2016 年 9 月　　重庆师范大学学报(自然科学版)　　Sep. 2016
第 33 卷 第 5 期　　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　　Vol. 33 No. 5

DOI:10.11721/cqnuj20160523

混合 Cauchy-四次函数方程的 Ulam 稳定性*

宋爱民

(甘肃民族师范学院 数学系,甘肃 甘南 747000)

摘要:给出混合 Cauchy-四次函数方程 $f(x_1+x_2,2y_1+y_2)+f(x_1+x_2,2y_1-y_2)=4f(x_1,y_1+y_2)+4f(x_1,y_1-y_2)+24f(x_1,y_1)-6f(x_1,y_2)+4f(x_2,y_1+y_2)+4f(x_2,y_1-y_2)+24f(x_2,y_1)-6f(x_2,y_2)$ 的定义,并得到其一般解,同时,在 Banach 空间及 Non-Archimedean 赋范空间上讨论了它的 Ulam 稳定性。

关键词:混合 Cauchy-四次函数方程;Banach 空间;non-Archimedea 赋范空间;Ulam 稳定性

中图分类号:O177.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)05-0067-06

1 问题的提出

1940 年,Ulam[1]提出了函数方程的稳定性问题,研究了群同态的稳定性。Hyers[2]在 1941 年解决了 Banach 空间中近似可加映射的稳定性问题。1978 年,Rassias[3]将这种稳定性推广到广义 Hyers-Ulam 稳定性。后来人们研究了各种映射的 Hyers-Ulam 稳定性[4-6]。Radu[7]用不动点方法解决了 Hyers-Ulam 稳定性问题。之后,直接方法和不动点方法成为研究函数方程稳定性的重要方法。

本节设 X 和 Y 表示实向量空间。

称映射 $f:X\to Y$ 为 Cauchy 的,若其满足函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。Rassias[8]给出了四次函数方程的定义:

$$f(2x+y)+f(2x-y)=4f(x+y)+4f(x-y)+24f(x)-6f(y), \tag{1}$$

并研究了四次函数方程的稳定性。

四次函数方程与 Jordan-von Neumann 方程有非常密切的关系。Lee 和 Sung 等人[9]给出了四次函数方程的一般解。

引理 1 映射 $f:X\to Y$ 满足四次函数方程(1)的充分必要条件是存在一个对称的,双二次映射 $B:X^2\to Y$,使得 $f(x)=B(x,x)$,事实上

$$B(x,y)=\frac{1}{12}[f(x+y)+f(x-y)-2f(x)-2f(y)]。\tag{2}$$

近几年人们开始研究多元函数方程的稳定性,如 Chu,Ku 和 Park[10]研究了 n 元导子的每一个变量的 Ulam 稳定性,Bae 和 Park[11]研究了二元四次函数方程的一般解及其稳定性。

在上述研究的基础上,定义了混合 Cauchy-四次函数方程,并通过对四次函数方程的一般解的研究,得到了其一般解并证明了混合 Cauchy-四次函数方程的 Ulam 稳定性。

定义 1 映射 $f:X^2\to Y$ 称为混合 Cauchy-四次函数是指任给 $x_1,x_2,y_1,y_2\in X$ 都满足下列混合 Cauchy-四次函数方程

$$\begin{aligned}f(x_1+x_2,2y_1+y_2)+f(x_1+x_2,2y_1-y_2)=4f(x_1,y_1+y_2)+4f(x_1,y_1-y_2)+24f(x_1,y_1)-\\6f(x_1,y_2)+4f(x_2,y_1+y_2)+4f(x_2,y_1-y_2)+24f(x_2,y_1)-6f(x_2,y_2)。\end{aligned} \tag{3}$$

2 方程(3)的一般解

引理 2 映射 $f:X^2\to Y$ 满足方程(3)当且仅当 f 关于第一个变元是 Cauchy 的,关于第二个变元是四次的,

* **收稿日期**:2015-06-29　**修回日期**:2016-03-19　**网络出版时间**:2016-07-13 14:00

资助项目:甘肃省高等学校科研项目(No. 2015B-120)

作者简介:宋爱民,男,讲师,研究方向为算子代数及其应用,E-mail:songai-min@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160713.1400.020.html

即对任意的 $x_1,x_2,y_1,y_2\in X$ 都有:

$$f(x_1+x_2,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y),$$

$$f(x,2y_1+y_2)+f(x,2y_1-y_2)=4f(x,y_1+y_2)+4f(x,y_1-y_2)+24f(x,y_1)-6f(x,y_2)。$$

证明 充分性显然,下面证明必要性。

1) 首先证明 f 关于第二个变元是四次的。在(3)式中令 $x_1=x_2=y_1=y_2=0$,得 $f(0,0)=0$;若令 $x_2=y_1=y_2=0$,则显然有 $f(x_1,0)=0$。

在(3)式中,令 $x_1=x_2=0$,得

$$f(0,2y_1+y_2)+f(0,2y_1-y_2)=8f(0,y_1+y_2)+8f(0,y_1-y_2)+48f(0,y_1)-12f(0,y_2)。\tag{4}$$

在(4)式中令 $y_1=0$,得

$$5f(0,y_2)=7f(0,-y_2)。\tag{5}$$

在(4)式中令 $y_2=0$,得

$$f(0,2y_1)=32f(0,y_1)。\tag{6}$$

在(4)式中令 $y_1=y_2=y$,得

$$f(0,3y)-8f(0,2y)-35f(0,y)=0。\tag{7}$$

在(4)式中令 $y_1=y,y_2=2y$,得

$$f(0,4y)-8f(0,3y)+12f(0,2y)-48f(0,y)-8f(0,-y)=0。\tag{8}$$

又由(4)式可知

$$f(0,4y)=32f(0,2y)。\tag{9}$$

由(5)~(9)式可解得 $f(0,y)=0$。在方程(3)中令 $x_2=0$,由 $f(0,y)=0$ 可得:

$$f(x_1,2y_1+y_2)+f(x_1,2y_1-y_2)=4f(x_1,y_1+y_2)+4f(x_1,y_1-y_2)+24f(x_1,y_2)-6f(x_1,y_2),$$

即 f 关于第二个变元是四次的。

2) 下证 f 关于第一个变元是Cauchy的,在(3)式中令 $y_2=0$,得 $2f(x_1+x_2,2y_1)=32f(x_1,y_1)+32f(x_2,y_1)$,已证得 f 关于第二个变元是四次的,则有 $f(x_1+x_2,y_1)=f(x_1,y_1)+f(x_1,y_1)$,从而 f 关于第一个变元是Cauchy的。 证毕

定理1 映射 $f:X^2\to Y$ 满足方程(3)式当且仅当存在一个三元映射 $A:X^3\to Y$,使得对任意 $x,y\in X$,都有 $f(x,y)=A(x,y,y)$,其中 A 关于第一个变量是可加的,关于后两个变量是对称、二次的。

证明 先证充分性。由于 A 关于第一个变量是可加的,从而 f 关于第一个变元是可加的,又 A 关于后面两个变量是对称、二次的,由引理1可知,f 关于第二个变元是四次的,从而 f 满足方程(3)。

必要性。设 f 满足方程(3),定义 $A:X^3\to Y$,对 $\forall\, x,y,z\in X$ 有

$$A(x,y,z)=\frac{1}{12}[f(x,y+z)+f(x,y-z)-2f(x,y)-2f(x,z)]。$$

由前面引理1可知,固定 x,A 关于 y,z 是对称、二次的,固定 y,z,由于 f 关于第一个变元是Cauchy的,从而 A 关于第一个变元的可加的。显然,由 A 的定义有

$$A(x,y,y)=\frac{1}{12}[f(x,2y)+f(x,0)-2f(x,y)-2f(x,y)],$$

进一步,由于 f 关于第二个变元是四次的,从而有 $f(x,2y)=16f(x,y)$,$f(x,0)=0$。代入上式有

$$A(x,y,y)=\frac{1}{12}[16f(x,y)-4f(x,y)]=f(x,y),$$

结论得证。

对于映射 $f:X\to Y$,算子 $Df:X^2\to Y$,记

$$\begin{gathered}Df(x_1,x_2,y_1,y_2)=f(x_1+x_2,2y_1+y_2)+f(x_1+x_2,2y_1-y_2)-4f(x_1,y_1+y_2)-\\4f(x_1,y_1-y_2)-24f(x_1,y_1)+6f(x_1,y_2)-\\4f(x_2,y_1+y_2)-4f(x_2,y_1-y_2)-24f(x_2,y_1)+6f(x_2,y_2),\end{gathered}$$

显然 f 是Cauchy-四次的当且仅当 $\forall\, x_1,x_2,y_1,y_2\in X$,$Df(x_1,x_2,y_1,y_2)=0$。

3 方程(3)在 Banach 空间的 Ulam 稳定性

本节始终设 X 为实的向量空间,Y 为实的 Banach 空间。下面主要利用直接法证明函数方程(3)的 Ulam 稳定性。

定理 2　给定函数 $\varphi: X^4 \to [0,+\infty)$ 满足对任意的 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ 都有

$$\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{32^{n+1}} \varphi(2^n x_1, 2^n x_2, 2^n y_1, 2^n y_2) < \infty, \tag{10}$$

如果映射 $f: X^2 \to Y$ 满足对任意 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ 都有

$$\| Df(x_1, x_2, y_1, y_2) \| \leqslant 2\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2), \tag{11}$$

且当 $x=0$ 或 $y=0$ 时 $f(x,y)=0$,则存在唯一的满足方程(3)的 Cauchy-四次函数 $Q: X^2 \to Y$,满足对任意 $x, y \in X$ 有

$$\| f(x,y) - Q(x,y) \| \leqslant \Phi(x,x,y,0), \tag{12}$$

证明　在(11)式中令 $x_1 = x_2 = x, y_1 = y, y_2 = 0$,得 $\| 2f(2x,2y) - 64 f(x,y) \| \leqslant 2\varphi(x,x,y,0)$,两边同除以 64,得 $\left\| \frac{1}{32} f(2x,2y) - f(x,y) \right\| \leqslant \frac{1}{32} \varphi(x,x,y,0)$,用 $2^n x$ 代替 x,$2^n y$ 代替 y,再在两边同除以 32^n,得

$$\left\| \frac{1}{32^{n+1}} f(2^{n+1}x, 2^{n+1}y) - \frac{1}{32^n} f(2^n x, 2^n y) \right\| \leqslant \frac{1}{32^{n+1}} \varphi(2^n x, 2^n x, 2^n y, 0),$$

从而对任给正整数 $m<n$,有

$$\left\| \frac{1}{32^{n+m+1}} f(2^{n+m+1}x, 2^{n+m+1}y) - \frac{1}{32^n} f(2^n x, 2^n y) \right\| \leqslant \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{32^{n+i+1}} \varphi(2^{n+i}x, 2^{n+i}x, 2^{n+i}y, 0)。 \tag{13}$$

由(10)式可知$\left\{ \frac{1}{32^n} f(2^n x, 2^n y) \right\}$是 Y 中的 Cauchy 列,又 Y 是 Banach 空间,从而$\left\{ \frac{1}{32^n} f(2^n x, 2^n y) \right\}$收敛。记 $Q(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{32^n} f(2^n x, 2^n y)$。

下证 $Q: X^2 \to Y$ 为满足方程(3)的 Cauchy-四次函数方程。

在(11)式中,用 $2^n x_1, 2^n x_2, 2^n y_1, 2^n y_2$ 代替 x_1, x_2, y_1, y_2,且两边同时除以 32^n,得

$$\left\| \frac{1}{32^n} Df(2^n x_1, 2^n x_2, 2^n y_1, 2^n y_2) \right\| \leqslant \frac{2}{32^n} \varphi(2^n x_1, 2^n x_2, 2^n y_1, 2^n y_2),$$

由(10)式知 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{32^n} \varphi(2^n x_1, 2^n x_2, 2^n y_1, 2^n y_2) = 0$,所以令上式两边 $n\to\infty$,得 $DQ(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$,即 Q 是 Cauchy-四次函数。在(13)式中,取 $n=0, m\to\infty$,得

$$\| Q(x,y) - f(x,y) \| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{32^{i+1}} \varphi(2^i x, 2^i x, 2^i y, 0) = \Phi(x,x,y,0),$$

即(12)式得证。

下证 Q 的唯一性,设存在 Cauchy-四次函数 $Q': X^2 \to Y$ 也满足(12)式。又 Q' 是 Cauchy-四次函数,$\forall x, y \in X$,及任意正整数 n,有 $Q'(2^n x, 2^n y) = 32^n Q'(x,y)$。

从而有:

$$\| Q'(x,y) - Q(x,y) \| = \frac{1}{32^n} \| Q'(2^n x, 2^n y) - Q(2^n x, 2^n y) \| \leqslant$$

$$\frac{1}{32^n} \| Q'(2^n x, 2^n y) - f(2^n x, 2^n y) \| + \frac{1}{32^n} \| f(2^n x, 2^n y) - Q(2^n x, 2^n y) \| \leqslant \frac{2}{32^n} \Phi(2^n x, 2^n x, 2^n y, 0) =$$

$$2\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{32^{n+i+1}} \varphi(2^{n+i}x, 2^{n+i}x, 2^{n+i}y, 0) = 2\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{32^{i+1}} \varphi(2^i x, 2^i x, 2^i y, 0)。$$

由(10)式可知,$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{32^{i+1}} \varphi(2^i x, 2^i x, 2^i y, 0) = 0$。从而在上式令 $n\to\infty$,得 $Q'(x,y) = Q(x,y)$,唯一性得证。　　证毕

推论 1　设 $\theta, p_1, p_2, q_1, q_2$ 为非负实数,满足 $p_1 + p_2 + q_1 + q_2 \in (0,5)$,设 $f: X^2 \to Y$ 有

$$\|Df(x_1,x_2,y_1,y_2)\|\leqslant 2\theta(\|x_1\|^{p_1}\|x_2\|^{p_2}\|y_1\|^{q_1}\|y_2\|^{q_2}),\tag{14}$$

对 $\forall x_1,x_2,y_1,y_2\in X$ 成立,则 f 是一个 Cauchy-四次函数。

证明 令 $\varphi(x_1,x_2,y_1,y_2)=\theta(\|x_1\|^{p_1}\|x_2\|^{p_2}\|y_1\|^{q_1}\|y_2\|^{q_2})$,显然 φ 满足条件

$$\Phi(x_1,x_2,y_1,y_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{32^{n+1}}\varphi(2^nx_1,2^nx_2,2^ny_1,2^ny_2)<\infty。$$

在(14)式中,令 $x_1=x_2=y_1=y_2=0$,有 $f(0,0)=0$,若令 $x_2=y_1=y_2=0$,得 $f(x,0)=0$,进一步,若在(14)式中令 $x_1=x_2=0$,则由引理 2 可得 $f(0,y)=0$,定理 2 的条件满足,从而存在唯一的满足方程(3)的 Cauchy-四次函数 $Q:X^2\to Y$,且 $Q(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{32^n}f(2^nx,2^ny)$。

若在(14)式中令 $x_1=x_2=x,y_1=y,y_2=0$,则 $f(2x,2y)=32f(x,y)$,显然,通过不断递推,可以得到 $f(x,y)=\frac{1}{32^n}f(2^nx,2^ny)$,从而由定理 1 可得 $f\equiv Q$ 是 Cauchy-四次函数。 证毕

定理 3 给定函数 $\varphi:X^4\to[0,+\infty)$ 满足对任意的 $x_1,x_2,y_1,y_2\in X$ 都有:

$$\Phi(x_1,x_2,y_1,y_2)=\sum_{n=0}^{\infty}32^n\varphi\left(\frac{x_1}{2^{n+1}},\frac{x_2}{2^{n+1}},\frac{y_1}{2^{n+1}},\frac{y_2}{2^{n+1}}\right)<\infty,$$

如果映射 $f:X^2\to Y$ 满足对任意 $x_1,x_2,y_1,y_2\in X$ 都有 $\|Df(x_1,x_2,y_1,y_2)\|\leqslant 2\varphi(x_1,x_2,y_1,y_2)$,且当 $x=0$ 或 $y=0$ 时 $f(x,y)=0$,则存在唯一的满足方程(3)的 Cauchy-四次函数 $Q:X^2\to Y$,满足对任意 $x,y\in X$ 有

$$\|f(x,y)-Q(x,y)\|\leqslant\Phi(x,x,y,0)。$$

定理 3 可由定理 2 的证明过程直接得到。

4 方程(3)在 Non-Archimedean 空间的 Ulam 稳定性

在给出本节的主要结论之前,先回顾一下关于 Non-Archimedean 赋范空间的一些基本概念和结论。

1987 年,Hense[12]提出了 Non-Archimedean 空间,此后常在 Non-Archimedean 空间上研究函数方程的稳定性[13-15]。

定义 2 若域 K 上定义函数 $|\cdot|:K\to[0,\infty)$ 满足:1) $|r|=0\Leftrightarrow r=0$;2) $|rs|=|r||s|$;3) $|r+s|\leqslant\max\{|r|,|s|\}$。则称域 K 为 Non-Archimedean 域。

定义 3 X 为定义在$(K,|\cdot|)$上的线性空间,若$\|\cdot\|:X\to[0,\infty)$满足:

1) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$;

2) $\|rx\|=|r|\|x\|$;

3) $\|x+y\|\leqslant\max\{\|x\|,\|y\|\}$对 $\forall x,y\in X,r\in K$ 成立。

则称$(X,\|\cdot\|)$为 Non-Archimedean 赋范空间。

显然,对 Non-Archimedean 赋范空间有 $\|x_n-x_m\|\leqslant\max\{\|x_{j+1}-x_j\|;m\leqslant j\leqslant n-1\}(n\geqslant m)$,从而 Non-Archimedean 赋范空间中序列$\{x_n\}$为 Cauchy 的当且仅当$\{x_{n+1}-x_n\}$收敛到 0。

定理 4 给定函数 $\varphi:X^4\to[0,+\infty)$ 满足对任意的 $x_1,x_2,y_1,y_2\in X$ 都有

$$\Phi(x_1,x_2,y_1,y_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{|64||32|^n}\varphi(2^nx_1,2^nx_2,2^ny_1,2^ny_2)<\infty,\tag{15}$$

如果映射 $f:X^2\to Y$ 满足对任意 $x_1,x_2,y_1,y_2\in X$ 都有

$$\|Df(x_1,x_2,y_1,y_2)\|\leqslant\varphi(x_1,x_2,y_1,y_2),\tag{16}$$

且当 $x=0$ 或 $y=0$ 时有 $f(x,y)=0$,则存在唯一的满足方程(3)的 Cauchy-四次函数 $Q:X^2\to Y$,满足对任意 $x,y\in X$ 有

$$\|f(x,y)-Q(x,y)\|\leqslant\frac{1}{|64|}\sup\left\{\frac{1}{|32^j|}\varphi(2^jx,2^jx,2^jy,0),j\in\mathbf{N}\right\}。\tag{17}$$

证明 在(16)式中令 $x_1=x_2=x,y_1=y,y_2=0$,得$2f(2x,2y)-64f(x,y)\leqslant\varphi(x,x,y,0)$,两边同除以$|64|$,得$\left\|\frac{1}{32}f(2x,2y)-f(x,y)\right\|\leqslant\frac{1}{|64|}\varphi(x,x,y,0)$,用 2^nx 代替 x,2^ny 代替 y,再在两边同除以$|32|^n$,得:

$$\left\|\frac{1}{32^{n+1}}f(2^{n+1}x,2^{n+1}y)-\frac{1}{32^n}f(2^nx,2^ny)\right\|\leqslant\frac{1}{|64||32^n|}\varphi(2^nx,2^nx,2^ny,0),$$

从而对任给正整数 m,n，有

$$\left\|\frac{1}{32^{n+m+1}}f(2^{n+m+1}x,2^{n+m+1}y)-\frac{1}{32^n}f(2^nx,2^ny)\right\|\leqslant$$

$$\max\left\{\frac{1}{|64||32^{n+i}|}\varphi(2^{n+i}x,2^{n+i}x,2^{n+i}y,0),0\leqslant i\leqslant m\right\}。\tag{18}$$

由(15)式可知 $\left\{\frac{1}{32^n}f(2^nx,2^ny)\right\}$ 是 Y 中的 Cauchy 列，又 Y 是完备的 Non-Archimedean 赋范空间，从而 $\left\{\frac{1}{32^n}f(2^nx,2^ny)\right\}$ 收敛。记 $Q(x,y)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{32^n}f(2^nx,2^ny)$。

下证 $Q:X^2\to Y$ 为满足方程(3)的 Cauchy-四次函数方程。

在(16)式中，用 $2^nx_1,2^nx_2,2^ny_1,2^ny_2$ 代替 x_1,x_2,y_1,y_2，且两边同时除以 $|32|^n$，得

$$\left\|\frac{1}{32^n}Df(2^nx_1,2^nx_2,2^ny_1,2^ny_2)\right\|\leqslant\frac{1}{|32|^n}\varphi(2^nx_1,2^nx_2,2^ny_1,2^ny_2),$$

由(15)式知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{|32|^n}\varphi(2^nx_1,2^nx_2,2^ny_1,2^ny_2)=0$，所以令上式两边 $n\to\infty$，得 $DQ(x_1,x_2,y_1,y_2)=0$，即 Q 是 Cauchy-四次函数。

对 $\forall x\in X$ 及 $n\in\mathbf{N}$ 有：

$$\left\|\frac{1}{32^n}f(2^nx,2^ny)-f(x,y)\right\|=\left\|\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{32^{j+1}}f(2^{j+1}x,2^{j+1}y)-\frac{1}{32^j}f(2^jx,2^jy)\right\|\leqslant$$

$$\max\left\{\left\|\frac{1}{32^{j+1}}f(2^{j+1}x,2^{j+1}y)-\frac{1}{32^j}f(2^jx,2^jy)\right\|,0\leqslant j<n\right\}\leqslant$$

$$\frac{1}{|64|}\max\left\{\frac{1}{|32^j|}\varphi(2^jx,2^jx,2^jy,0),0\leqslant j<n\right\}。$$

令 $n\to\infty$，则有 $f(x,y)-Q(x,y)\leqslant\frac{1}{|64|}\sup\left\{\frac{1}{|32^j|}\varphi(2^jx,2^jx,2^jy,0),j\in\mathbf{N}\right\}$。

下证 Q 的唯一性，不妨设存在 Cauchy-四次函数 $Q':X^2\to Y$ 也满足(17)式。又 Q' 是 Cauchy-四次函数，$\forall x,y\in X$，及任意正整数 k，有 $Q'(2^kx,2^ky)=32^kQ'(x,y)$。从而

$$\|Q'(x,y)-Q(x,y)\|=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|32|^k}\|Q'(2^kx,2^ky)-Q(2^kx,2^ky)\|\leqslant$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|32|^k}\max\{\|Q'(2^kx,2^ky)-f(2^kx,2^ky)\|,\|f(2^kx,2^ky)-Q(2^kx,2^ky)\|\}\leqslant$$

$$\frac{1}{|64|}\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\max\left\{\frac{1}{|32^j|}\varphi(2^jx,2^jx,2^jy,0),k\leqslant j<n+k\right\}=$$

$$\frac{1}{|64|}\lim_{k\to\infty}\sup\left\{\frac{1}{|32^j|}\varphi(2^jx,2^jx,2^jy,0),j\in\mathbf{N},k\leqslant j<\infty\right\}=0。$$

得 $Q'(x,y)=Q(x,y)$，定理得证。　　证毕

参考文献：

[1] Ulam S M. Problem in modern mathematics[M]. New York:John Wiey & Sons,1940.

[2] Hyers D H. On the stability of the linear functional equation[J]. Proc Nat Acad Sci USA,1941,27:222-224.

[3] Rassias T M. On the stability of the linear mapping in Banach spaces[J]. Proc Amer Math Soc,1978,72(2):297-300.

[4] Baker J A. The stability of certain functional equations[J]. Proceedings of the American Mathematical Society,1991:729-732.

[5] Popa D. Hyers-Ulam-Rassias stability of a linear recurrence[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2005,309:591-597.

[6] Eskandani G Z,Gavruta P,Rassias J M. Generalized Hyers-Ulam stability for a general mixed functional equation in quasi-β-normed spaces[J]. Mediterr J Math,2011,8:331-348.

[7] Radu V. The fixed point alternative and the stability of

functional equations[J]. Fixed Point Theory, 2003, 4(1): 91- 96.

[8] Rassias J M. Solution of the Ulam stability problem for quartic mappings[J]. Glasnik Matemati ki, 1999, 34(2): 243- 252.

[9] Lee S H, Im S M, Hwang I S. Quartic functional equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 307(2): 387-394.

[10] Chu H Y, Ku S H, Park J S. Partial stabilities and partial derivations of n-variable functions[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2010, 72(3): 1531-1541.

[11] Park W G, Bae J H. On a bi-quadratic functional equation and its stability[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2005, 62(4): 643-654.

[12] Hensel K. Ubereine news Begrundung der theorie der algebraischen Zahlen[J]. Jahresber Deutsch Math Verein, 1897, 6: 83-88.

[13] Gordji M E, Savadkouhi M B. Stability of cubic and quadratic functional equations in non-Archimedean spaces[J]. Math Acta Appl, 2010, 110: 1321-1329.

[14] Brzdęk J, Ciepliński K. A fix point approach to the stability of functional equations in non-Archimedean metric spaces[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74: 6861-6867.

[15] Moslehian M S, Rassias T M. Stability of functional equations in non-Archimedean spaces[J]. Discrete Math Anal Appl, 2007(1): 325-334.

The Ulam Stability of Mixed Cauchy-quartic Functional Equation

SONG Aimin

(College of Mathematics, Gansu Normal University for Nationalities, Gannan Gansu 747000, China)

Abstract: In this paper, we defined the mixed Cauchy-quartic functional equation $f(x_1+x_2, 2y_1+y_2)+f(x_1+x_2, 2y_1-y_2)=4f(x_1, y_1+y_2)+4f(x_1, y_1-y_2)+24f(x_1, y_1)-6f(x_1, y_2)+4f(x_2, y_1+y_2)+4f(x_2, y_1-y_2)+24f(x_2, y_1)-6f(x_2, y_2)$, and obtain it general solution. Meanwhile, we proof the Ulam stability of Cauchy-quartic functional equation in Banach space and Non-Archimedean space.

Key words: Cauchy-quartic functional equation; Banach space; non-Archimedean space; Ulam stability

(责任编辑　黄　颖)