2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20170215

广义凸函数的结构理论*

赵　宇，黄金莹，康兆敏，方海文
(佳木斯大学 理学院数学系，黑龙江 佳木斯 154007)

摘要:【目的】对广义凸函数的性质研究，特别是建立可微前提下广义凸函数与其梯度相关的等价刻画，为函数广义凸性的判别及它在规划方面的应用提供理论依据。【方法】利用已有相关结果，通过建立广义凸函数与一元凸(拟凸)函数的等价关系，进而将凸(拟凸)函数的性质移植给广义凸函数。【结果】指出了 F 凸(拟凸)函数与凸(拟凸)函数之间的等价关系，进而给出可微 F 凸(拟凸)函数的与梯度相关的等价刻画。最后，作为应用，利用所得结果给出 GA-凸函数的若干判别方法。【结论】将凸分析的若干基本结果在广义凸函数方面做了统一推广，解决了可微 F 凸(拟凸)函数的判别问题。

关键词:F-G 广义凸函数;F 凸函数;F 拟凸函数;梯度;GA-凸函数

中图分类号:O174.13　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2017)02-0020-06

1 预备知识

对广义凸集及广义凸函数的研究可以拓宽优化理论和不等式研究的应用范围。研究广义凸理论的一个重要思路是建立广义凸性与凸性的联系，从而将凸性结果向广义凸性推广。

文献[1]给出广义凸结构的公理化概念及性质，并给出广义凸集概念和广义凸集的等价刻画。文献[2]在文献[1]的基础上建立了函数广义凸性与其上图及水平集的广义凸性之间的联系。文献[3-4]研究了 F-G 广义凸函数的性质。

凸函数有如下两个基本结果[5-6]。

1) f 是凸集 K 上的凸函数当且仅当 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\Phi(\lambda)=f[\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}]$是$[0,1]$上的凸函数。

2) f 在开凸集 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 上可微，则 f 是 K 上的凸函数当且仅当对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有

$$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla f(\boldsymbol{y})。\tag{1}$$

类似地，拟凸函数有如下两个基本结果[7-8]。

3) f 是 K 上的拟凸函数当且仅当 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\Phi(\lambda)=f[\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}]$是$[0,1]$上的拟凸函数。

4) f 在开凸集 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 上可微，则 f 是 K 上的拟凸函数当且仅当对 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，且有 $f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\boldsymbol{y})$时，有

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\nabla f(\boldsymbol{y})\leqslant 0。\tag{2}$$

文献[4]的推论 2.1 和推论 2.2 对上述结论 1)、3)做了一定推广，指出:若函数 $f:K\rightarrow D$ 是 F 凸(拟凸)函数，则 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,$\Phi(\lambda)=f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)]$是$[0,1]$上的凸(拟凸)函数。文献[9]的定理 1 和文献[10]的定理 1 将上述结论 1)、3)推广到预不变凸(拟凸)函数。对于结论 2)也已经推广到预不变凸函数上来，但对于诸如 GA-凸函数、P-凸函数、几何凸函数等具体广义凸函数还没有得到类似结果。

本文旨在将上述基本结果向广义凸函数做统一推广。

首先在文献[1-4]的基础上简化 F-G 广义凸函数概念，并给出广义凸函数的等价刻画(定理 1)，从而将上述基本结果 1)、3)统一推广到 F-G 广义凸函数。进一步将在可微的前提下，给出 F 凸函数与它的梯度相关的等价刻画(定理 4)，将上述基本结果 2)指出的(1)式推广到 F 凸函数上来，给出 F 拟凸函数与它的梯度相关的等价刻

* 收稿日期:2016-03-23　修回日期:2017-01-15　网络出版时间:2017-03-13 11:06

资助项目:佳木斯大学科学技术研究重点项目(No. 12Z1201517);黑龙江省教育厅科学技术研究项目(No. 12531684)

第一作者简介:赵宇，女，讲师，研究方向为凸分析与凸规划，E-mail:434794589@qq.com;通信作者:黄金莹，教授，E-mail:hjyshuxue@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170313.1106.018.html

画(定理 5)，将上述基本结果 4)指出的(2)式推广到 F 拟凸函数上来。

定义 1[1]　设非空集合 $K\subseteq \mathbf{R}^n$，向量值函数 $F: K\times K\times[0,1]\to \mathbf{R}^n$。称 F 是 K 上的广义凸结构，如果 F 满足以下 4 个条件：

1) 单点性。$\forall \lambda\in[0,1]$，$\forall \boldsymbol{x}\in K$，有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x},\lambda)=\boldsymbol{x}$；

2) 端点性。$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)\in K$，$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)\in K$；

3) 对 $\forall \alpha,\beta\in[0,1]$，且 $\alpha<\beta$，$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有：(a) 条件 P_1：当 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\beta)\in K$ 时，$F\left[\boldsymbol{y},F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\beta),1-\dfrac{\alpha}{\beta}\right]=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha)$；(b) 条件 P_2：当 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha)\in K$ 时，$F\left[\boldsymbol{x},F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\alpha),\dfrac{\beta-\alpha}{1-\alpha}\right]=F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\beta)$；

4) λ 连续性。F 关于 λ 在 $[0,1]$ 上连续。

引理 1[1]　设 F 是 K 上的广义凸结构，且 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u_1)\in K$，$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u_2)\in K$，其中 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，$u_1,u_2\in[0,1]$，则对 $\forall\lambda\in[0,1]$，有

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=F[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u_1),F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},u_2),\lambda]。\tag{3}$$

定义 2　设非空集合 $K\subseteq \mathbf{R}^n$，向量值函数 $F: K\times K\times[0,1]\to \mathbf{R}^n$，$F$ 是 K 上的广义凸结构。称 K 是关于 F 的凸集，如果 $\forall\lambda\in(0,1)$，$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\in K$。

约定：对于“$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的凸集”，这里的 D 代表 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(0,+\infty)$。“实值函数 $f: K\to D$”含义是“n 元函数 f 的定义域是 $K\subseteq \mathbf{R}^n$，值域含于 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(0,+\infty)$”。D 代表 $(-\infty,+\infty)$ 还是 $(0,+\infty)$ 要依据 G 的具体形式来确定。

定义 3[2]　设 $D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的凸集，称 G 在 D 上是正规的，如果 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall s_1,s_2,t_1,t_2\in D$，且 $s_1\leqslant s_2$，$t_1\leqslant t_2$，有 $G(s_1,t_1,\lambda)\leqslant G(s_2,t_2,\lambda)$，并且 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\forall s,t\in D$ 有 $\min\{s,t\}\leqslant G(s,t,\lambda)\leqslant \max\{s,t\}$。

定义 4[2]　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的凸集，$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的正规凸集，实值函数 $f: K\to D$ 满足条件：$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有 $f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),0]$，$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),1]$，称 f 是 K 上的 F-G 广义凸函数，如果 $\forall\lambda\in(0,1)$，$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),\lambda]。\tag{4}$$

在本文的叙述中，$f: K\to D$ 满足 $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有

$$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),0],\ f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)]\leqslant G[f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y}),1],$$

被简称为 $f: K\to D$ 具有 F-G 端点广义凸性。

2 广义凸函数的等价刻画

设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的凸集，$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的正规凸集，实值函数 $f: K\to D$ 具有 F-G 端点广义凸性，对任意固定的 $X,Y\in K$，构造函数

$$\Phi_{X,Y}(\lambda)=f[F(X,Y,\lambda)],\lambda\in[0,1]。\tag{5}$$

记 $[0,1]$ 上的一个广义凸结构 $C(u_1,u_2,\lambda)=\lambda u_1+(1-\lambda)u_2$，$\lambda,u_1,u_2\in[0,1]$。

在定义 4 中，将特取 $K=[0,1]$，$F(u_1,u_2,\lambda)=C(u_1,u_2,\lambda)$，$\lambda,u_1,u_2\in[0,1]$ 的 F-G 广义凸函数称作 C-G 广义凸函数。

定理 1　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的凸集，$D\subseteq\mathbf{R}$ 是关于 G 的正规凸集，$f: K\to D$ 具有 F-G 端点广义凸性，则 f 是 K 上的 F-G 广义凸函数当且仅当对任意的 $X,Y\in K$，$\Phi_{X,Y}(\lambda)$ 是 $[0,1]$ 上的 C-G 广义凸函数。

证明　必要性。任意取定 $X,Y\in K$，对 $\forall u_1,u_2\in[0,1]$，$\forall\lambda\in[0,1]$，根据(4)，(5)式及引理 1 给出的(3)式得：

$$\Phi_{X,Y}[C(u_1,u_2,\lambda)]=\Phi_{X,Y}(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)=f[F(X,Y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)]=$$
$$f\{F[F(X,Y,u_1),F(X,Y,u_2),\lambda]\}\leqslant G\{f[F(X,Y,u_1)],f[F(X,Y,u_2)],\lambda\}=G[\Phi_{X,Y}(u_1),\Phi_{X,Y}(u_2),\lambda]。$$

故 $\Phi_{X,Y}(\lambda)$ 是 $[0,1]$ 上的 C-G 广义凸函数。

充分性。构造

$$T^f_{X,Y}=\{\lambda\,|\,\lambda\in[0,1],f[F(X,Y,\lambda)]\leqslant G[f(X),f(Y),\lambda]\},\tag{6}$$

则由端点广义凸性知，$0,1\in T^f_{X,Y}\subseteq[0,1]$。设 $\forall u_1,u_2\in T^f_{X,Y}$，则由(6)式有：

$$\Phi_{X,Y}(u_2)=f[F(X,Y,u_2)]\leqslant G[f(X),f(Y),u_2],$$
$$\Phi_{X,Y}(u_1)=f[F(X,Y,u_1)]\leqslant G[f(X),f(Y),u_1],$$

因 $\Phi_{X,Y}(\lambda)$ 是 $[0,1]$ 上的 C-G 广义凸函数，对 $\forall u_1,u_2\in T^f_{X,Y}$，$\forall \lambda\in(0,1)$，就有

$$f[F(X,Y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)]=\Phi_{X,Y}(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)\leqslant G[\Phi_{X,Y}(u_1),\Phi_{X,Y}(u_2),\lambda]。\tag{7}$$

由 G 的正规性有：

$$G[\Phi_{X,Y}(u_1),\Phi_{X,Y}(u_2),\lambda]\leqslant G[G[f(X),f(Y),u_1],G[f(X),f(Y),u_2],\lambda]。\tag{8}$$

由引理1的(3)式有：

$$G[G[f(X),f(Y),u_1],G[f(X),f(Y),u_2],\lambda]=G[f(X),f(Y),\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]。\tag{9}$$

综合(7)～(9)式得 $f[F(X,Y,\lambda u_1+(1-\lambda)u_2)]\leqslant G[f(X),f(Y),\lambda u_1+(1-\lambda)u_2]$。这说明 $\forall u_1,u_2\in T^f_{X,Y}$，$\forall\lambda\in(0,1)$，都有 $\lambda u_1+(1-\lambda)u_2\in T^f_{X,Y}$，又 $0,1\in T^f_{X,Y}$，故必有 $T^f_{X,Y}=[0,1]$，$\bigcap\limits_{\forall X,Y\in K}T^f_{X,Y}=[0,1]$，即 $\forall\lambda\in(0,1)$，$\forall X,Y\in K$，有(4)式成立。　证毕

文献[3]中将特取 $G(s,t,\lambda)=\lambda s+(1-\lambda)t$ 和 $G(s,t,\lambda)=\max\{s,t\}$，$\forall s,t\in\mathbf{R}$ 的 F-G 广义凸函数分别称为 F 凸函数和 F 拟凸函数，根据定理1有定理2和定理3。

定理2　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 满足：$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有 $f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)]\leqslant f(\boldsymbol{y})$，$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)]\leqslant f(\boldsymbol{x})$，则 f 是 K 上的 F 凸函数当且仅当 $\forall X,Y\in K$，$\Phi_{X,Y}(\lambda)$ 是 $[0,1]$ 上的凸函数。

定理3　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的凸集，$f:K\to\mathbf{R}$ 满足：$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有

$$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)]\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\},f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)]\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\},$$

则 f 是 K 上的 F 拟凸函数当且仅当 $\forall X,Y\in K$，$\Phi_{X,Y}(\lambda)$ 是 $[0,1]$ 上的拟凸函数。

在定理2的基础上，将“$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)]\leqslant f(y)$，”加强为“$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)\leqslant\boldsymbol{y}$”，在函数可微的前提下，可以得到下述 F 凸函数与其梯度相关的等价刻画。

定理4　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的开凸集，F 关于 λ 在 $[0,1]$ 上可微，$f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上可微且满足：$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$，有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)=\boldsymbol{y}$，$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)]\leqslant f(\boldsymbol{x})$，则 f 是 K 上的 F 凸函数当且仅当对 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$ 有

$$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{y})+F'_\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\big|^T_{\lambda=0}\nabla f(\boldsymbol{y})。\tag{10}$$

证明　必要性。f 是 K 上的 F 凸函数，根据定理2，$\forall X,Y\in K$，$\Phi_{X,Y}(\lambda)=f[F(X,Y,\lambda)]$ 是 $[0,1]$ 上的凸函数。由 f 及 F 的可微性可知，$\Phi_{X,Y}(\lambda)$ 在 $[0,1]$ 上可微，故对 $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$，有

$$\Phi_{X,Y}(\beta)\geqslant\Phi_{X,Y}(\alpha)+\Phi'_{X,Y}(\alpha)(\beta-\alpha)。\tag{11}$$

因为 $\Phi'_{X,Y}(\alpha)=F'_\lambda(X,Y,\lambda)\big|^T_{\lambda=\alpha}\nabla f[F(X,Y,\alpha)]$，于是(11)式改写为

$$f[F(X,Y,\beta)]\geqslant f[F(X,Y,\alpha)]+F'_\lambda(X,Y,\lambda)\big|^T_{\lambda=\alpha}\nabla f[F(X,Y,\alpha)](\beta-\alpha)。\tag{12}$$

在(12)式中令 $\alpha=0,\beta=1$，并注意到 $f[F(X,Y,0)]=f(Y)$，$f[F(X,Y,1)]\leqslant f(X)$，就有

$$f(X)\geqslant f(Y)+F'_\lambda(X,Y,\lambda)\big|^T_{\lambda=0}\nabla f(Y),$$

从而(10)式成立。

充分性。对 $\forall X,Y\in K$，$\forall\alpha,\beta\in[0,1]$，令 $\boldsymbol{x}=F(X,Y,\beta)$，$\boldsymbol{y}=F(X,Y,\alpha)\in K$，代入到(10)式得

$$f[F(X,Y,\beta)]\geqslant f[F(X,Y,\alpha)]+F'_\lambda[F(X,Y,\beta),F(X,Y,\alpha),\lambda]\big|^T_{\lambda=0}\nabla f[F(X,Y,\alpha)]。$$

由引理1的(3)式知，$F[F(X,Y,\beta),F(X,Y,\alpha),\lambda]=F[X,Y,\lambda\beta+(1-\lambda)\alpha]$，从而

$$F'_\lambda[F(X,Y,\beta),F(X,Y,\alpha),\lambda]\big|^T_{\lambda=0}=F'_\lambda[X,Y,\lambda\beta+(1-\lambda)\alpha]\big|^T_{\lambda=0}=F'_\lambda(X,Y,\lambda)\big|^T_{\lambda=\alpha}(\beta-\alpha)。$$

于是有

$$f[F(X,Y,\beta)]\geqslant f[F(X,Y,\alpha)]+F'_\lambda(X,Y,\lambda)\big|^T_{\lambda=\alpha}\nabla f[F(X,Y,\alpha)](\beta-\alpha)。$$

令 $\Phi_{X,Y}(\lambda)=f[F(X,Y,\lambda)]$，上式即为 对 $\forall X,Y\in K$，$\forall\alpha,\beta\in[0,1]$，有

$$\Phi_{X,Y}(\beta)\geqslant\Phi_{X,Y}(\alpha)+\Phi'_{X,Y}(\alpha)(\beta-\alpha)。$$

从而 $\Phi_{X,Y}(\lambda)=f[F(X,Y,\lambda)]$ 是 $[0,1]$ 上的凸函数，根据定理2知 f 是 K 上的 F 凸函数。　证毕

利用关于拟凸函数的已有结果，即可微函数的拟凸性与(2)式的等价性，并与定理3结合可以得到如下关于 F 拟凸函数的梯度形式等价刻画。

定理5　设 $K\subseteq\mathbf{R}^n$ 是关于 F 的开凸集，F 关于 λ 在 $[0,1]$ 上可微，$f:K\to\mathbf{R}$ 在 K 上可微且满足：$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$ 有 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},0)=\boldsymbol{y}$，$f[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},1)]\leqslant\max\{f(\boldsymbol{x}),f(\boldsymbol{y})\}$，则 f 是 K 上的 F 拟凸函数当且仅当对 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$ 且有 $f(\boldsymbol{x})\leqslant$

$f(\boldsymbol{y})$时,有

$$F'_\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\big|_{\lambda=0}^{T}\nabla f(\boldsymbol{y})\leqslant 0。\tag{13}$$

证明 必要性。因 f 是 K 上的 F 拟凸函数,故 $\forall X,Y\in K$,$\Phi_{X,Y}(\lambda)$是$[0,1]$上的拟凸函数。

设 $f(X)\leqslant f(Y)$,则有 $f[F(X,Y,1)]\leqslant f(Y)=f[F(X,Y,0)]$,即 $\Phi_{X,Y}(1)\leqslant\Phi_{X,Y}(0)$。由(2)式知$(1-0)\Phi'_{X,Y}(0)\leqslant 0$。因$\Phi'_{X,Y}(0)=F'_\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\big|_{\lambda=0}^{T}\nabla f(\boldsymbol{y})$,故$F'_\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\big|_{\lambda=0}^{T}\nabla f(\boldsymbol{y})\leqslant 0$。

充分性。只需证$\forall X,Y\in K$,$\Phi_{X,Y}(\lambda)=f[F(X,Y,\lambda)]$为$[0,1]$上的拟凸函数。

设$\forall\alpha,\beta\in[0,1]$,且 $\Phi_{X,Y}(\beta)\leqslant\Phi_{X,Y}(\alpha)$,令 $\boldsymbol{x}=F(X,Y,\beta)$,$\boldsymbol{y}=F(X,Y,\alpha)\in K$,则有 $f[F(X,Y,\beta)]\leqslant f[F(X,Y,\alpha)]$,从而$F'_\lambda[F(X,Y,\beta),F(X,Y,\alpha),\lambda]\big|_{\lambda=0}^{T}\nabla f[F(X,Y,\alpha)]\leqslant 0$,即

$$F'_\lambda(X,Y,\lambda)\big|_{\lambda=\alpha}^{T}\nabla f[F(X,Y,\alpha)](\beta-\alpha)\leqslant 0,\Phi'_{X,Y}(\alpha)(\beta-\alpha)\leqslant 0,$$

由(2)式知 $\Phi_{X,Y}(\lambda)=f[F(X,Y,\lambda)]$为$[0,1]$上的拟凸函数。 证毕

注 1 只需令 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=\lambda\boldsymbol{x}+(1-\lambda)\boldsymbol{y}$,即可看出定理 2 与定理 4 是本文开篇叙述的凸函数中的两个基本结果 1),2)的推广。同时定理 3 与定理 5 是本文开篇叙述的拟凸函数的两个基本结果 3),4)的推广。

注 2 约定:在向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$,当 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n_{++}$($\boldsymbol{x}$ 的每一个分量都是正数)时,记 $\ln\boldsymbol{x}=(\ln x_1,\ln x_2,\cdots,\ln x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{x}^r=(x_1^r,x_2^r,\cdots,x_n^r)^{\mathrm{T}}$。由于预不变凸函数、$GA$-凸函数、$P$-凸函数分别是特取 $F=\boldsymbol{y}+\lambda\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,$F=\boldsymbol{x}^\lambda\boldsymbol{y}^{1-\lambda}$和 $F=(\lambda\boldsymbol{x}^p+(1-\lambda)\boldsymbol{y}^p)^{\frac{1}{p}}$的 F 凸函数,相应可求得$F'_\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)\big|_{\lambda=0}^{T}$的形式分别为$[\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^{\mathrm{T}}$,$[\boldsymbol{y}(\ln\boldsymbol{x}-\ln\boldsymbol{y})]^{\mathrm{T}}$ 和$\dfrac{1}{p}[\boldsymbol{y}^{1-p}(\boldsymbol{x}^p-\boldsymbol{y}^p)]^{\mathrm{T}}$,分别代入到(10)式中可得到一些具体广义凸函数的梯度刻画,以 GA-凸函数为例,其具体定义如下。

设 $K\subseteq\mathbf{R}^n_{++}$是几何凸集,函数 $f(\boldsymbol{x})$为 K 上的实值函数。称函数 $f(\boldsymbol{x})$为 K 上的 GA-凸函数,如果对$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$和 $\lambda\in(0,1)$有 $f(\boldsymbol{x}^\lambda\boldsymbol{y}^{1-\lambda})\leqslant\lambda f(\boldsymbol{x})+(1-\lambda)f(\boldsymbol{y})$。

相应有如下结论:设 $K\subseteq\mathbf{R}^n_{++}$是开的几何凸集,$f:K\to\mathbf{R}$ 可微,则 f 为 K 上的 GA-凸函数当且仅当对$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,有

$$f(\boldsymbol{x})\geqslant f(\boldsymbol{y})+[\boldsymbol{y}(\ln\boldsymbol{x}-\ln\boldsymbol{y})]^{\mathrm{T}}\nabla f(\boldsymbol{y})。\tag{14}$$

3 应用举例

仅就 F 凸函数而言,前面利用定理 1 推导出定理 2,进而得到 F 凸函数的与梯度相关的充要条件,即定理 4,作为进一步的应用,注 2 中指明特取 F 的一系列形式可得到一些具体广义凸函数的梯度刻画。事实上,目前 F 凸函数的特例以及能够通过复合变换的手法转化为 F 凸函数的一些具体广义凸函数都可得到类似的等价刻画。

将这些刻画与凸函数的(1)式对比,形式上虽有类似的地方,但不足之处是它们缺失了(1)式的几何意义。为了弥补这一点,有必要将这些刻画向着更加利于应用的形式转化。下面以 GA-凸函数(具体定义已在注 2 中给出)为例,通过定理 6、7 和定理 8 来说明如何做到这一点。这可视为本文结果(定理 4)在一维和高维广义凸函数方面的应用。

定理 6 设区间$(a,b)\subseteq(0,+\infty)$,$f$ 为定义在(a,b)上的可微函数,则下列陈述等价:

1) f 为(a,b)上的 GA-凸函数;

2) $\forall x,y\in(a,b)$,有 $f(x)\geqslant f(y)+(\ln x-\ln y)yf'(y)$;

3) $xf'(x)$为(a,b)上的递增函数。

证明 1)$\Leftrightarrow$2)。根据注 2 中给出的(14)式,二者的等价性是显然的。

2)$\Rightarrow$3)。对$\forall x,y\in(a,b)$,且 $x>y$,由 2)知:

$$f(x)\geqslant f(y)+(\ln x-\ln y)yf'(y),f(y)\geqslant f(x)+(\ln y-\ln x)xf'(x),$$

整理得 $xf'(x)\geqslant\dfrac{f(x)-f(y)}{\ln x-\ln y}\geqslant yf'(y)$,即 $xf'(x)$为(a,b)上的递增函数。

3)$\Rightarrow$2)。对$\forall x,y\in(a,b)$,不妨设 $x>y$(同理可证 $x<y$ 情形,$x=y$ 时显然成立),由柯西中值定理知$\exists\xi\in(y,x)$,使得$\dfrac{f(x)-f(y)}{\ln x-\ln y}=\xi f'(\xi)$。由 3)知 $\xi f'(\xi)\geqslant yf'(y)$。

于是$\dfrac{f(x)-f(y)}{\ln x-\ln y}\geqslant yf'(y)$,即 $f(x)\geqslant f(y)+(\ln x-\ln y)yf'(y)$。 证毕

由定理6可直接得到下面的定理7。

定理7 设区间$(a,b)\subseteq(0,+\infty)$,$f$为定义在$(a,b)$上的二次可微函数,则:

1) f为(a,b)上的GA-凸函数当且仅当$f'(x)+xf''(x)\geqslant 0$,$x\in(a,b)$;

2) f为(a,b)上的GA-凹函数当且仅当$f'(x)+xf''(x)\leqslant 0$,$x\in(a,b)$。

例1 设$A,B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,建立$\sin\sqrt[3]{ABC}$与$\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}$之间的不等式。

解 令$f(x)=\sin x$,$f'(x)+xf''(x)=\cos x-x\sin x=\sin x(\cot x-x)$。利用分析知识可知存在唯一$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,当$x\in(0,\alpha]$时,$\cos x-x\sin x\geqslant 0$;当$x\in\left[\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$\cos x-x\sin x\leqslant 0$,由定理7知正弦函数$\sin x$在$(0,\alpha]$为$GA$-凸函数,在$\left[\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$为$GA$-凹函数,于是:1) 当$A,B,C\in(0,\alpha]$时,有$\sin\sqrt[3]{ABC}\leqslant\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}$;2) 当$A,B,C\in\left[\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,有$\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leqslant\sin\sqrt[3]{ABC}$。

可以证明$\sin x$在区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$是递增的凹函数也是几何凹函数(利用本文结果可得关于几何凸函数类似于定理6和定理7的结论),并借助于均值不等式,进一步可得到如下不等式链:

1) 当$A,B,C\in(0,\alpha]$时,有

$$\sqrt[3]{\sin A\ \sin B\ \sin C}\leqslant\sin\sqrt[3]{ABC}\leqslant\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leqslant\sin\frac{A+B+C}{3};$$

2) 当$A,B,C\in\left[\alpha,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,有

$$\sqrt[3]{\sin A\ \sin B\ \sin C}\leqslant\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\leqslant\sin\sqrt[3]{ABC}\leqslant\sin\frac{A+B+C}{3}。$$

定理8 设$K\subseteq\mathbf{R}^n_{++}$是开的几何凸集,$f:K\to\mathbf{R}$二次连续可微,若对$\forall\,\boldsymbol{x}\in K$,矩阵$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})+\hat{\nabla}f(\boldsymbol{x})$是半正定的,则$f$为$K$上的$GA$-凸函数。其中Hesse矩阵:$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\left(\dfrac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial y_j}\right)_{n\times n}=(f''_{ij})_{n\times n}$,设$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n_{++}$,

$$\hat{\nabla}f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\dfrac{f'_1}{x_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \dfrac{f'_2}{x_2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{f'_n}{x_n}\end{pmatrix}。$$

证明 令$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda)=\boldsymbol{x}^\lambda\boldsymbol{y}^{1-\lambda}$,$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in K$,则$K$是关于$F$的凸集。对任意固定的$X,Y\in K$,构造函数$\Phi_{X,Y}(\lambda)=f[F(X,Y,\lambda)]=f(X^\lambda Y^{1-\lambda})$,$\lambda\in[0,1]$。则

$$\Phi'_{X,Y}(\lambda)=[X^\lambda Y^{1-\lambda}(\ln X-\ln Y)]^{\mathrm{T}}\ \nabla f(X^\lambda Y^{1-\lambda}),$$

$$\begin{aligned}\Phi''_{X,Y}(\lambda)=&[X^\lambda Y^{1-\lambda}(\ln X-\ln Y)]^{\mathrm{T}}\ \nabla^2 f(X^\lambda Y^{1-\lambda})X^\lambda Y^{1-\lambda}(\ln X-\ln Y)+\\&\{[X^\lambda Y^{1-\lambda}(\ln X-\ln Y)]^2\}^{\mathrm{T}}\ \nabla f(X^\lambda Y^{1-\lambda})=\\&[X^\lambda Y^{1-\lambda}(\ln X-\ln Y)]^{\mathrm{T}}[\nabla^2 f(X^\lambda Y^{1-\lambda})+\hat{\nabla}f(X^\lambda Y^{1-\lambda})]X^\lambda Y^{1-\lambda}(\ln X-\ln Y)。\end{aligned}$$

因对$\forall\,\boldsymbol{x}\in K$,$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})+\hat{\nabla}f(\boldsymbol{x})$是半正定的,故对任意的$X,Y\in K$,$\lambda\in[0,1]$有$\Phi''_{X,Y}(\lambda)\geqslant 0$,从而$\Phi_{X,Y}(\lambda)$是$[0,1]$上的凸函数。

根据定理2知f是K上的$F(=\boldsymbol{x}^\lambda\boldsymbol{y}^{1-\lambda})$凸函数,即$f$为$K$上的$GA$-凸函数。 证毕

参考文献:

[1] 黄金莹,张效菲,赵宇.广义凸集的结构理论[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2016,33(1):56-62.

HUANG J Y,ZHANG X F,ZHAO Y. Structural theory of generalized convex sets[J]. Journal of Chongqing Normal

University(Natural Science),2016,33(1):56-62.

[2] 黄金莹,张效菲,赵宇,等.广义凸函数的上图与水平集与[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2017,34(1):1-6.
HUANG J Y,ZHANG X F,ZHAO Y,et al. Epigraph and level set of generalized convex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science),2017,34(1):1-6.

[3] 黄金莹,赵宇,方秀男. *F-G* 广义凸函数与 *F* 拟凸函数[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2011,28(4):1-5.
HUANG J Y,ZHAO Y,FANG X N. The *F-G* generalized convex and *F* quasi convex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science),2011,28(4):1-5.

[4] 黄金莹,赵宇.广义凸函数与弱近似凸集[J].黑龙江大学自然科学学报,2011,28(2):200-205.
HUANG J Y,ZHAO Y. Generalized convex functions and weak nearly convex sets[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University,2011,28(2):200-205.

[5] BERTSEKAS D P.凸优化理论[M].影印版.北京:清华大学出版社,2011.
BERTSEKAS D P. Convex optimization theory[M]. gravure. Beijing:Tshinghua University Press,2011.

[6] Rockafellar R T. Convex analysis[M]. Princeton:Princeton University Press,1970.

[7] 刘光中.凸分析与极值问题[M].北京:高等教育出版社,1991.
LIU G Z. Convex analysis and extremal problem[M]. Beijing:Higher Education Press,1991.

[8] AVRIE L M,DIEWERT W E,SCHAIBLE S S,et al. Generalized concavity[M]. New York:Penum Press,1988.

[9] 赵克全.预不变凸函数的一个等价条件[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2010,27(3):6-8.
ZHAO K Q. An equivalent condition of preinvex function[J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science),2010,27(3):6-8.

[10] 赵克全. *r*-预不变凸函数的一个充分条件[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2006,23(1):10-13.
ZHAO K Q. A sufficient condition of *r*-preinvex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science),2006,23(1):10-13.

Operations Research and Cybernetics

Structural Theory of Generalized Convex Functions

ZHAO Yu, HUANG Jinying, KANG Zhaomin, FANG Haiwen

(Department of Mathematics, Jiamusi University, Jiamusi Heilongjiang 154007, China)

Abstract: [**Purposes**]The purposes of this article are give some properties of generalized convex functions and given the equivalent descriptions of generalized convex functions and their gradient base on the differentiable conditions. They are very important for the judgment of generalized convexity and the applications about programming. [**Methods**]We transplant the properties of convex(quasi-convex) functions to the generalized convex functions through establish the equivalent relationships between generalized convex and one-place convex(quasi-convex) functions. [**Findings**]we give the equivalent relationships between *F* convex (quasi-convex) and convex (quasi-convex) functions and give the equivalent descriptions of differentiable *F* convex (quasi-convex) functions about gradient. As the conclusions, we give some discriminate methods of *GA*-convex functions. [**Conclusions**]This article extends some conclusions of convex analysis at the generalized convex functions, so we can solve the discriminate questions about differentiable *F*convex (quasi-convex) functions.

Keywords: *F-G* generalized convex functions; *F* convex functions; *F* quasi-convex functions; *F* pseudo-convex functions; gradient; *GA*-convex functions

(责任编辑 黄 颖)