DOI:10.11721/cqnuj20160514

单位圆内无穷级代数体函数的强 Borel 点*

张　进
(德宏师范高等专科学校 数学系，云南 芒市 678400)

摘要:为了研究单位圆内无穷级代数体函数的强 Borel 点存在性问题,首先给出了单位圆内无穷级代数体函数的强 Borel 点及最大型 Borel 点的定义,通过建立的相关引理,进而证明得到了单位圆内无穷级代数体函数必存在强 Borel 点且其强 Borel 点必是其最大型 Borel 点及 Borel 点。

关键词:代数体函数;强 Borel 点;无穷级;单位圆

中图分类号:O174.52　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2016)05-0073-04

对于代数体函数的强 Borel 方向有过许多研究,如文献[1-2]中分别研究得到了复平面上有限正级、无穷级代数体函数至少存在一条强 Borel 方向;文献[3]讨论了复平面上零级代数体函数强 Borel 方向的存在性问题;文献[4]得到了复平面上无穷级代数体函数必存在最大型 Borel 方向。本文主要针对单位圆内无穷级代数体函数是否存在相应的强 Borel 点及最大型 Borel 点等问题进行了讨论。

假定 $\omega(z)$是单位圆$|z|<1$ 内由不可约方程

$$\psi(z,\omega)=A_v(z)\omega^v+A_{v-1}(z)\omega^{v-1}+\cdots+A_0(z)=0 \tag{1}$$

所确定的 v 值代数体函数。这里 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,v)$都是$|z|<1$ 内解析函数且在一点不同时为零。$\omega(z)$的单值定义域是一 Riemann 曲面$\widetilde{R}_z$,$\widetilde{R}_z$ 是 z 平面的 v 叶覆盖,$\widetilde{R}_z$ 上的点用$\tilde{z}$表示,$\tilde{z}$在 z 平面的投影是 z,$\widetilde{R}_z$ 对应$|z|<r$ 的部分记为$|\tilde{z}|<r$。令:

$$S(r,\omega)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{|\tilde{z}|<r}\left[\frac{|\omega'(z)|}{1+|\omega^2(z)|}\right]^2\mathrm{d}\sigma,\text{且 } T(r,\omega)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{S(t,\omega)}{t}\mathrm{d}t,$$

称 $T(r,\omega)$是 $\omega(z)$的球面特征函数,它与 Nevanlinna 特征函数仅相差一个有界量[5]。

$n(r,\widetilde{R}_z)$表示 $\omega(z)$在$|\tilde{z}|<r$ 的分支点的个数,分支点的级计算在内。令

$$N(r,\widetilde{R}_z)=\frac{1}{\nu}\int_0^r\frac{n(t,\widetilde{R}_z)-n(0,\widetilde{R}_z)}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{\nu}n(0,\widetilde{R}_z)\log r$$

由文献[5]可知:$N(r,\widetilde{R}_z)\leqslant 2(\nu-1)T(r,\omega)+O(1)$。

记 $\Delta(\theta_0,\varepsilon)=\{z||\arg z-\theta_0|<\varepsilon\}$,$\bar{\Delta}(\theta_0,\varepsilon)=\{z||\arg z-\theta_0|\leqslant\varepsilon\}$,$\widetilde{R}_z$ 在$\Delta(\theta_0,\varepsilon)$的部分记为$\tilde{\Delta}(\theta_0,\varepsilon)$,定义 $n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)$表示 $\omega(z)$在$\tilde{\Delta}(\theta_0,\varepsilon)\cap\{|\tilde{z}|<r\}$的 a 值点的个数,记重数。类似的,可定义 $n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\widetilde{R}_z)$,$N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)$及 $N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\widetilde{R}_z)$。$\omega(z)$的级定义为 $\rho=\overline{\lim\limits_{r\to1}}\dfrac{\log T(r,\omega)}{\log\dfrac{1}{1-r}}$,若 ρ 为零,正数,∞,则分别称 $\omega(z)$为零级,有限正级,无穷级代数体函数。

定义　设 $\omega(z)$是单位圆$|z|<1$ 内由(1)式所定义的 v 值无穷级代数体函数,若$\forall\varepsilon\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,对任何复数 a,有

$$\overline{\lim_{r\to1}}\frac{N(r,\Delta(\theta,\varepsilon),\omega=a)}{U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}>0 \tag{2}$$

* **收稿日期**:2015-10-18　**修回日期**:2016-06-18　**网络出版时间**:2016-07-13 14:03

资助项目:云南省教育厅科研项目基金(No. 2015Y581)

作者简介:张进,男,讲师,研究方向为函数论,E-mail:13578219676@163.com

网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20160713.1403.038.html

至多除去 $2v$ 个例外值,则称 $e^{i\theta}$ 是 $\omega(z)$ 的 ∞ 级强 Borel 点;若(2)式中 $N(r,\Delta(\theta,\varepsilon),\omega=a)$ 换为 $n(r,\Delta(\theta,\varepsilon),\omega=a)$,称 $e^{i\theta}$ 是 $\omega(z)$ 的 ∞ 级最大型 Borel 点。其中 $U\left(\frac{1}{1-r}\right)$ 是 $\omega(z)$ 的型函数(其定义见引理 1)。

1 相关引理

引理 1 设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义的 v 值无穷级代数体函数,则存在连续可微函数 $\rho(x)$,$U(x)$,满足以下条件:1) $\rho(x)$ 单调下降趋于 0,$\rho'(x)$ 单调上升;2) $\lim\limits_{x\to\infty} x\rho'(x)\log x\log\log x=0$;3) 对充分大的 x 有 $T(r,\omega)\ll U(x)=x^{e^{\frac{1}{\rho(x)}}}$;4) $U(X)<(1+o(1))U(x)$,$X=x+\frac{x\log x}{\log U(x)\log^2\log U(x)}$。其中 $x=\frac{1}{1-r}$,称 $U(x)$ 是 $\omega(z)$ 的型函数。

注 1 引理 1 由文献[6]中的引理 2 可得。

引理 2[7] 设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义的 v 值代数体函数,$a_1,a_2,\cdots,a_q(q>2)$ 是 ω 球面上相互判别的点,则对任意的 $\varphi,\delta,\delta'\left(0<\delta'<\delta<\frac{\pi}{2},0\leqslant\varphi<2\pi\right)$ 有 $(q-2)S(r,\bar{\Delta}(\varphi,\delta'),\omega)\leqslant\sum\limits_{j=1}^{q}n(R,\Delta(\varphi,\delta),a_j)+n(R,\Delta(\varphi,\delta),\tilde{R}_z)+o(U(x))$,其中 x,X 及 $\rho(x)$,$U(x)$ 如引理 1 所设,$R=1-1/X$。

引理 3 设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义的 v 值无穷级代数体函数,$m(m\geqslant4)$ 是正整数,令 $\theta_i=\frac{2\pi i}{m}$,$\Omega(\theta_i)=\{z\,|\,|\arg z-\theta_i|<2\pi/m\}(i=0,1,\cdots,m-1)$,则在这 m 个角域 $\{\Omega(\theta_i)\}$ 至少存在一个角域 $\Omega(\theta_i)$,使得对任意复数 a,有 $\overline{\lim\limits_{r\to1}}\frac{N(r,\Omega(\theta_i),\omega=a)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}>0$ 至多除去 $2v$ 个例外值。

证明 假设结论不成立,则对每一个 $\Omega(\theta_i)$,$i=0,1,\cdots,m-1$,至少存在 $q=2\nu+1$ 个值 $\{a_i^j\}|_{j=1}^{q}$,满足 $\overline{\lim\limits_{r\to1}}\frac{N(r,\Omega(\theta_i),\omega=a_i^j)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}=0$,则对 i,j 一致有

$$N(r,\Omega(\theta_i),\omega=a_i^j)=o(U(x))\left(x=\frac{1}{1-r}\right)。\tag{3}$$

设 $\theta_{i,k}=\frac{2\pi i}{m}+\frac{2\pi k}{\alpha m}$,$\alpha$ 是任意正整数,$0\leqslant k\leqslant\alpha-1$,记 $\Omega_{i,k}=\{z\,\|\,z|<R,\theta_{i,k}\leqslant\arg z<\theta_{i,k+1}\}$,则 $\{z\,\|\,z|<R\}=\bigcup_{k=0}^{\alpha-1}\bigcup_{i=0}^{m-1}\Omega_{i,k}$,因此必存在 $k(0\leqslant k\leqslant\alpha-1)$,不妨设 $k=0$,使得 $\sum\limits_{i=0}^{m-1}n(\Omega_{i,0},\tilde{R}_z)\leqslant\frac{1}{\alpha}n(R,\tilde{R}_z)$。记 $\bar{\Omega}_i=\left\{z\,|\,\frac{\theta_{i,0}+\theta_{i,1}}{2}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\theta_{i+1,0}+\theta_{i+1,1}}{2}\right\}$,$\Omega_i^0=\{z\,|\,\theta_{i,0}<\arg z<\theta_{i+1,0}\}$,则 $\bar{\Omega}_i\subset\Omega_i^0$。由于 $\bigcup_{i=0}^{m-1}\Omega_i^0$ 仅在 $\bigcup_{i=0}^{m-1}\Omega_{i,0}$ 上覆盖两次,故

$$\sum_{i=0}^{m-1}N(R,\Omega_i^0,\tilde{R}_z)\leqslant\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)N(R,\tilde{R}_z)+O(1)。\tag{4}$$

对 $\bar{\Omega}_i$,Ω_i^0 应用引理 2,得

$$(q-2)S(r,\bar{\Omega}_i,\omega)\leqslant\sum_{j=1}^{q}n(R,\Omega_i^0,a_i^j)+n(R,\Omega_i^0,\tilde{R}_z)+o(U(x))。\tag{5}$$

由于 $X=\frac{1}{1-R}$,$x=\frac{1}{1-r}$,$X=x+\frac{x\log x}{\log U(x)\log^2\log U(x)}$,计算可得 $\frac{\mathrm{d}r}{r}=\left(\frac{1}{r}\frac{\ln x}{\ln U(x)\ln^2\ln U(x)}+1\right)\frac{1}{1+o(1)\rho(x)}\frac{\mathrm{d}R}{R}$。对(5)式两边同除以 νr,对 r 从 $2r-1\left(r>r_0>\frac{1}{2}\right)$ 到 r 积分,结合引理 1,可得

$$(q-2)T(r,\bar{\Omega}_i,\omega)\leqslant\left(\frac{1}{2r-1}\frac{\ln x/2}{\ln U(x/2)\ln^2\ln U(x/2)}+1\right)\frac{1}{1-\rho(x/2)}\times$$
$$\left[\sum_{j=1}^{q}N(R,\Omega_i^0,a_i^j)+N(R,\Omega_i^0,\tilde{R}_z)\right]+(q-2)T(2r-1,\bar{\Omega}_i,\omega)+o(U(x))。\tag{6}$$

由引理 1,可得 $T(2r-1,\omega)\leqslant U(x/2)\leqslant(1/2)^{e^{\frac{1}{\rho(x/2)}}}U(x)=o(1)U(x)$,及

$$\left(\frac{1}{2r-1}\frac{\ln(x/2)}{\ln U(x/2)\ln^2\ln U(x/2)}+1\right)\frac{1}{1-\rho(x/2)}\to 1(r\to 1)。$$

故对(6)式中的 $i=0,1,\cdots,m-1$ 求和,结合(3),(4)及引理 1,可得

$$(q-2)T(r,\omega)\leqslant\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{2r-1}\frac{\ln x/2}{\ln U(x/2)\ln^2\ln U(x/2)}+1\right)\frac{1}{1-\rho(x/2)}N(R,\widetilde{R}_z)+o(U(X))+o(U(x))\leqslant$$

$$2(\nu-1)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{2r-1}\frac{\ln x/2}{\ln U(x/2)\ln^2\ln U(x/2)}+1\right)\frac{1}{1-\rho(x/2)}T(R,\omega)+o(U(x))。$$

上式两边同除以 $U(x)$,令 $r\to 1$ 取上极限,结合引理 1,可得 $q-2\leqslant 2(\nu-1)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$,让 $\alpha\to\infty$,可得 $q\leqslant 2\nu$,矛盾。

证毕

2 主要结果及证明

定理 1　设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义的 v 值无穷级代数体函数,则 $\omega(z)$ 必存在 ∞ 级强 Borel 点。

证明　由引理 3,对任意正整数 $m(m\geqslant 4)$,总存在一个角域不妨记为 $\Omega(\theta_m^0)$,使得对任意复数 a(至多有 2ν 个例外值 a),有 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{N(r,\Omega(\theta_m^0),\omega=a)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}>0$。由于 $\{\theta_m^0\}$ 有界,存在一收敛子列,仍记为 $\{\theta_m^0\}$,令 $\lim\limits_{m\to\infty}\theta_m^0=\theta_0$,则 $e^{i\theta_0}$ 即为 $\omega(z)$ 的 ∞ 级强 Borel 点。事实上,对给定的 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,当 m 充分大时,有 $\Omega(\theta_m^0)\subset\Delta(\theta_0,\varepsilon)$,如果存在至少 $2\nu+1$ 个例外值 a 满足 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}=0$,则 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{N(r,\Omega(\theta_m^0),\omega=a)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}=0$,矛盾。　证毕

推论 1　设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义的 v 值无穷级代数体函数,则 $\omega(z)$ 的强 Borel 点必是其最大型 Borel 点。

证明　由定理 1,设 $e^{i\theta_0}$ 是 $\omega(z)$ 的 ∞ 级强 Borel 点,则 $\forall\,\varepsilon\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,任意复数 a(至多有 2ν 个例外值 a),有 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}>0$。由于 $N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)=\dfrac{1}{\nu}\displaystyle\int_{r_1}^{r}\frac{n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{r}\mathrm{d}r+N(r_1,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)\leqslant\dfrac{1}{\nu}n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)\log\dfrac{r}{r_1}+c$,其中 $r_1(0<r_1<r<1)$,c 都是常数,上式同除以 $U\left(\frac{1}{1-r}\right)$,让 $r\to 1$ 取上极限,可得

$$0<\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}\leqslant\frac{1}{\nu}\log\frac{1}{r_1}\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}。$$

故 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}>0$,即 $e^{i\theta_0}$ 是 $\omega(z)$ 的最大型 Borel 点。　证毕

注 2　文献[7]中的结论即为本推论。

推论 2　设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义的 v 值无穷级代数体函数,则 $\omega(z)$ 的 ∞ 级强 Borel 点必是其 ∞ 级 Borel 点。

证明　由定理 1,设 $e^{i\theta_0}$ 是 $\omega(z)$ 的 ∞ 级强 Borel 点,则必有 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{\log n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{\log\frac{1}{1-r}}=\infty$,其中 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 是任意正数,a 是任意复数(至多有 2ν 个例外值 a),即 $e^{i\theta_0}$ 是 $\omega(z)$ 的 ∞ 级 Borel 点(可参见文献[8]中的定义 1 与定义 2)。否则,对于某个 $\varepsilon\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,存在 $q=2\nu+1$ 个值 $\{a_j\}_{j=1}^{q}$,存在 $\sigma>0$,当 $1>r>r_2>0$,对每一个 j 有 $n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)<\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}$,故

$$N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)=\frac{1}{\nu}\int_{r_2}^{r}\frac{n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)}{r}\mathrm{d}r+c=O\left(\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\sigma}\right)。$$

由上式，结合引理1，可得$\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}=0$，这与$e^{i\theta_0}$是$\omega(z)$的$\infty$级强Borel点矛盾。 证毕

参考文献：

[1] 陈特为.代数体函数的强Borel方向[J].华南师范大学学报：自然科学版，1990，34(1)：32-38.
Chen T W. The maximality Borel direction of algebroidal function[J]. Journal of South China Normal Univerisity: Natural Science Edition，1990，34(1)：32-38.

[2] 陈特为.无穷级代数体函数的强Borel方向[J].华南师范大学学报：自然科学版，1994(4)：70-76.
Chen T W. The maximality Borel direction of algebroidal function with infinite order of growth[J]. Journal of South China Normal Univerisity: Natural Science Edition，1994(4)：70-76.

[3] 甘会林，孙道椿.零级代数体函数的强Borel方向[J].数学物理学报，2005，25A(5)：673-677.
Gan H L，Sun D C. The maximality Borel direction of zero order algebroidal functions[J]. Acta Mathematica Scientia，2005，25A(5)：673-677.

[4] 李忠广.关于无穷级代数体函数的最大型Borel方向[J].怀化学院学报，2010，29(11)：9-14.
Li Z G. On the maximality Borel direction of algebroidal functions with infinite order[J]. Journal of Huaihua Univerisity，2010，29(11)：9-14.

[5] 何育赞，萧修治.代数体函数与常微分方程[M].北京：科学出版社，1988：87-102.
He Y Z，Xiao X Z. Algebroidal function and ordinary differential equation[M]. Beijing：Science Press，1988：87-102.

[6] 孙道椿. Nevanlinna方向的存在性定理[J].数学年刊，1986，7A(2)：212-221.
Sun D C. The theorem of existence of Nevanlinna direction[J]. Chinese Annals of Mathematice，7A(2)：212-221.

[7] 张洪申，吴昭君.单位圆内无限级代数体函数的Borel点[J].数学的实践与认识，2010，40(11)：180-185.
Zhang H S，Wu Z J. The Borel point of an infinite order algebroidalfunctions in unit circle[J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory，2010，40(11)：180-185.

[8] 刘慧芳，孙道椿.关于无穷级代数体函数的Borel点的一个结果[J].华南师范大学学报：自然科学版，2009，42(2)：5-8.
Lui H F，Sun D C. A result Borel point for algebroidal functions with infinite order[J]. Journal of South China Normal Univerisity：Natural Science Edition，2009，42(2)：5-8.

The Maximality Borel Point of Algebroidal Function with Infinite Order in Unit Circle

ZHANG Jin

(Department of Mathematics，Dehong Teacher Training College，Mangshi Yunnan 678400，China)

Abstract：In order to study existence problem about the maximality Borel point of algebroidal function with infinite order of growth in unit circle，we define the maximality Borel point and maximum Borel point of algebroidal function with infinite order of growth in unit circle firstly，by establishing correlative lemmas，then prove and gain that algebroidal function with infinite order of growth in unit circle must possess one maximality Borel point，and it's maximality Borel point must be it's maximum Borel point and Borel point.

Key words：algebroidal function；maximality Borel point；infinite order；unit circle

（责任编辑　许　甲）