DOI:10.11721/cqnuj20170104

自由边界问题的改进投影算法*

严月月,钟艳丽,张守贵
(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

摘要:【目的】自由边界问题在变分不等式中具有重要的应用,而很难用数值方法直接得到它的解。【方法】利用有限差分近似,得到该问题的一个新的投影不动点算法。【结果】将自由边界问题离散为一个标准的有限维线性互补问题,而该问题又等价于一个投影不动点问题。于是得到求解自由边界问题的改进投影算法,并给出了算法的具体过程。【结论】理论分析和数值结果都表明了所给算法的有效性。

关键词:自由边界;互补问题;投影法;五点差分
中图分类号:O241.82 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2017)01-0055-04

由于自由边界问题在区域内部是由关于未知函数的不等式、微分不等式及它们的等式构成,通常需要用数值方法求解[1]。目前主要采用有限差分法、有限元法等方法求解[2-5]。本研究利用五点差分法将自由边界问题离散为有限维线性互补问题,该线性互补问题可以转化为一个等价的不动点问题,由此可得到求解自由边界的改进投影方法[6-7],最后给出的数值试验印证了理论结果。

1 数学模型及其离散形式

如下所示的二维自由边界问题:

$$\begin{cases}-\Delta v(\boldsymbol{x})\geqslant\varphi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in\Omega,\\ v(\boldsymbol{x})\geqslant0,\boldsymbol{x}\in\Omega,\\ v(\boldsymbol{x})(-\Delta v(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))=0,\boldsymbol{x}\in\Omega,\\ v(\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in\Gamma,\end{cases}\tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 中的有界区域,其边界 $\Gamma=\partial\Omega$,φ 和 ψ 为已知函数。如果 $\varphi\in L^2(\Omega)$,$\psi\in L^2(\Gamma)$,则问题(1)有唯一解[1]。首先采用五点差分法对问题(1)中的微分算子离散化,向量函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ 表示 $v(\boldsymbol{x})$ 在网格节点上的近似,Δ 近似为 Δ_h,则可得到一个有限维的互补问题,再将有限维的互补问题代入区域 Ω 内的已知函数 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 和边界 Γ 上的已知函数 $\psi(\boldsymbol{x})$,则上述问题可改写为标准的线性互补问题[2-4]:

$$\boldsymbol{u}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q}\geqslant\boldsymbol{0},\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})=\boldsymbol{0}。\tag{2}$$

现在把区域 Ω 内部剖分为 N 个网格节点,则 $\boldsymbol{A}$ 为 N 阶方阵,$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 为 N 维列向量,向量 $\boldsymbol{q}$ 的元素依赖于边值 $\psi(\boldsymbol{x})$ 及右端项 $\varphi(\boldsymbol{x})$,并且它们都是已知的。特别地,本研究对差分算子 Δ_h 使用等步长的五点差分格式,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为对称正定稀疏矩阵。并且由文献[6-7]可知正定线性互补问题(2)等价于二次规划问题:寻找 N 维列向量 $\boldsymbol{u}$ 满足

$$\min\frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q},\mathrm{s.\,t.}\ \boldsymbol{u}\geqslant0,\tag{3}$$

且该二次规划问题存在唯一解 $\boldsymbol{u}^*$,因此线性互补问题(2)存在唯一解 $\boldsymbol{u}^*$。

2 改进投影算法和收敛性分析

对任意的 N 维实向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}_+^N$,引入投影算子 $[\boldsymbol{x}]_+=\begin{cases}x_i,x_i\geqslant0\\0,x_i\geqslant0\end{cases}$,则由文献[2-4,6-7]问题(2)等价于

---

* 收稿日期:2016-02-02 修回日期:2016-08-23 网络出版时间:2017-01-12 11:34
资助项目:重庆市科技计划项目(No. cstc2013jcyjA30001)
第一作者简介:严月月,女,研究方向微分方程数值解法,E-mail:498135923@qq.com;通信作者:张守贵,副教授,E-mail:shgzhang@cqnu.edu.cn
网络出版地址:http://www.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20170112.1134.038.html

$\boldsymbol{u}=[\boldsymbol{u}-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})]_+$。此问题又等价于求解函数 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}-[\boldsymbol{u}-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})]_+$ 的零点,其中 $\beta>0$。可由文献[6]得到求解自由边界问题的改进投影法,从而求得(2)式的数值解,具体算法如下:

第一步,任取初始点 $\boldsymbol{u}^{(0)}\in\mathbf{R}_+^N$,给定 $\eta\in(0,2)$,$\beta>0$,令 $n=0$;

第二步,由线性方程组 $\boldsymbol{u}^{(n+1)}=\boldsymbol{u}^{(n)}+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}+\boldsymbol{q})-\eta\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n+1)}+\boldsymbol{q})$,即 $(\boldsymbol{I}+\beta\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}^{(n+1)}=\boldsymbol{u}^{(n)}+\beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\eta\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)$,解得 $\boldsymbol{u}^{(n+1)}$;

第三步,给定判定条件,如果满足,则停止迭代得近似解 $\boldsymbol{u}^{(n+1)}$;否则令 $n=n+1$,返回第二步。

下面证明该算法的收敛性。

引理1 如果 $\boldsymbol{u}^*$ 是(2)式的解,则对任意的 $\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}_+^N$,有

$$\{\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\beta)-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})\}^{\mathrm{T}}\{[\boldsymbol{u}-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})]_+-\boldsymbol{u}^*\}\geqslant 0。\tag{4}$$

证明 记 $L=\{1,2,3,\cdots,N\}$,$I=\{i\,|\,u_i-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})_i>0\}$,则 $L\backslash I=\{i\,|\,u_i-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})_i\leqslant 0\}$。

当 $i\in I$ 时,有 $e(u_i,\beta)-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})_i=u_i-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})_i-[u_i-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})_i]_+=0$;

当 $i\in(L\backslash I)$,$e(u_i,\beta)-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})_i=u_i-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})_i\leqslant 0$,$[u_i-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})_i]_+-u_i^*=-u_i^*\leqslant 0$。

综上可得 $\{\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\beta)-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})\}^{\mathrm{T}}\{[\boldsymbol{u}-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})]_+-\boldsymbol{u}^*\}\geqslant 0$。 证毕

引理2 如果 $\boldsymbol{u}^*$ 是(2)式的解,则对 $\forall\,\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^N$,有

$$\{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\beta)\geqslant\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\beta)\|^2+\beta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)。$$

证明 因为 $\boldsymbol{u}^*$ 是(2)式的解,且 $[\boldsymbol{u}-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})]_+\geqslant 0$,根据(2)式可知

$$\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*+\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}\{[\boldsymbol{u}-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})]_+-\boldsymbol{u}^*\}\geqslant 0。\tag{5}$$

将(4),(5)式相加,并利用 $[\boldsymbol{u}-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q})]_+-\boldsymbol{u}^*=(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)-\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\beta)$ 有

$$[\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\beta)-\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)]^{\mathrm{T}}\{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)-\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\beta)\}\geqslant 0,$$

整理可得 $\{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\beta)\geqslant\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u},\beta)\|^2+\beta(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)$。 证毕

引理3 对 $\forall\,\boldsymbol{u}^*$ 是(2)式的解,本文算法产生的序列 $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}$ 满足:

$$\begin{aligned}&\|(\boldsymbol{u}^{(n+1)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n+1)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|^2\leqslant\|(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|^2-\\&\eta(2-\eta)\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)\|^2-2\eta\beta(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)。\end{aligned}\tag{6}$$

证明 因为 $(\boldsymbol{I}+\beta\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}^{(n+1)}=\boldsymbol{u}^{(n)}+\beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\eta\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)$,于是由引理2,有

$$\begin{aligned}&\|(\boldsymbol{u}^{(n+1)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n+1)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|^2=\|\boldsymbol{u}^{(n)}+\beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\eta\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)-\boldsymbol{u}^*-\beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*\|^2=\\&\|(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)-\eta\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)\|^2=\|(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|^2-\\&2\eta\{(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)+\eta^2\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)\|^2\leqslant\\&\|(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|^2-2\eta\{\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)\|^2+\beta(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\}+\eta^2\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)\|^2=\\&\|(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|^2-\eta(2-\eta)\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)\|^2-2\eta\beta(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)。\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵,于是由(6)式可知

$$\|(\boldsymbol{u}^{(n+1)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n+1)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|^2\leqslant\|(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|^2-c\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)\|^2,\tag{7}$$

其中 $c>0$ 是一个常数。

定理1 改进投影算法产生的序列 $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}$ 收敛于(2)式的一个解 $\boldsymbol{u}^*$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{u}^{(n)}=\boldsymbol{u}^*$。

证明 首先,由(7)式可知序列 $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}$ 是有界的,同样由(7)式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}c\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)\|^2\leqslant\|(\boldsymbol{u}^{(0)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(0)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|^2,$$

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)=0$。

设序列 $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}$ 收敛于 $\boldsymbol{u}^{**}$,因为 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)$ 是 $\boldsymbol{u}^{(n)}$ 的连续函数,所以 $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{**},\beta)=\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{(n)},\beta)=0$。则表明 $\boldsymbol{u}^{**}$ 是(2)式的一个解。

以下用反证法证 $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}$ 只有一个聚点,即 $\boldsymbol{u}^{**}=\boldsymbol{u}^*$。如果 $\boldsymbol{u}^{**}$ 是 $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}$ 的另一个聚点,记 $\delta=\|\boldsymbol{u}^{**}-\boldsymbol{u}^*\|$,由 $\boldsymbol{u}^*$ 是序列 $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}$ 的聚点,则存在 $n_0>0$,有 $\|(\boldsymbol{u}^{(n_0)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n_0)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|\leqslant\dfrac{\delta}{2}$。对 $\forall\,n>n_0$,由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的正定性知 $\langle\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*\rangle\geqslant 0$,且由(7)式知 $\|(\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*)+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|$ 单调递减,则

$$\|\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*\|\leqslant\|\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^*+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|\leqslant\|\boldsymbol{u}^{(n_0)}-\boldsymbol{u}^*+\beta(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{(n_0)}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^*)\|\leqslant\frac{\delta}{2}。$$

所以 $\|\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^{**}\|\geqslant\|\boldsymbol{u}^{**}-\boldsymbol{u}^{*}\|-\|\boldsymbol{u}^{(n)}-\boldsymbol{u}^{*}\|\geqslant\frac{\delta}{2}$，即 $\boldsymbol{u}^{**}$ 不可能是 $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}$ 的聚点，即 $\{\boldsymbol{u}^{(n)}\}$ 收敛于 $\boldsymbol{u}^{*}$。

另外，由(6)式可知 $1<\eta<2$ 时收敛性最佳。　　证毕

3 数值算例

用本文方法对一个具体问题进行数值测试。考虑在正方形区域 $\Omega=(-1.5,1.5)\times(-1.5,1.5)$ 中的如下问题 $\begin{cases}-\Delta v(\boldsymbol{x})+2\geqslant 0,\boldsymbol{x}\in\Omega\\ v(\boldsymbol{x})\geqslant 0,\boldsymbol{x}\in\Omega\\ v(\boldsymbol{x})(-\Delta v(\boldsymbol{x})+2)=0,\boldsymbol{x}\in\Omega\\ v(\boldsymbol{x})=\psi(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in\Gamma\end{cases}$，其中 Dirichlet 边界条件由解析解 $v=\begin{cases}\frac{r^2}{2}-\ln(r)-\frac{1}{2},r>1\\ 0,r\leqslant 1\end{cases}$ 确定，$r=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$。选取参数 $\beta=0.1$，$\eta=1.8$ 和迭代终止条件 $\|v^{(n+1)}-v^{(n)}\|_\infty\leqslant 10^{-4}\|v^{(n)}\|_\infty$。当取步长 $h=0.2$(即内部网格节点数为 $N=14\times 14$)时所得数值解结果如图 1 所示。文献[5]给出了离散形式的解析解，如图 2 所示。由图 1 看出，本文的数值解结果位于水平面上方，显然满足解的条件 $v\geqslant 0$，这与已知条件是一致的；而且它与文献[5]中的结果图 2 是吻合的。

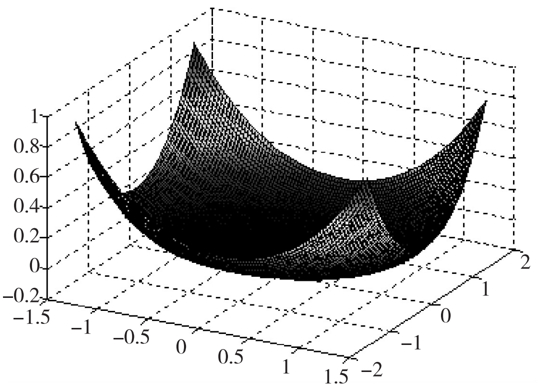

图 1　本文数值解

Fig. 1　Numerical results of this paper

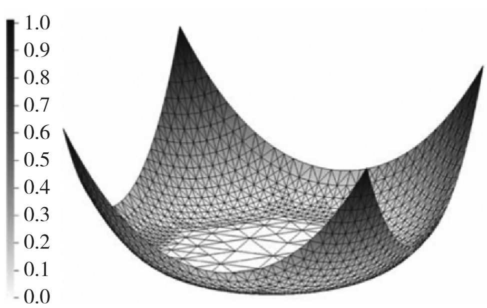

图 2　文献[5]中的数值解

Fig. 2　The numerical solution in Ref. [5]

为了进一步说明本文算法的有效性，记误差 $E(v)=\|v-v_h\|_\infty$，其中 v_h 是数值解。图 3 给出了误差随网格加密的变化情况。由图可知，该误差阶大约为 3，是超线性收敛的。另外，表 1 列出了误差与网格节点数 N、参数 η 的部分变化情况。由表 1 可见，在参数 η 不变的情况下，误差随着网格的加密而不断减小；而且在参数 η 取 1.8 时误差较小，收敛较快。

表 1　误差 $E(v)$ 随网格节点数 N 和参数 η 的变化情况

Tab. 1　Evolution of error $E(v)$ with respect to the number N and the parameters η

网格节点数 N	14×14	28×28	42×42	56×56
$\eta=0.5$	8.853 8e−05	2.542 9e−05	1.830 0e−05	1.499 5e−05
$\eta=1.0$	9.560 7e−05	9.015 1e−06	8.936 3e−06	1.093 5e−05
$\eta=1.2$	9.768 3e−05	9.798 5e−06	8.492 5 e−06	5.458 6e−06
$\eta=1.5$	9.951 0e−05	1.487 2e−05	8.382 8e−06	6.044 3e−06
$\eta=1.8$	1.038 9e−04	1.283 4e−05	4.264 6e−06	1.704 2e−06

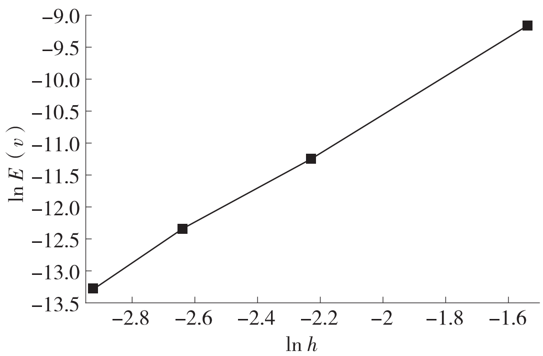

图 3　误差分析

Fig. 3　Error analysis

参考文献：

[1] 王耀东. 变分不等方程[M]. 北京：高等教育出版社，1987.
WANG Y D. Variational inequation[M]. Beijing: Higher Education Press, 1987.

[2] 张守贵. 求解自由边界问题的投影收缩算法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2015，32(2)：50-52.
ZHANG S G. A projection and contraction algorithm for the free boundary problem[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2013, 38(7): 15-19.

[3] 张守贵. 自由边界问题的线性互补投影迭代算法[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2013,38(7):15-19.
ZHANG S G. Onlinear complementarity-projection iterative algorithm for theseepage with free boundary problem[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition),2013,38(7):15-19.

[4] 张守贵. 自由边界问题的自适应预测-校正算法[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2014,39(9):1-5.
ZHANG S G. On a self-adaptive prediction-correct algorithm for free boundary problem[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition),2014,39(9):1-5.

[5] BRAESS D,CARSTENSEN C,HOPPE R H W. Convergence analysis of a conforming adaptive finite element method for an obstacle problem[J]. Numer Math,2007,107:455-471.

[6] 何炳生. 一类求解单调变分不等式的隐式方法[J]. 计算数学,1998,20(4):337-345.
HE B S. A class of implicit methods for monotone variational inequalities[J]. Mathematica Numerica Sinica,1998,20(4):337-345.

[7] 韩继业,修乃华,戚厚铎. 非线性互补理论与算法[M]. 上海:上海科学技术出版社,2006.
HAN J Y,XIU N H,QI H D. Nonlinear complementarity theory and algorithm[M]. Shanghai:Shanghai Science and Technology Press,2006.

An Improved Projection Algorithm for the Free Boundary Problem

YAN Yueyue, ZHONG Yanli, ZHANG Shougui
(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**] The free boundary problem plays an important application in variation inequalities and the solution is difficulty to be obtained directly by numerical methods. [**Methods**] For this problem, a new projection method is proposed for the numerical solution of the problem by using finite difference approximation. [**Findings**] The problem is discredited as a finite dimensional linear complementary problem which is equivalent to a projection fixed point problem. Then a projection method for the solution is obtained, and the process of algorithm is given in detail. [**Conclusions**] Both theoretical analysis and numerical results indicate efficiency of the method presented.

Keywords: free boundary; complementary problem; projection algorithm; five-point difference method

(责任编辑 黄 颖)