DOI:10.11721/cqnuj20170206

非奇异 M-矩阵最小特征值的新下界*

桑彩丽

(贵州民族大学 数据科学与信息工程学院,贵阳 550025)

摘要:【目的】估计非奇异 M-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值 $\tau(\boldsymbol{A})$。【方法】由逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 元素的上界序列和 Gerschgorin 圆盘定理给出非负矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的 Hadamard 积的谱半径 $\rho(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ 的单调递减的上界序列,并利用该上界序列对 $\tau(\boldsymbol{A})$ 进行估计,最后用数值算例进行验证。【结果】给出了 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的单调递增的收敛的下界序列。【结论】通过所给的数值算例说明所得 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界序列在一定条件下比现有估计精确,且在某些情况下能达到真值。

关键词:M-矩阵;非负矩阵;Hadamard 积;谱半径;最小特征值

中图分类号:O151.21　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2017)02-0053-06

M-矩阵有着广泛的应用背景,生物学、物理学、数学、经济学和社会科学中的许多问题都与 M-矩阵有密切联系[1-6]。矩阵的 Hadamard 积被广泛地应用于概率论中特征函数和偏微分方程中的弱极小原理等方面的研究[2-3,7-8]。由于非奇异 M-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界估计在考察微分方程动力系统的解的 l_1 范数的上下界等问题中有着重要应用[1],因此其为许多专家和学者所研究[9-13]。这里继续研究这一问题,首先给出 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与非负矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积的谱半径 $\rho(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ 的单调递减的上界序列,接着利用该上界序列给出 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的单调递增的收敛的下界序列。

1 预备知识

用 $\mathbf{R}^{n\times n}$($\mathbf{C}^{n\times n}$)表示 n 阶实(复)矩阵集,$\mathbf{N}$ 为自然数集。设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{C}^{n\times n}$, $d_j=\dfrac{\sum\limits_{k\neq j}|a_{jk}|}{|a_{jj}|}$,$\sigma(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱,$\rho(\boldsymbol{A})$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径。

定义 1[1]　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{C}^{n\times n}$,若对任意 $i\in\mathbf{N}$,($d_i<1$)$d_i\leqslant 1$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为(严格)对角占优矩阵。若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $d_i\leqslant 1,\forall i\in\mathbf{N}$;$J(\boldsymbol{A})=\{i\in\mathbf{N}:d_i<1\}\neq\varnothing$,且对任意 $i\in\mathbf{N},i\notin J(\boldsymbol{A})$,存在非零元素序列 $a_{ii_1},a_{i_1i_2},\cdots,a_{i_lk}$,其中 $i\neq i_1,i_1\neq i_2,\cdots,i_l\neq k,k\in J(\boldsymbol{A})$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为弱链对角占优矩阵。显然若 $\boldsymbol{A}$ 为严格对角占优矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 为弱链对角占优矩阵。

定义 2[2]　若 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 的任意元素 $a_{ij}\geqslant 0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为非负矩阵,记为 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$。

注 1[2]　若非负矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和相等,则 $\rho(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_\infty$。若 $\boldsymbol{A}$ 为非负不可约矩阵,则 $\rho(\boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值,且其对应的特征向量可取作正向量。

定义 3[3]　若 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 的非主对角线元非正,即 $a_{ij}\leqslant 0,i,j\in\mathbf{N},i\neq j$,且 $\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant 0$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异 M-矩阵,用 $\boldsymbol{M}_n$ 表示非奇异 M-矩阵的集合,称 $\tau(\boldsymbol{A})=\min\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(\boldsymbol{A})\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的最小特征值。

注 2[3]　若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n$,则 $\boldsymbol{A}$ 的 Jacobi 迭代矩阵 $\boldsymbol{J}_A=\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{G}-\boldsymbol{A})$ 的谱半径 $\rho(\boldsymbol{J}_A)<1$,其中 $\boldsymbol{G}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$;若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n$,则存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为严格对角占优 M-矩阵。

* **收稿日期:**2016-03-20　**修回日期:**2016-05-29　**网络出版时间:**2017-03-13 11:07

资助项目:国家自然科学基金(No.11501141);贵州省科学技术基金(黔科合 J 字[2015]2073);贵州省教育厅科技拔尖人才支持项目(黔教合 KY 字[2016]066)

第一作者简介:桑彩丽,女,研究方向为数值代数,E-mail:sangcl@126.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170313.1107.034.html

定义 4[3] 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$,$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\in\mathbf{C}^{m\times n}$,用 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素相乘而成的 $m\times n$ 矩阵,即 $\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B}=[a_{ij}b_{ij}]$,称其为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的 Hadamard 积。易知,若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n$,且 $\boldsymbol{B}\geqslant 0$, 则 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant 0$。

定义 5[3] 设 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}=1, j\in\mathbf{N}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为随机矩阵。如果还满足 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=1, i\in\mathbf{N}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为双随机矩阵。

引理 1[7] 设 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是双随机矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}$,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}$,其中 $\boldsymbol{e}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$。

引理 2[3] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$,且 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是对角矩阵,则

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{B})\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{XAY})\circ\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{XA})\circ(\boldsymbol{BY})=(\boldsymbol{AY})\circ(\boldsymbol{XB})=\boldsymbol{A}\circ(\boldsymbol{XBY})。$$

引理 3[3] 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 且 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数,则 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 λ 都属于下列区域:

$$\bigcup_{i\in\mathbf{N}}\left\{z\in\mathbf{C}: |z-a_{ii}|\leqslant x_i\sum_{k\neq i}\frac{1}{x_k}|a_{ki}|\right\}。$$

为叙述方便先给出一些记号。设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$,$a_{ii}\neq 0$。$\forall\, i,j,k\in\mathbf{N}, j\neq i, t=1,2,\cdots$,记:

$$d=\max_{i\in\mathbf{N}}d_i,\ \varphi_i=\frac{1}{a_{ii}-\sum\limits_{k\neq i}|a_{ik}|d_k},\ s_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|},$$

$$w_{ji}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|s_{ki}}{|a_{jj}|},\ w_i=\max_{j\neq i}\{w_{ij}\},\ h_i=\max_{j\neq i}\left\{\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|s_{ji}-\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|s_{ki}}\right\},$$

$$v_{ji}^{(0)}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|s_{ki}h_i}{|a_{jj}|},\ p_{ji}^{(t)}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|v_{ki}^{(t-1)}}{|a_{jj}|},\ p_i^{(t)}=\max_{j\neq i}\{p_{ij}^{(t)}\},$$

$$h_i^{(t)}=\max_{j\neq i}\left\{\frac{|a_{ji}|}{|a_{jj}|p_{ji}^{(t)}-\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|p_{ki}^{(t)}}\right\},\ v_{ji}^{(t)}=\frac{|a_{ji}|+\sum\limits_{k\neq j,i}|a_{jk}|p_{ki}^{(t)}h_i^{(t)}}{|a_{jj}|},\ \varphi_i^{(t)}=\frac{1}{a_{ii}-\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|p_{ji}^{(t)}}。$$

引理 4[8] 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是严格对角占优 M-矩阵,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$ 存在,且对任意 $i,j\in\mathbf{N}, j\neq i, t=1,2,\cdots$,下列不等式成立:

1) $1>d_j\geqslant s_{ji}\geqslant v_{ji}^{(0)}\geqslant p_{ji}^{(1)}\geqslant v_{ji}^{(1)}\geqslant p_{ji}^{(2)}\geqslant v_{ji}^{(2)}\geqslant\cdots\geqslant p_{ji}^{(t)}\geqslant v_{ji}^{(t)}\geqslant\cdots\geqslant 0$;

2) $1\geqslant h_i\geqslant 0$; $1\geqslant h_i^{(t)}\geqslant 0$;

3) $\alpha_{ji}\leqslant p_{ji}^{(t)}\alpha_{ii}$; $\alpha_{ii}\leqslant\varphi_i^{(t)}$。

1996 年,Shivakumar 等人[1]给出如下结果:设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是弱链对角占优 M-矩阵且 $\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$,则

$$\min_{i\in\mathbf{N}}\sum_{j\in\mathbf{N}}a_{ij}\leqslant\tau(\boldsymbol{A})\leqslant\max_{i\in\mathbf{N}}\sum_{j\in\mathbf{N}}a_{ij},\ \tau(\boldsymbol{A})\leqslant\min_{i\in\mathbf{N}}a_{ii},\ \frac{1}{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\sum\limits_{j\in\mathbf{N}}\alpha_{ij}}\leqslant\tau(\boldsymbol{A})\leqslant\frac{1}{\min\limits_{i\in\mathbf{N}}\sum\limits_{j\in\mathbf{N}}\alpha_{ij}}。\tag{1}$$

2010 年,田贵贤等人[9]利用 M-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Jacobi 迭代矩阵 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}$ 的谱半径给出了 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的新下界:设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\boldsymbol{M}_n$ 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$,则

$$\tau(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{1}{[1+(n-1)\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})]\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\alpha_{ii}}。\tag{2}$$

进一步地,当 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优 M-矩阵时,该研究仅利用 $\boldsymbol{A}$ 的元素给出 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界:设 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优 M-矩阵,则

$$\tau(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{1}{[1+(n-1)d]\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\varphi_i}。\tag{3}$$

2013 年李朝迁等人[10]改进了(2)式和(3)式,并给出如下结果:设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\boldsymbol{M}_n$ 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$,则

$$\tau(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{2}{\max\limits_{i\neq j}\{\alpha_{ii}+\alpha_{jj}+[(\alpha_{ii}-\alpha_{jj})^2+4(n-1)^2\alpha_{ii}\alpha_{jj}\rho^2(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})]^{\frac{1}{2}}\}}。\tag{4}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优 M-矩阵时,该研究给出了 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界:设是严格对角占优 M-矩阵,则

$$\tau(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{2}{\max\limits_{i\neq j}\{\varphi_i+\varphi_j+[\varphi_{ij}^2+4(n-1)^2\varphi_i\varphi_j d^2]^{\frac{1}{2}}\}}。\tag{5}$$

2016 年,孙德淑[10]给出了 $\tau(\boldsymbol{A})$的另一下界:设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\boldsymbol{M}_n$ 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$,则

$$\tau(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{1}{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\{[1+w_i(n-1)]\alpha_{ii}\}}。\tag{6}$$

下面给出 $\tau(\boldsymbol{A})$的两个单调递增的收敛的下界序列,该下界序列改进了(1)～(6)式,且数值算例显示在某些情况下该下界序列可以收敛到真值。

2 主要结果

在给出结果以前,先给出一些符号和引理。设 $\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\geqslant 0,\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(b_{11},b_{22},\cdots,b_{nn})$。记 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{D},\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}_1=\mathrm{diag}(d_{ii})$,其中 $d_{ii}=\begin{cases}1,b_{ii}=0\\ b_{ii},b_{ii}\neq 0\end{cases}$。由$\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}}$ 的定义知:

$$\rho(\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}})=\rho(\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}})=\rho(\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}_1^{-1})=\rho(\boldsymbol{D}_1^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}_1^{-1})\boldsymbol{D}_1)=\rho(\boldsymbol{D}_1^{-1}\boldsymbol{C})=\rho(\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}})。$$

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\boldsymbol{M}_n,\boldsymbol{B}=[b_{ij}]\geqslant 0$,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$,则对任意 $t=1,2,\cdots$,

$$\rho(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\leqslant\max_{i\in\mathbf{N}}\{b_{ii}\alpha_{ii}+p_i^{(t)}\alpha_{ii}d_{ii}\rho(\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}})\}=\Gamma_t。\tag{7}$$

证明　当 $n=1$ 时,(7)式显然成立。下面,假定 $n\geqslant 2$。

因 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_n$,故由注 2 和引理 2 知存在正对角矩阵 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 是严格对角占优 M-矩阵,且

$$\rho(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=\rho(\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{X})=\rho(\boldsymbol{B}\circ(\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})^{-1})。$$

所以为了讨论方便,现假定 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优 M-矩阵。下面分两种情形讨论。

1) 首先,假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均是不可约矩阵。由 $\boldsymbol{B}$ 是非负不可约矩阵知$\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}}$也是非负不可约矩阵,又由注 1 知存在正向量 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$ 使得$\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{x}=\rho(\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}})\boldsymbol{x}=\rho(\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}})\boldsymbol{x}$,由此得 $\sum\limits_{k\neq i}b_{ki}x_k=\rho(\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}})d_{ii}x_i,i\in\mathbf{N}$。令 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,则

$$\overline{\boldsymbol{B}}=[\overline{b}_{ij}]=\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{bmatrix}b_{11}&\frac{b_{12}x_1}{x_2}&\cdots&\frac{b_{1n}x_1}{x_n}\\ \frac{b_{21}x_2}{x_1}&b_{22}&\cdots&\frac{b_{2n}x_2}{x_n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \frac{b_{n1}x_n}{x_1}&\frac{b_{n2}x_n}{x_2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}。$$

由引理 2 知$\overline{\boldsymbol{B}}\circ\boldsymbol{A}^{-1}=(\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{-1})\circ\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{X}(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{X}^{-1}$,所以 $\rho(\overline{\boldsymbol{B}}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=\rho(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$。设 $\rho(\overline{\boldsymbol{B}}\circ\boldsymbol{A}^{-1})=\lambda$,则 $\lambda\geqslant b_{ii}\alpha_{ii},\forall i\in\mathbf{N}$。由引理 3 和引理 4 知存在 $i\in\mathbf{N}$,使得

$$|\lambda-b_{ii}\alpha_{ii}|\leqslant p_i^{(t)}\sum_{k\neq i}\frac{1}{p_k^{(t)}}\overline{b}_{ki}\alpha_{ki}\leqslant p_i^{(t)}\sum_{k\neq i}\frac{1}{p_k^{(t)}}\overline{b}_{ki}p_{ki}^{(t)}\alpha_{ii}\leqslant p_i^{(t)}\sum_{k\neq i}\frac{1}{p_k^{(t)}}\overline{b}_{ki}p_k^{(t)}\alpha_{ii}=$$

$$p_i^{(t)}\alpha_{ii}\sum_{k\neq i}\overline{b}_{ki}=p_i^{(t)}\alpha_{ii}\sum_{k\neq i}\frac{b_{ki}x_k}{x_i}=p_i^{(t)}\alpha_{ii}d_{ii}\rho(\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}}),$$

即 $\lambda\leqslant b_{ii}\alpha_{ii}+p_i^{(t)}\alpha_{ii}d_{ii}\rho(\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}})$,从而 $\rho(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})\leqslant\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\{b_{ii}\alpha_{ii}+p_i^{(t)}\alpha_{ii}d_{ii}\rho(\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}})\}$。

2) 假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 中至少一个是可约的。令 $\boldsymbol{V}=[v_{ij}]$是 n 阶置换阵,其中 $v_{12}=v_{23}=\cdots=v_{n-1,n}=v_{n1}=1$,其余 v_{ij} 为零,则对任意充分小正数 ε,$\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{V}$ 是不可约 M-矩阵,$\boldsymbol{B}+\varepsilon\boldsymbol{V}$ 是不可约非负矩阵[2]。用 $\boldsymbol{A}-\varepsilon\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{B}+\varepsilon\boldsymbol{V}$ 分别代替情形 1)中的 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$,类似于情形 1)的讨论,并令 $\varepsilon\to 0$,利用连续性可得结论成立。　　证毕

定理 2　由定理 1 得到的 $\rho(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$的上界序列$\{\Gamma_t\},t=1,2,\cdots$是单调递减的且以 $\rho(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$为下界,因而该序列是收敛的。

证明　由引理 4 知 $p_{ji}^{(t)}\geqslant p_{ji}^{(t+1)}\geqslant 0,j,i\in\mathbf{N},j\neq i,t=1,2,\cdots$,故序列$\{p_{ji}^{(t)}\}$和$\{p_i^{(t)}\}$均是单调递减的。由此知

序列$\{\Gamma_t\}$是单调递减的且有下界$\rho(\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$,故该序列是收敛的。 证毕

定理3 设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\boldsymbol{M}_n$且$\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$,则对任意$t=1,2,\cdots$,

$$\tau(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{1}{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\{[1+p_i^{(t)}(n-1)]\alpha_{ii}\}}=\Omega_t。\tag{8}$$

证明 令(7)式中非负矩阵$\boldsymbol{B}$的元素均为1,则$b_{ii}=1,d_{ii}=1,\forall i\in\mathbf{N},\rho(\overline{\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{B}})=n-1,\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$。此时

$$\tau(\boldsymbol{A})=\frac{1}{\rho(\boldsymbol{A}^{-1})}\geqslant\frac{1}{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\{[1+p_i^{(t)}(n-1)]\alpha_{ii}\}}。$$ 证毕

应用与定理2类似的证明,可得:

定理4 由定理3得到的$\tau(\boldsymbol{A})$的下界序列$\{\Omega_t\}$,$t=1,2,\cdots$是单调递增的且以$\tau(\boldsymbol{A})$为上界,因而该序列是收敛的。

当$\boldsymbol{A}$是严格对角占优M-矩阵时,下面仅用矩阵$\boldsymbol{A}$的元素给出$\tau(\boldsymbol{A})$的下界序列。

定理5 设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$是严格对角占优M-矩阵,则对任意$t=1,2,\cdots$,

$$\tau(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{1}{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\{[1+p_i^{(t)}(n-1)]\varphi_i^{(t)}\}}=\Upsilon_t。\tag{9}$$

证明 设$\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$。因为$\boldsymbol{A}$是严格对角占优M-矩阵,故由引理4知$\alpha_{ii}\leqslant\varphi_i^{(t)}$,$i\in\mathbf{N}$,从而

$$\tau(\boldsymbol{A})\geqslant\frac{1}{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\{[1+p_i^{(t)}(n-1)]\alpha_{ii}\}}\geqslant\frac{1}{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\{[1+p_i^{(t)}(n-1)]\varphi_i^{(t)}\}}。$$ 证毕

应用与定理2类似的证明,可得:

定理6 由定理5得到$\tau(\boldsymbol{A})$的下界序列$\{\Upsilon_t\}$,$t=1,2,\cdots$是单调递增的且以$\tau(\boldsymbol{A})$为上界,因而该序列是收敛的。

定理7 设$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\boldsymbol{M}_n$,$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$,且$\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$是双随机矩阵,则对任意$t=1,2,\cdots$,

$$\Omega_t\geqslant\frac{1}{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\{[1+w_i(n-1)]\alpha_{ii}\}}\geqslant\frac{1}{[1+(n-1)\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})]\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\alpha_{ii}},\tag{10}$$

且

$$\Upsilon_t\geqslant\frac{1}{[1+(n-1)d]\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\varphi_i}。\tag{11}$$

证明 下面仅给出(10)式的证明,类似地,可以证明(11)式成立。

因为$\boldsymbol{A}^{-1}=[\alpha_{ij}]$是双随机矩阵,故由引理1知$\boldsymbol{Ae}=\boldsymbol{e}$,即$|a_{ii}|=\sum\limits_{k\neq i}|a_{ik}|+1$,$\forall i\in\mathbf{N}$,由此知$\boldsymbol{A}$为严格对角占优M-矩阵。因为$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}}\\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0\end{bmatrix}$是非负矩阵,且各行元素之和均为$d_i=\frac{\sum\limits_{k\neq i}|a_{ik}|}{|a_{ii}|}=1-\frac{1}{|a_{ii}|}$,故$\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})=d_i$,$i\in\mathbf{N}$。由引理4知$1>\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})=d_j\geqslant s_{ji}\geqslant w_{ji}\geqslant v_{ji}^{(0)}\geqslant p_{ji}^{(t)}\geqslant 0$,$j,i\in\mathbf{N},j\neq i,t=1,2,\cdots$。

进一步地,由$d,w_i,p_i^{(t)}$的定义知,

$$1>\rho(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}})=d\geqslant w_i\geqslant p_i^{(t)}\geqslant 0,i\in\mathbf{N},t=1,2,\cdots。$$

再由(2)式、(6)式和(8)式易知(10)式成立。 证毕

注3 定理7显示,由(8)式得到的$\tau(\boldsymbol{A})$的下界比由(2)式和(6)式得到的下界精确;由(9)式得到的$\tau(\boldsymbol{A})$的下界比由(3)式得到的下界精确。

3 数值算例

本小节给出两个数值算例验证第 2 部分结果。

例 1 设
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 26 & -2 & -4 & -1 & -3 & -3 & -4 & -5 & -1 & -2 \\ -2 & 34 & -13 & -2 & -4 & -2 & -5 & 0 & -3 & -2 \\ -3 & -5 & 34 & -6 & -4 & -3 & -5 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 38 & -13 & -4 & -1 & -4 & -3 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & -11 & 41 & -9 & -2 & -3 & -4 & -4 \\ -3 & -5 & -2 & -3 & -6 & 35 & -1 & -5 & -5 & -4 \\ -5 & -2 & 0 & -5 & 0 & -7 & 34 & -8 & -1 & -5 \\ -1 & -4 & -3 & -2 & -5 & -1 & -9 & 32 & -1 & -5 \\ -4 & -4 & -2 & -4 & -4 & -3 & -2 & -1 & 33 & -8 \\ -4 & -5 & -4 & -3 & -1 & -2 & -4 & -3 & -11 & 37.1 \end{bmatrix}$$
。容易验证 $\boldsymbol{A}$ 是严格对角占优 M-矩阵，由 Matlab（R2009a）计算得 $\tau(\boldsymbol{A})=0.908\,2$。下面仅用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素给出 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界。取迭代总次数为 10，由定理 8 和文献[1，9，10，13]中相关结论得到的数值结果在表 1 中列出，其中 t 表示迭代次数。

表 1 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界 Υ_t

Tab. 1 The lower bounds of $\tau(\boldsymbol{A})$ is Υ_t

方法	t	Υ_t
引理 4.1[1]		0.100 0
定理 3.1[9]		0.122 7
定理 14[13]		0.125 7
定理 4.1[10]		0.142 9
定理 5	$t=1$	0.519 5
	$t=2$	0.667 6
	$t=3$	0.757 1
	$t=4$	0.810 7
	$t=5$	0.838 0
	$t=6$	0.844 4
	$t=7$	0.847 4
	$t=8$	0.848 8
	$t=9$	0.849 5
	$t=10$	0.849 8

注 4 从表 1 可以看出：

1）由定理 5 得到的 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界序列是单调递增的，且能有效地逼近 $\tau(\boldsymbol{A})$；

2）由定理 5 得到的 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界大于由文献[1，9，10，13]中相关结果得到的下界；

3）由于文献[11]中定理 2 和定理 4、文献[12]中定理 2 和定理 4 无法仅用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素给出 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界，而定理 5 可以给出 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界序列，故定理 5 优于文献[11]中定理 2 和定理 4、文献[12]中定理 2 和定理 4。

例 2 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{10\times10}$，其中 $a_{ii}=10$，$a_{ij}=-1$，$i,j\in\mathbf{N}$，$i\neq j$。易知 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}_{10}$。取迭代总次数为 10，分别由定理 3 和定理 5 计算知，当 $t=1$ 时，均有 $\tau(\boldsymbol{A})\geqslant1$。事实上，$\tau(\boldsymbol{A})=1$。

注 5 由例 2 知，在某些情况下，由定理 3 和定理 5 得到的 $\tau(\boldsymbol{A})$ 的下界序列均可以达到真值。

参考文献：

[1] SHIVAKUMAR P N, WILLIAMS J J, YE Q, et al. On two-sided bounds related to weakly diagonally dominant M-matrices with application to digital circuit dynamics[J]. Siam Journal on Matrix Analysis & Applications, 1996, 17: 298-312.

[2] BERMAN A, PLEMMONS R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

[3] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in matrix analysis [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[4] 高美平. M-矩阵与其逆矩阵的 Hadamard 积的最小特征值的下界[J]. 西南师范大学学报（自然科学版），2014，39(6)：9-13.
GAO M P. Lower bounds for Minimum eigenvalue of Hadamard product of an M-matrix and its inverse[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition), 2014, 39(6): 9-13.

[5] 王大飞，耿宏瑞，刘静. 稳定矩阵、正定矩阵和 M-矩阵的新判定[J]. 西南师范大学学报（自然科学版），2012，37(4)：1-4.
WANG D F, GENG H R, LIU J. New criteria for stable matrix, positive-definite matrix and M-matrix[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition), 2012, 37(4): 1-4.

[6] 陈付彬. M-矩阵 Fan 积的特征值下界[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2015,32(1):68-71.
CHEN F B. Lower bound on eigenvalue of the Fan product of M-matrices[J]. Journal of Chongqing Normal Univesity (Natural Science),2015,32(1):68-71.
[7] CHEN F B. New inequalities for the Hadamard product of an M-matrix and its inverse[J]. Journal of Inequalities Appllications,2015,35:1-12.
[8] 赵建兴,桑彩丽. 严格对角占优 M-矩阵的上界[J]. 吉林大学学报(理学版),2016,54(1):54-60.
ZHAO J X,SANG C L. Upper bounds for of strictly diagonally dominant M-matrix[J]. Journal of Jilin University (Science Edition),2016,54(1):54-60.
[9] TIAN G X,HUANG T Z. Inequalities for the minimum eigenvalue of M-Matrices[J]. Electron Journal of Linear Algebra,2010,20:91-302.
[10] LI C Q,LI Y T,ZHAO R J. New inequalities for the minimum eigenvalue of M-matrices[J]. Linear Multilinear A,2013,61(9):1267-1279.
[11] 孙德淑. 矩阵最小特征值的下界新估计[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2016,33(2):85-89.
SUN D S. New lower bounds for the minimum eigenvalue of M-matrix[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2016,33(2):85-89.
[12] WANG F,SUN D S. Some new inequalities for the minimum eigenvalue of M-matrices[J]. Journal of Inequalities Appllications,2015,195:1-7.
[13] XU M,LI S H,LI C Q. Inequalities for the minimum eigenvalue of doubly strictly diagonally dominant M-matrices[J]. Journal of Applied Mathematics,2014,2014:1-8.

New Lower Bounds for the Minimum Eigenvalue of Nonsingular M-matrices

SANG Caili

(College of Data Science and Information Engineering, Guizhou Minzu University, Guiyang 550025, China)

Abstract: [**Purposes**]Estimating the minimum eigenvalue $\tau(\boldsymbol{A})$ of a nonsingular M-matrix $\boldsymbol{A}$. [**Methods**]Using the sequences of upper bounds of the entries of the inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ of $\boldsymbol{A}$ and Gerschgorin disc theorem, a monotone decreasing sequences of upper bounds for the spectral radius $\rho(\boldsymbol{A}\circ\boldsymbol{A}^{-1})$ of the Hadamard product of a nonnegative matrix $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{A}^{-1}$ is given, which is used to estimate $\tau(\boldsymbol{A})$. Finally, numerical examples are given to verify the theoretical results. [**Findings**]Some monotone increasing and convergent sequences of lower bounds of $\tau(\boldsymbol{A})$ are obtained. [**Conclusions**]Numerical examples shows that these sequences of lower bounds of $\tau(\boldsymbol{A})$ are more accurate than some existing results under certain condition, and could reach the true value of the minimum eigenvalue in some cases.

Keywords: M-matrix; nonnegative matrix; spectral radius; Hadamard product; minimum eigenvalue

(责任编辑 游中胜)