2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20170218

# 基于一般时间相关和位置相关的单机排序问题研究*

王 申 重

(郑州大学西亚斯国际学院 文理学院，河南 新郑 451150)

**摘要:**【目的】研究了工件加工时间、开工时间与所在位置相关的单机排序问题，以扩展这类问题的研究范围。【方法】工件加工时间是开工时间和所在位置的一般非增函数。工件开工时间越晚，加工位置越靠后，实际加工时间则越短。受相关论文的启发，对此问题用经典算法进行了讨论。【结果】目标函数为极小化最大完工时间和总完工时间的问题证明了 SPT 算法仍是最优算法。对极小化加权总完工时间问题分析了最坏竞争比；在正常加工时间和权重或工期存在特殊关系时对加权总完工时间和最大延迟问题证明了经典算法是最优的。【结论】对所研究的单机排序问题给出了若干结果。

**关键词:**排序；时间相关排序；位置相关排序；多项式时间算法

**中图分类号:**O223　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2017)02-0006-05

基于时间相关和位置相关的单机排序问题在多个领域有着广泛的应用前景，吸引着越来越多的专家和学者去研究这类问题。一般来说和时间相关的排序问题模型可分为两类：一类是工件的加工时间是非减函数，另一类是工件的加工时间是非增函数。和位置相关的排序问题中，工件的实际加工时间和所在位置有关，加工位置越靠后则实际加工时间越短。Ng 等人[1]研究了 3 个线性递减的时间相关的排序模型，对目标函数为最小化总完工时间的问题给出了多项式时间算法。Wang 和 Xia[2]研究了加工时间递减的线性退化模型，对最小化最大完工时间和最大延迟等问题给出了最好算法。Yang 和 Kuo[3]讨论了目标函数为最小化最大完工时间、总完工时间和完工时间的总绝对差的单机排序问题。高洁等人[4]研究了具有学习效应和退化效应的排序问题。在无资源约束的情况下，对目标函数为极小化最大完工时间、总完工时间等排序问题证明了都有多项式时间算法。胡晨晨等人[5]研究了具有学习效应和安装时间等的单机排序问题，对目标函数为极小化最大完工时间、总完工时间等排序问题，证明了上述问题具有最好算法。谢秋莲等人[6]研究了具有位置恶化及维修区间与加工时间相关的单机排序问题。Zhang 和 Yan[7]研究了工件实际加工时间与开工时间和位置相关的单机排序问题，证明了经典的 SPT 序对于最小化最大完工时间和总完工时间的问题仍是最优的。当工件的正常加工时间和工期满足一致关系时给出了多项式时间算法。张新功[8]在文献[7]的基础上继续研究了目标函数为最小化误工工件个数和总误工的问题，当工件的正常加工时间和工期满足一致关系时证明了多项式时间可解。

本研究把张新功等人[7-8]论文里的工件实际加工时间模型进行了一般化处理，即有关开工时间和所在位置的函数都是一般非增函数，从而扩展了这类问题的研究范围。

## 1 问题描述

假设所有工件(共 $n$ 个)均在零时刻准备就绪，并放在同一台机器上进行加工，1 次只能加工 1 个工件且在加工过程中不能中断。每个工件 $J_j$ 都有正常加工时间 $p_j$、权重 $w_j$ 和工期 $d_j$。工件 $J_j$ 开工时间为 $t$ 且排在第 $r$ 个位置加工的实际加工时间为 $p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)$，其中 $\alpha(t)$ 为开工时间的非增凸函数且满足 $0<\alpha(t)\leqslant 1$，$\alpha(0)=1$，$\alpha'(t)<0$，$\beta(r)$ 为加工所在位置的非增函数且满足 $0<\beta(r)\leqslant 1$，$\beta'(r)<0$。$C_j$ 和 $L_j$ 表示工件 $J_j$ 的完工时间和延迟，$C_{\max}=\max\{C_j \mid j=1,2,\cdots,n\}$ 表示时间表长，$L_{\max}=\max\{L_j=C_j-d_j \mid j=1,2,\cdots,n\}$ 表示最大延迟。目标函

* **收稿日期:**2016-04-03　　**修回日期:**2016-09-22　　**网络出版时间:**2017-03-13　11:06

**资助项目:**河南省高等学校重点科研项目(No. 15A510015)

**第一作者简介:**王申重，男，讲师，研究方向为组合最优化，E-mail:wangshenzhonglihui@163.com

**网络出版地址:**http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170313.1106.012.html

数为最小化最大完工时间、总完工时间、加权总完工时间和最大延迟，用经典的三参数表示法上面问题可表示为 $1|p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)|C_{\max}$，$1|p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)|\sum C_j$，$1|p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)|\sum w_jC_j$ 和 $1|p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)|L_{\max}$。

为了证明的需要,先给出下面的定义和引理。

**定义 1**　当工件的正常加工时间和它的权重满足 $p_i\leqslant p_j\Rightarrow w_i\geqslant w_j$ 时,称存在反一致关系。

**定义 2**　当工件的正常加工时间和它的工期满足 $p_i\leqslant p_j\Rightarrow d_i\leqslant d_j$ 时,称存在一致关系。

**引理 1**　设 $f(x)$是可微的凸函数,且 $a<b$,则有 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$,$a<\xi<b$。

由拉格朗日中值定理可知上式成立。

**引理 2**　设 $\alpha(t)$是非增凸函数且 $\alpha'(t)$在$[0,+\infty)$上是非减函数,则当 $0<k\leqslant 1$,$0<\lambda\leqslant 1$,$m>0$,$t_0>0$ 时,$(k-1)\alpha(t_0)+\lambda\alpha(t_0+mk)-\lambda k\alpha(t_0+m)\leqslant 0$ 成立。

**证明**　因 $\alpha(t)$是凸函数,所以对 $0<k\leqslant 1$,有 $\alpha[k(t_0+m)+(1-k)t_0]\leqslant k\alpha(t_0+m)+(1-k)\alpha(t_0)$成立。即 $\alpha(t_0+mk)\leqslant k\alpha(t_0+m)+(1-k)\alpha(t_0)$两边同乘以 $\lambda\in(0,1]$,有

$$\lambda\alpha(t_0+mk)\leqslant\lambda k\alpha(t_0+m)+\lambda(1-k)\alpha(t_0)\leqslant\lambda k\alpha(t_0+m)+(1-k)\alpha(t_0),$$

移项得$(k-1)\alpha(t_0)+\lambda\alpha(t_0+mk)-\lambda k\alpha(t_0+m)\leqslant 0$。　证毕

**引理 3**　设 $\alpha(t)$是非增凸函数且 $\alpha'(t)$在$[0,+\infty)$上是非减函数,当 $0<k\leqslant 1$,$0<\lambda\leqslant 1$,$m>0$,$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<1$,$t_0>0$ 时,$(k-1)\alpha(t_0)+\lambda\lambda_1\alpha(t_0+mk)-\lambda\lambda_2k\alpha(t_0+m)\leqslant 0$。

**证明**　在引理 2 证明过程中将 $\lambda$ 换为 $\lambda\lambda_1$,有

$$(k-1)\alpha(t_0)+\lambda\lambda_1\alpha(t_0+mk)\leqslant\lambda\lambda_1k\alpha(t_0+m)\leqslant\lambda\lambda_2k\alpha(t_0+m),$$

移项得$(k-1)\alpha(t_0)+\lambda\lambda_1\alpha(t_0+mk)-\lambda\lambda_2k\alpha(t_0+m)\leqslant 0$。　证毕

## 2 单机排序问题

### 2.1 极小化最大完工时间问题

**定理 1**　对于问题 $1|p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)|C_{\max}$,工件按照 $p_j$ 非减的顺序(SPT)排列即为最优序。

**证明**　假设 $S_1=\{\pi_1,J_i,J_j,\pi_2\}$是满足 $p_i\leqslant p_j$ 的序列,交换工件 $J_i$ 和 $J_j$ 的位置得一新序 $S_2=\{\pi_1,J_j,J_i,\pi_2\}$。$\pi_1$ 中有 $r-1$ 个工件,且第 $r-1$ 个工件的完工时间为 $t_0$,显然 $t_0>0$。故有

$$C_i(S_1)=t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r),C_j(S_1)=t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r)+p_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1),$$

$$C_j(S_2)=t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r),C_i(S_2)=t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r)+p_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1)。$$

则

$$\begin{gathered}C_j(S_1)-C_i(S_2)=\\ p_i\alpha(t_0)\beta(r)+p_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1)-p_j\alpha(t_0)\beta(r)-p_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1)=\\ \alpha(t_0)\beta(r)(p_i-p_j)+p_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1)-p_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1)=\\ p_j\beta(r)\left[\alpha(t_0)\left(\frac{p_i}{p_j}-1\right)+\alpha(t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r))\frac{\beta(r+1)}{\beta(r)}-\frac{p_i}{p_j}\alpha(t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r))\frac{\beta(r+1)}{\beta(r)}\right]。\end{gathered}$$

令$\dfrac{p_i}{p_j}=k$,$\dfrac{\beta(r+1)}{\beta(r)}=\lambda$,$p_j\alpha(t_0)\beta(r)=m$,$p_i\alpha(t_0)\beta(r)=mk$,则有 $0<k\leqslant 1$,$0<\lambda\leqslant 1$,$m>0$。

由引理 2 知 $C_j(S_1)-C_i(S_2)=p_j\beta(r)[(k-1)\alpha(t_0)+\lambda\alpha(t_0+mk)-\lambda k\alpha(t_0+m)]\leqslant 0$,所以$C_j(S_1)\leqslant C_i(S_2)$。工件 $J_i$ 和 $J_j$ 之前的工件在其交换位置后完工时间保持不变,工件 $J_i$ 和 $J_j$ 之后的工件在其交换位置后开工时间不会变小,故工件按照 $p_j$ 非减的顺序(SPT)排列即为最优序。　证毕

### 2.2 极小化总完工时间问题

**定理 2**　对于问题 $1|p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)|\sum C_j$,工件按照 $p_j$ 非减的顺序(SPT)排列即为最优序。

**证明**　$S_1=\{\pi_1,J_i,J_j,\pi_2\}$和 $S_2=\{\pi_1,J_j,J_i,\pi_2\}$的假设和定理 1 完全一致。在 $p_i\leqslant p_j$ 的前提下只需证 $C_j(S_1)\leqslant C_i(S_2)$和 $C_i(S_1)+C_j(S_1)\leqslant C_i(S_2)+C_j(S_2)$。$C_j(S_1)\leqslant C_i(S_2)$由定理 1 可证。

又因 $p_i\leqslant p_j$,所以$C_i(S_1)\leqslant C_j(S_2)$,$C_i(S_1)+C_j(S_1)\leqslant C_i(S_2)+C_j(S_2)$成立。故工件按照 $p_j$ 非减的顺序(SPT)排列即为最优序。　证毕

### 2.3 极小化加权总完工时间问题

**例** 公式 $p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)$ 里取 $\alpha(t)=1-0.1t$ 和 $\beta(r)=r^{-1}$，在零时刻开始加工。给出两个工件，即 $n=2$，$p_1=1$，$p_2=2$，$w_1=2$，$w_2=6$。对目标函数 $\sum w_jC_j$，按照WSPT序排列2个工件得到序列 $S_1:J_2\to J_1$。则 $C_2=2$，$C_1=2.4$，故 $\sum w_jC_j(S_1)=16.8$。交换两个工件的位置，得一新序 $S_2:J_1\to J_2$，则 $C_1=1$，$C_2=1.9$，故 $\sum w_jC_j(S_2)=13.4$。这个例子说明了对所给的工件按照WSPT序排列不是最优的。

**定理3** 对于问题 $1\mid p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)\mid\sum w_jC_j$，$\pi$ 和 $\pi^*$ 分别表示按照WSPT序得到的序列和最优序列。如果第一个工件的开工时间 $t_0=0$，则 $\rho=\dfrac{\sum w_jC_j(\pi)}{\sum w_jC_j(\pi^*)}\leqslant\dfrac{1}{\alpha(C_{\pi^*})\beta(n)}$，且这个界是紧的。

**证明** 设 $\pi=\{\pi(1),\pi(2),\cdots,\pi(n)\}$ 和 $\pi^*=\{\pi^*(1),\pi^*(2),\cdots,\pi^*(n)\}$ 分别表示按照WSPT序得到的序列和最优序列，$p_i$ 表示在 $\pi$ 中第 $i$ 个工件的正常加工时间，$p_{\pi(i)}$ 表示在 $\pi$ 中第 $i$ 个工件的实际加工时间，$p_{\pi^*(i)}$ 表示在 $\pi^*$ 中第 $i$ 个工件的实际加工时间，则对应的目标函数值可表示为：

$$\sum w_jC_j(\pi)=w_{\pi(1)}p_{\pi(1)}+w_{\pi(2)}(p_{\pi(1)}+p_{\pi(2)})+\cdots+w_{\pi(n)}(p_{\pi(1)}+p_{\pi(2)}+\cdots+p_{\pi(n)})\leqslant$$

$$\Big[w_{\pi(1)}p_1+w_{\pi(2)}(p_1+p_2)+\cdots+w_{\pi(n)}\sum_{i=1}^{n}p_i\Big]\beta(1)=\Big(\sum_{j=1}^{n}w_{\pi(j)}\sum_{i=1}^{j}p_i\Big)\beta(1)\leqslant\sum_{j=1}^{n}w_{\pi(j)}\sum_{i=1}^{j}p_i,$$

$$\sum w_jC_j(\pi^*)=w_{\pi^*(1)}p_{\pi^*(1)}+w_{\pi^*(2)}(p_{\pi^*(1)}+p_{\pi^*(2)})+\cdots+w_{\pi^*(n)}\sum_{i=1}^{n}p_{\pi^*(i)}\geqslant\Big(\sum_{j=1}^{n}w_{\pi(j)}\sum_{i=1}^{j}p_i\Big)\alpha(C_{\pi^*})\beta(n),$$

则 $\rho=\dfrac{\sum w_jC_j(\pi)}{\sum w_jC_j(\pi^*)}\leqslant\dfrac{1}{\alpha(C_{\pi^*})\beta(n)}$，其中 $C_{\pi^*}$ 为最优时间表长。

注意 $0<\beta(r)\leqslant1$，接下来给出这个界是紧的证明。

如果 $\beta(r)=1$ 和 $\alpha(t)=1$，则WSPT序即为总权完工时间问题的最优序列，因此这个界是紧的。 证毕

**定理4** 对于问题 $1\mid p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)\mid\sum w_jC_j$，当工件的正常加工时间和权重存在反一致关系即 $p_i\leqslant p_j\Rightarrow w_i\geqslant w_j$ 时，按照 $\dfrac{p_j}{w_j}$ 非减的顺序(WSPT)排列即为最优序。

**证明** 假设 $S_1=\{\pi_1,J_i,J_j,\pi_2\}$ 是满足 $\dfrac{p_i}{w_i}\leqslant\dfrac{p_j}{w_j}$ 的序列，交换工件 $J_i$ 和 $J_j$ 的位置得一新序 $S_2=\{\pi_1,J_j,J_i,\pi_2\}$。$\pi_1$ 中有 $r-1$ 个工件，且第 $r-1$ 个工件的完工时间为 $t_0$，显然 $t_0>0$。

$$C_i(S_1)=t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r),C_j(S_1)=t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r)+p_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1),$$

$$C_j(S_2)=t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r),C_i(S_2)=t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r)+p_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1),$$

$$w_iC_i(S_1)+w_jC_j(S_1)-w_iC_i(S_2)-w_jC_j(S_2)=w_ip_i\alpha(t_0)\beta(r)+w_jp_i\alpha(t_0)\beta(r)+$$

$$w_jp_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1)-w_jp_j\alpha(t_0)\beta(r)-w_ip_j\alpha(t_0)\beta(r)-w_ip_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1)=$$

$$\alpha(t_0)\beta(r)(p_i-p_j)(w_i+w_j)+w_jp_j\alpha[t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1)-w_ip_i\alpha[t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r)]\beta(r+1)=$$

$$p_j\beta(r)(w_i+w_j)\left[\alpha(t_0)\left(\frac{p_i}{p_j}-1\right)+\frac{w_j}{w_i+w_j}\alpha(t_0+p_i\alpha(t_0)\beta(r))\frac{\beta(r+1)}{\beta(r)}\right]-$$

$$p_j\beta(r)(w_i+w_j)\left[\frac{p_i}{p_j}\frac{w_i}{w_i+w_j}\alpha(t_0+p_j\alpha(t_0)\beta(r))\frac{\beta(r+1)}{\beta(r)}\right]。$$

令 $\dfrac{p_i}{p_j}=k$，$\dfrac{\beta(r+1)}{\beta(r)}=\lambda$，$p_j\alpha(t_0)\beta(r)=m$，$p_i\alpha(t_0)\beta(r)=mk$，$\dfrac{w_j}{w_i+w_j}=\lambda_1$，$\dfrac{w_i}{w_i+w_j}=\lambda_2$，则 $0<k\leqslant1$，$0<\lambda\leqslant1$，$m>0$，$0<\lambda_1\leqslant\lambda_2<1$，$w_iC_i(S_1)+w_jC_j(S_1)-w_iC_i(S_2)-w_jC_j(S_2)=p_j\beta(r)(w_i+w_j)[(k-1)\alpha(t_0)+\lambda\lambda_1\alpha(t_0+mk)-\lambda\lambda_2k\alpha(t_0+m)]\leqslant0$。

所以当工件的正常加工时间和权重存在一致关系时，按照 $\dfrac{p_j}{w_j}$ 非减的顺序(WSPT)排列即为最优序。 证毕

由定理4很容易证明下面的推论1成立。

**推论1** 对于问题 $1\mid p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r),w_j=kp_j\mid\sum w_jC_j$，工件按照 $p_j$ 非减的顺序(SPT)排列即为最优序。

### 2.4 极小化最大延迟问题

**定理 5**　对于问题 $1|p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)|L_{\max}$，当工件的正常加工时间和其工期存在一致关系即 $p_i\leqslant p_j\Rightarrow d_i\leqslant d_j$ 时，按照 $d_j$ 非减的顺序(EDD)排列即为最优序。

**证明**　假设 $S_1=\{\pi_1,J_i,J_j,\pi_2\}$ 是满足 $d_i\leqslant d_j$ 的序列，交换工件 $J_i$ 和 $J_j$ 的位置得一新序 $S_2=\{\pi_1,J_j,J_i,\pi_2\}$，其他假设和上面定理保持一致。

$$L_i(S_1)=C_i(S_1)-d_i,L_j(S_1)=C_j(S_1)-d_j,L_j(S_2)=C_j(S_2)-d_j,L_i(S_2)=C_i(S_2)-d_i,$$

由 $p_i\leqslant p_j\Rightarrow d_i\leqslant d_j$ 和定理 1、定理 2 知，$\max\{L_i(S_1),L_j(S_1)\}\leqslant\max\{L_i(S_2),L_j(S_2)\}$ 成立。

交换工件 $J_i$ 和 $J_j$ 后最大工期不会变小，所以当工件的正常加工时间和工期存在一致关系时，按照 $d_j$ 非减的顺序(EDD)排列即为最优序。　　证毕

由定理 5 很容易证明下面的推论 2 和推论 3 成立。

**推论 2**　对于问题 $1|p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r),p_j=p|L_{\max}$，工件按照 $d_j$ 非减的顺序(EDD)排列即为最优序。

**推论 3**　对于问题 $1|p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r),d_j=d|L_{\max}$，工件按照 $p_j$ 非减的顺序(SPT)排列即为最优序。

## 3 实例验证

为了更好地验证上面的结论，特给出如下实例。

取 $p_{jr}=p_j\alpha(t)\beta(r)\alpha(t)=1-0.02t$ 且 $\beta(r)=r^{-1}$，在零时刻开始加工。

**算例 1**　$n=5,p_1=4,p_2=2,p_3=6,p_4=8,p_5=10$，对目标函数 $C_{\max}$ 和 $\sum C_j$，按照 SPT 序排列 5 个工件得到序列 $S_1:J_2\to J_1\to J_3\to J_4\to J_5$，则 $C_2=2,C_1=3.92,C_3=5.76,C_4=7.53,C_5=9.23$，故 $C_{\max}(S_1)=9.23$，$\sum C_j(S_1)=28.44$。

任意交换两个工件的位置，不妨交换一下 $J_1$ 和 $J_2$，得一新序 $S_2:J_1\to J_2\to J_3\to J_4\to J_5$，则 $C_1=4$，$C_2=4.92,C_3=6.72,C_4=8.45,C_5=10.11$，故 $C_{\max}(S_2)=10.11$，$\sum C_j(S_2)=34.2$。

从上面的计算结果可以看出 $C_{\max}(S_1)<C_{\max}(S_2)$，$\sum C_j(S_1)<\sum C_j(S_2)$，验证完毕。

**算例 2**　$n=5,p_1=4,p_2=2,p_3=6,p_4=8,p_5=10,w_1=4,w_2=5,w_3=3,w_4=2,w_5=1$，对目标函数 $\sum w_jC_j$，按照 WSPT 序排列 5 个工件得到序列 $S_1:J_2\to J_1\to J_3\to J_4\to J_5$，则 $C_2=2,C_1=3.92,C_3=5.76$，$C_4=7.53,C_5=9.23$，故 $\sum w_jC_j(S_1)=67.25$。

任意交换两个工件的位置，不妨交换一下 $J_1$ 和 $J_2$，得一新序 $S_2:J_1\to J_2\to J_3\to J_4\to J_5$，则 $C_1=4$，$C_2=4.92,C_3=6.72,C_4=8.45,C_5=10.11$，故 $\sum w_jC_j(S_2)=87.77$。

从上面的计算结果可以看出 $\sum w_jC_j(S_1)<\sum w_jC_j(S_2)$，验证完毕。

**算例 3**　$n=5,p_1=6,p_2=4,p_3=9,p_4=12,p_5=15,d_1=4,d_2=3,d_3=9,d_4=10,d_5=14$，对于目标函数 $L_{\max}$，按照 EDD 序排列 5 个工件得到序列 $S_1:J_2\to J_1\to J_3\to J_4\to J_5$，则有 $C_2=4,L_2=1,C_1=6.76,L_1=2.76$，$C_3=9.35,L_3=0.35,C_4=11.79,L_4=1.79,C_5=14.08,L_5=0.08$。故 $L_{\max}(S_1)=2.76$。任意交换两个工件的位置，不妨交换一下 $J_1$ 和 $J_2$，得一新序 $S_2:J_1\to J_2\to J_3\to J_4\to J_5$，则有：

$C_1=6,L_1=2,C_2=7.76,L_2=4.76,C_3=10.29$，$L_3=1.29,C_4=12.67,L_4=2.67,C_5=14.91,L_5=0.91$，故 $L_{\max}(S_2)=4.76$。

从上面的计算结果可以看出 $L_{\max}(S_1)<L_{\max}(S_2)$，验证完毕。

## 4 结论

本文研究了工件实际加工时间是开工时间和所在位置的一般非增函数的单机排序问题。对极小化最大完工时间和总完工时间的问题给出了多项式时间算法；对极小化加权总完工时间的一般情形给出了最坏竞争比分析，特殊情形给出了多项式时间算法；对极小化最大延迟的问题的特殊情形也证明了多项式时间可解。极小化误工工件个数和总误工等问题可以作为进一步的研究方向和课题。

## 参考文献：

[1] NG C T, CHENG T C E, BACHMAN A, et al. Three scheduling problems with deteriorating jobs to minimize the total completion time[J]. Information Processing Letter, 2002, 81: 327-333.

[2] WANG J B, XIA Z Q. Scheduling jobs under decreasing linear deterioration[J]. Information Processing Letters, 2005, 94: 63-69.

[3] YANG D L, KUO W H. Some scheduling problems with deteriorating jobs and learning effects[J]. Computers and Industrial Engineering, 2010, 58: 25-28.

[4] 高洁，赵玉芳. 加工时间可控的单机排序问题[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版)，2014，32(4)：476-481.
GAO J, ZHAO Y F. Single-machine scheduling problem with controllable processing times[J]. Journal of Shenyang Normal University (Natural Science), 2014, 32(4): 476-481.

[5] 胡晨晨，赵玉芳. 同时带有安装时间和送出时间的单机排序问题[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版)，2015，33(3)：36-42.
HU C C, ZHAO Y F. Single machine scheduling problem with setup time and time of delivery[J]. Journal of Shenyang Normal University (Natural Science), 2015, 33(3): 36-42.

[6] 谢秋莲，张新功. 带有线性位置恶化及维修区间的单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2015，32(5)：38-43.
XIE Q L, ZHANG X G. Single machine scheduling with a linear position deterioration and rate-modifying maintenance[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2015, 32(5): 38-43.

[7] ZHANG X G, YAN G L, HUANG W Z, et al. Single-machine scheduling problems with time and position dependent processing times[J]. Annal of Operational Research, 2011, 186: 345-356.

[8] 张新功. 时间相关的单机排序的最坏竞争比分析[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2013，30(5)：5-10.
ZHANG X G. The worst-case performance ratio with time-dependent single-scheduling problems[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2013, 30(5): 5-10.

**Operations Research and Cybernetics**

# Study on Single Machine Scheduling Problem Based on General Time-and-position Dependent Jobs Processing Time

WANG Shenzhong

(School of Arts and Sciences, Sias College of Zhengzhou University, Xinzheng Henan 451150, China)

**Abstract**: [**Purposes**]It addresses single-machine scheduling problems with time and position dependent job processing times. [**Methods**]The processing time of a job is non-increasing function of its starting time and its position in the sequence. Inspired by the related papers, it discusses the classical algorithm. [**Findings**]It proves that the classical SPT (Shortest processing time) rule remains optimal to minimize the makespan or the total completion time. For problem of minimizing the total weighted completion time, it presents heuristic sequencing rules and analyzes the worst case bound for performance ratios. It also presents that these classical rules can be optimal under some special conditions between the normal processing times and job weights or due dates. [**Conclusions**] Some results on the single machine scheduling problem are given.

**Keywords**: scheduling; time-dependent scheduling; location-dependent scheduling; polynomial time algorithm

(责任编辑　黄　颖)