. College of Science, Jimei University, Xiamen Fujian 361021;
3. College of Mathematics and Information, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: It is well known that a rough set algebra is a set algebra with added dual pair of rough approximation operators. In this paper, the properties of two types of covering-based rough set algebra were discussed. It is shown that the two types of classical covering-based rough set algebra do not obsess good properties. To overcome the limitation, the concept of monotone covering was proposed. Furthermore, the properties of monotone covering-based rough set algebra were investigated and many excellent results were obtained.

Key words: covering; monotone; rough set algebra; approximation operator

（责任编辑　游中胜）