

# 一类特殊非负矩阵对本原指数集<sup>\*</sup>

罗美金, 侯宗毅

(河池学院 数学与统计学院, 广西 宜州 546300)

**摘要:**【目的】将传统单个非负矩阵本原指数的研究推广到非负矩阵对本原指数, 丰富组合矩阵论中本原指数集理论的研究成果。【方法】根据图论知识, 利用非负矩阵对的伴随有向图, 即双色有向图来解决非负矩阵对本原指数问题。【结果】考虑一类含有3条公共弧的双色有向图, 它的未着色图中包含 $4n+1$ 个顶点, 一个 $(3n+4)$ -圈和一个 $(n+1)$ -圈, 给出了本原条件、指数上下界、指数集, 并对极图进行了刻画。【结论】所得结果为一般情形下的非负矩阵对和非负矩阵簇本原指数问题的研究奠定基础。

**关键词:**非负; 矩阵对; 本原; 指数集

**中图分类号:**O157.5

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-6693(2017)02-0059-08

## 1 预备知识

$n$ 阶非负矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 与它具有 $n$ 个顶点的伴随有向图 $D(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 存在一一对应关系。 $D(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 中弧存在与否可由非负矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 中元素的数值来判断, 例如,  $D(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 中是否存在红弧(蓝弧)可由矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$  ( $\mathbf{B}=(b_{ij})$ )中元素的数值判断。若 $a_{ij}>0$  ( $b_{ij}>0$ ), 则从顶点 $i$ 到顶点 $j$ 存在一条红弧(蓝弧); 若 $a_{ij}=0$  ( $b_{ij}=0$ ), 则从顶点 $i$ 到顶点 $j$ 不存在红弧(蓝弧)<sup>[1]</sup>。

若有向图 $D$ 中只含红弧和蓝弧, 那么 $D$ 是一个双色有向图。若非负矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 是本原的, 那么非负矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 所对应的伴随有向图, 即双色有向图 $D(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 也是本原的,  $D(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 的本原指数 $\exp(D(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ 即为非负矩阵对 $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 的本原指数 $\exp(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ 。由非负矩阵对本原指数的概念, 可定义双色有向图本原指数的概念为: 任给定 $D$ 中的一条途径 $\omega$ ,  $\omega$ 的分解为向量 $(r(\omega), b(\omega))$ 或 $(r(\omega), b(\omega))^T$ , 称 $\omega$ 为一条 $(r(\omega), b(\omega))$ -途径, 其中 $r(\omega)$ 和 $b(\omega)$ 分别表示 $\omega$ 中红弧和蓝弧的条数。若存在非负整数 $h$ 和 $k$ , 且 $h+k>0$ , 使得 $D$ 中的每一对顶点 $(i, j)$ 都存在从 $i$ 到 $j$ 的 $(h, k)$ -途径, 则双色有向图 $D$ 是本原的, 且 $h+k$ 的最小值为双色有向图 $D$ 的本原指数, 记作 $\exp(D)$ 。

设 $D$ 中含有圈 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l, C=\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l\}$ 是 $D$ 的圈集合, 定义 $D$ 的圈矩阵 $\mathbf{M}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{l-1} & a_l \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{l-1} & b_l \end{bmatrix}$ , 其中 $a_i, b_i$ 表示圈 $\gamma_i$ 中的红弧和蓝弧的数目。若 $\mathbf{M}$ 的秩小于2, 则 $\mathbf{M}$ 的 $\text{content}$ (记为 $\text{content}(\mathbf{M})$ )定义为0, 否则定义 $\text{content}(\mathbf{M})$ 为 $\mathbf{M}$ 的所有非零2阶主子式的最大公因数。

**引理 1**<sup>[2]</sup> 一个至少包含一条红弧和一条蓝弧的双色有向图 $D$ 是本原的, 当且仅当 $D$ 是强连通的, 且 $\text{content}(\mathbf{M})=1$ 。

根据非负矩阵对与对应的伴随有向图(即双色有向图)的一一对应关系, 可以借助双色有向图来研究非负矩阵对本原指数问题。近些年来, 国内外关于非负矩阵对、矩阵簇(即双色、多色有向图)本原指数上界的研究已经取得了一些重要成果<sup>[2-10]</sup>, 而关于本原指数集的研究甚少。文献中对各类指数的研究局限在指数上下界, 如文献[10]中找到了一类特殊的三色有向图的本原指数上界; 文献[2-8]中, 主要是对某一类的双色有向图的本原指数上界进行了研究, 而对于本原指数集因情况复杂、计算量大等原因未给出结果。本文将非负矩阵对指数的研

\* 收稿日期:2015-10-14 修回日期:2017-02-18 网络出版时间:2017-03-13 11:07

资助项目:国家自然科学基金(No. 11561019); 广西高校科研项目(No. YB2014335; No. KY2015ZD103)

第一作者简介:罗美金, 女, 副教授, 研究方向为组合数学, E-mail:meijin322@163.com

网络出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170313.1108.052.html>

究转化为所对应的伴随有向图指数的研究,将文献中的方法加以推广,找到了本原指数集,研究了一类至少包含一条红弧和一条蓝弧的双色有向图  $D$ ,它的未着色有向图如图 1 所示。给出了非负矩阵对本原时需满足的本原条件,找到了 3 种类型的本原指数上下界,并对指数集及达到指数上下界时的极图进行了刻画。

对于任意的  $n \geq 3$ ,由图 1 可知, $D$  中仅包含两个圈,圈长分别为  $3n+4$  和  $n+1$ ,且两个圈有 3 条公共弧  $3n+1 \rightarrow 3n+2 \rightarrow 3n+3 \rightarrow 3n+4$ 。不妨设  $D$  的圈矩阵为:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ 3n+4-a & n+1-b \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中  $\frac{3n+4}{2} \leq a \leq 3n+4$ ,且  $a, b$  都是整数。

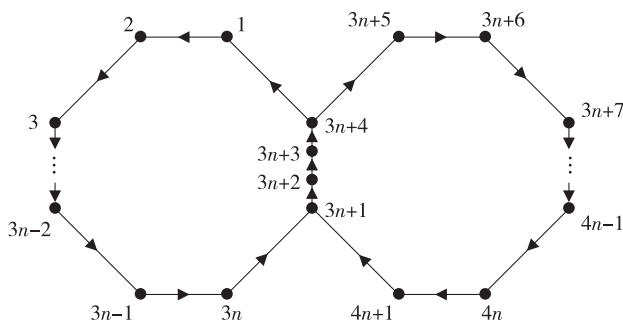


图 1 未着色有向图  $D$

Fig. 1 Uncolored digraph of  $D$

## 2 本原条件

**定理 1** 令  $D$  是如图 1 所示的双色有向图,那么  $D$  是本原的当且仅当  $a=3n+1, b=n$ 。

**证明** 由(1)式得,  $|\mathbf{M}| = a(n+1) - b(3n+4)$ 。显然, $D$  是强连通的。根据引理 1 可知, $D$  是本原的当且仅当  $\text{content}(\mathbf{M}) = 1$ ,即  $a(n+1) - b(3n+4) = \pm 1$ 。又因  $\frac{3n+4}{2} \leq a \leq 3n+4$ ,且  $a, b$  都是整数,故  $a=3n+1, b=n$ 。

证毕

此时, $D$  的圈矩阵  $\mathbf{M}$  及圈矩阵的逆矩阵  $\mathbf{M}^{-1}$  分别为  $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 3n+1 & n \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -n \\ -3 & 3n+1 \end{bmatrix}$ 。

由圈矩阵可知,( $3n+4$ )-圈包含 3 条蓝弧,( $n+1$ )-圈仅含 1 条蓝弧。结合图 1,以下分 3 种类型讨论双色有向图  $D$  的本原指数:

- 1) 公共弧  $3n+1 \rightarrow 3n+2 \rightarrow 3n+3 \rightarrow 3n+4$  为红弧;
- 2) 公共弧  $3n+1 \rightarrow 3n+2 \rightarrow 3n+3 \rightarrow 3n+4$  中包含 1 条蓝弧,且公共弧  $3n+1 \rightarrow 3n+2 \rightarrow 3n+3$  为红弧, $3n+3 \rightarrow 3n+4$  为蓝弧;或公共弧  $3n+2 \rightarrow 3n+3 \rightarrow 3n+4$  为红弧, $3n+1 \rightarrow 3n+2$  为蓝弧;
- 3) 公共弧  $3n+1 \rightarrow 3n+2 \rightarrow 3n+3 \rightarrow 3n+4$  中包含 1 条蓝弧,且公共弧  $3n+1 \rightarrow 3n+2$  和  $3n+3 \rightarrow 3n+4$  为红弧, $3n+2 \rightarrow 3n+3$  为蓝弧。

## 3 指数上、下界

**定理 2** 若双色有向图  $D$  是本原的,且属于类型 1),则  $6n^2 + 13n + 7 \leq \exp(D) \leq 24n^2 + 17n - 13$ 。

**证明** 先证  $\exp(D) \leq 24n^2 + 17n - 13$ 。

只需证明对  $D$  的任意一对顶点  $(i, j)$ ,都有一条  $(24n^2 - 7n - 2, 24n - 11)$ -途径。取  $\rho_1 = 4n - 2 - s + nt, \rho_2 = 12n - 5 + 3s - 3nt - t$ 。因此,从顶点  $i$  出发,沿  $p_{ij}$  到顶点  $j$ ,转  $(3n+4)$ -圈  $\rho_1$  次,转  $(n+1)$ -圈  $\rho_2$  次的途径有分解

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 3n+1 \\ 3 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24n^2 - 7n - 2 \\ 24n - 11 \end{bmatrix}。$$

显然, $0 \leq s \leq 4n-2, 0 \leq t \leq 4$ ,且  $\rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0$ 。当  $s=4n-2$  时, $t \geq 0$ ;当  $t=4$  时, $s \geq 3$ 。当  $\rho_1=0$  或  $\rho_2=0$  时, $p_{ij}$  必包含公共弧  $3n+1 \rightarrow 3n+2 \rightarrow 3n+3 \rightarrow 3n+4$ 。所以

$$\exp(D) \leq 24n^2 - 7n - 2 + 24n - 11 = 24n^2 + 17n - 13。$$

再证  $\exp(D) \geq 6n^2 + 13n + 7$ 。

设存在一对非负整数  $(h, k)$ ,使对  $D$  中所有顶点对  $(i, j)$ ,都有一条从  $i$  到  $j$  的  $(h, k)$ -途径。取  $i=j=3n+4$ ,则存在非负整数  $u$  和  $v$ ,有  $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ 。

由  $D$  的圈矩阵  $\mathbf{M}$ ,可知  $(n+1)$ -圈包含  $n$  条红弧和 1 条蓝弧, $n$  条红弧连续; $(3n+4)$ -圈中包含  $3n+1$  条红弧和 3 条蓝弧。又因  $\exp(D)$  的大小与连续红路(或蓝路)长度有密切的关系,结合图 1 有,( $3n+4$ )-圈上的 3 条蓝弧可以都连续,可以其中的 2 条连续,也可以都不连续。当  $(3n+4)$ -圈上的 3 条蓝弧都不连续时,则将  $(3n+4)$ -圈

上的  $3n+1$  条红弧分成 3 段连续红路,但无论如何分割,至少有 1 条连续红路弧长大于等于  $n+1$ ,且只有 3 段连续红路的弧长分别为  $n+1, n, n$  或  $n+1, n+1, n-1$ (即 3 条连续红路中最长的弧长为  $n+1$ )时,所得  $\exp(D)$  最小。取  $i, j$  分别为  $(3n+4)$ -圈上  $n+1$  长连续红路的起点和终点,则从  $i$  到  $j$  的途径分解为  $(n+1, 0)$ 。因此

$\mathbf{MZ} = \begin{bmatrix} h-(n+1) \\ k \end{bmatrix}$  有非负整数解,即:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} h-(n+1) \\ k \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} - \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+1 \\ -3n-3 \end{bmatrix},$$

则  $u \geq n+1$ 。再取  $i, j$  分别为  $(3n+4)$ -圈上  $n+1$  长连续红路的终点和起点,则从  $i$  到  $j$  的路分解为  $(2n, 3)$ 。因此

此  $\mathbf{MZ} = \begin{bmatrix} h-2n \\ k-3 \end{bmatrix}$  有非负整数解,即:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} h-2n \\ k-3 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} - \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 2n \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 2n \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -n \\ 3n+3 \end{bmatrix},$$

则  $v \geq 3n+3$ 。从而  $h+k = [1 \quad 1] \mathbf{M} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq [3n+4 \quad n+1] \begin{bmatrix} n+1 \\ 3n+3 \end{bmatrix} = 6n^2 + 13n + 7$ , 所以  $\exp(D) \geq 6n^2 + 13n + 7$ 。

综上所述,  $6n^2 + 13n + 7 \leq \exp(D) \leq 24n^2 + 17n - 13$ 。

证毕

类似定理 2 的证明,可得以下两个定理。

**定理 3** 若双色有向图  $D$  是本原的,且属于类型 2),则  $6n^2 + 13n + 7 \leq \exp(D) \leq 18n^2 + 27n + 7$ 。

**定理 4** 若双色有向图  $D$  是本原的,且属于类型 3),则  $6n^2 + 13n + 7 \leq \exp(D) \leq 18n^2 + 21n$ 。

## 4 极图刻画

**定理 5** 若双色有向图  $D$  是本原的,则  $\exp(D) = 6n^2 + 13n + 7$  当且仅当  $(3n+4)$ -圈上恰存在 3 条连续红路,弧长分别为  $n+1, n, n$  或  $n+1, n+1, n-1$ ,即 3 条连续红路中最长的弧长为  $n+1$ 。

**证明** 充分性。因定理 2 中已证明  $\exp(D) \geq 6n^2 + 13n + 7$ ,要证明  $\exp(D) = 6n^2 + 13n + 7$ ,结合定理 2,只需证明  $\exp(D) \leq 6n^2 + 13n + 7$  即可。

只需证得对  $D$  的任意一对顶点  $(i, j)$ ,都有一条  $(6n^2 + 7n + 1, 6n + 6)$ -途径。对  $D$  中的任意一对顶点  $(i, j)$ ,记  $p_{ij}$  是从  $i$  到  $j$  的最短路,  $r(p_{ij}) = s, b(p_{ij}) = t$ ,取  $\rho_1 = n+1-s+nt, \rho_2 = 3n+3+3s-3nt-t$ 。因此,从顶点  $i$  出发,沿  $p_{ij}$  到顶点  $j$ ,转  $(3n+4)$ -圈  $\rho_1$  次,转  $(n+1)$ -圈  $\rho_2$  次的途径有分解:

$$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 3n+1 \\ 3 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6n^2 + 7n + 1 \\ 6n + 6 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

考虑以下 5 种情形。

情形 1,  $t=0$ 。此时,  $0 \leq s \leq n+1$ ,则  $n+1-s \geq 0, 3n+3+3s > 0$ 。由(2)式得,从顶点  $i$  沿  $p_{ij}$  到顶点  $j$ ,途中绕  $(3n+4)$ -圈  $n+1-s$  次,  $(n+1)$ -圈  $3n+3+3s$  次的途径是一条  $(6n^2 + 7n + 1, 6n + 6)$ -途径。

情形 2,  $t=1$ 。此时,  $0 \leq s \leq 2n+1$ ,则  $2n+1-s \geq 0, 3s+2 > 0$ 。由(2)式得,从顶点  $i$ ,沿  $p_{ij}$  到顶点  $j$ ,途中绕  $(3n+4)$ -圈  $2n+1-s$  次,  $(n+1)$ -圈  $3s+2$  次的途径是一条  $(6n^2 + 7n + 1, 6n + 6)$ -途径。

情形 3,  $t=2$ 。此时,  $n \leq s \leq 3n+1$ ,且  $s=3n+1$  时,  $p_{ij}$  必包含公共弧  $3n+1 \rightarrow 3n+2 \rightarrow 3n+3 \rightarrow 3n+4$ 。则  $3n+1-s \geq 0, 3s-3n+1 > 0$ 。由(2)式得,从顶点  $i$  沿  $p_{ij}$  到顶点  $j$ ,途中绕  $(3n+4)$ -圈  $3n+1-s$  次,  $(n+1)$ -圈  $3s-3n+1$  次的途径是一条  $(6n^2 + 7n + 1, 6n + 6)$ -途径。

情形 4,  $t=3$ 。此时,  $2n \leq s \leq 4n-2$ ,且  $s=3n+1$  时,  $p_{ij}$  必包含公共弧  $3n+1 \rightarrow 3n+2 \rightarrow 3n+3 \rightarrow 3n+4$ ,则  $4n+1-s > 0, 3s-6n \geq 0$ 。由(2)式得,从顶点  $i$  沿  $p_{ij}$  到顶点  $j$ ,途中绕  $(3n+4)$ -圈  $4n+1-s$  次,  $(n+1)$ -圈  $3s-6n$  次的途径是一条  $(6n^2 + 7n + 1, 6n + 6)$ -途径。

情形 5,  $t=4$ 。此时,  $3n+1 \leq s \leq 4n-2$ ,  $p_{ij}$  必包含公共弧  $3n+1 \rightarrow 3n+2 \rightarrow 3n+3 \rightarrow 3n+4$ ,则  $5n+1-s > 0, 3s-9n-1 > 0$ 。由(2)式得,从顶点  $i$  沿  $p_{ij}$  到顶点  $j$ ,途中绕  $(3n+4)$ -圈  $5n+1-s$  次,  $(n+1)$ -圈  $3s-9n-1$  次的途径是一条  $(6n^2 + 7n + 1, 6n + 6)$ -途径。

所以,  $\exp(D) \leq 6n^2 + 7n + 1 + 6n + 6 = 6n^2 + 13n + 7$ 。

必要性。利用反证法。设双色有向图  $D$  是本原的,若  $(3n+4)$ -圈上恰存在 3 条连续红路,且 3 条连续红路中最长的弧长大于  $n+1$ ,只需证明  $\exp(D) > 6n^2 + 13n + 7$  即可。

设存在一对非负整数  $(h, k)$ , 使对  $D$  中所有顶点对  $(i, j)$ , 都有一条从  $i$  到  $j$  的  $(h, k)$ -途径。取  $i = j = 3n + 4$ , 则存在非负整数  $u$  和  $v$ , 有  $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ 。

此时,  $(3n+4)$ -圈上恰存在 3 条连续红路, 且 3 条连续红路中最长的弧长大于  $n+1$ , 不妨设最长的弧长为  $x$ , 则  $x \geq n+2$ 。取  $i, j$  分别为  $(3n+4)$ -圈上  $x$  长连续红路的起点和终点, 则从  $i$  到  $j$  的途径分解为  $(x, 0)$ 。因此  $MZ = \begin{bmatrix} h-x \\ k \end{bmatrix}$  有非负整数解, 即:

$$Z = M^{-1} \begin{bmatrix} h-x \\ k \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} - M^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - M^{-1} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ -3x \end{bmatrix},$$

则  $u \geq x$ 。再取  $i, j$  分别为  $(3n+4)$ -圈上  $x$  长连续红路的终点和起点, 则从  $i$  到  $j$  的路分解为  $(3n+1-x, 3)$ 。因此,  $MZ = \begin{bmatrix} h-(3n+1-x) \\ k-3 \end{bmatrix}$  有非负整数解, 即:

$$Z = M^{-1} \begin{bmatrix} h-(3n+1-x) \\ k-3 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} - M^{-1} \begin{bmatrix} 3n+1-x \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - M^{-1} \begin{bmatrix} 3n+1-x \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -(x-1) \\ 3x \end{bmatrix},$$

则  $v \geq 3x$ 。从而有

$$h+k = [1 \quad 1]M \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \geq [3n+4 \quad n+1] \begin{bmatrix} x \\ 3x \end{bmatrix} =$$

$$6nx+7x \geq 6n(n+2)+7(n+2)=6n^2+19n+14 > 6n^2+13n+7。$$

综上所述, 结合定理 2, 定理得证。

证毕

类似定理 2、定理 5 的证明, 可得定理 6~定理 8。

**定理 6** 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于类型 1), 则  $\exp(D) = 24n^2 + 17n - 13$  当且仅当两圈恰存在一条  $4n-2$  长的连续红路, 即  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  和  $4n+1 \rightarrow 3n+1$  为蓝弧, 其他弧为红弧; 或  $3n-2 \rightarrow 3n-1 \rightarrow 3n \rightarrow 3n+1$  和  $3n+4 \rightarrow 3n+5$  为蓝弧, 其他弧为红弧。

**定理 7** 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于类型 2), 则  $\exp(D) = 18n^2 + 27n + 7$  当且仅当  $(3n+4)$ -圈恰存在一条  $3n+1$  长的连续红路(或恰存在一条 3 长的连续蓝路), 即  $3n+3 \rightarrow 3n+4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$  为蓝弧, 其他弧为红弧; 或  $3n-1 \rightarrow 3n \rightarrow 3n+1 \rightarrow 3n+2$  为蓝弧, 其他弧为红弧。

**定理 8** 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于类型 3), 则  $\exp(D) = 18n^2 + 21n$  当且仅当  $(3n+4)$ -圈恰存在一条  $3n$  长的连续红路(或恰存在一条 2 长的连续蓝路), 且 3 条蓝弧中恰包含 1 条红弧, 即  $3n+4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$  和  $3n+2 \rightarrow 3n+3$  为蓝弧, 其他弧为红弧; 或  $3n-1 \rightarrow 3n \rightarrow 3n+1$  和  $3n+2 \rightarrow 3n+3$  为蓝弧, 其他弧为红弧。

## 5 本原指数集

将  $(3n+4)$ -圈上的 3 条蓝弧设为  $x \rightarrow x+1 (0 \leq x \leq 3n-2, \text{当 } x+1=1 \text{ 时}, x=3n+4), y \rightarrow y+1 (1 \leq y \leq 3n-1), z \rightarrow z+1 (2 \leq z \leq 3n); (n+1)$ -圈上的蓝弧设为  $w \rightarrow w+1 (3n+4 \leq w \leq 4n+1, \text{当 } w=4n+1 \text{ 时}, w+1=3n+1)$  其他为红弧。若  $(3n+4)$ -圈上的 3 条蓝弧将  $(3n+4)$ -圈上的  $3n+1$  长的红弧恰分成 3 条连续红路, 且 3 条连续红路中最长的弧长为  $n+1$ , 即为定理 5 的情形。若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于类型 1), 两圈恰存在 1 条  $4n-2$  长的连续红路, 即为定理 6 的情形。若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于类型 2),  $(3n+4)$ -圈上存在 1 条 3 长的连续蓝路, 则为定理 7 的情形。若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于类型 3),  $(3n+4)$ -圈上存在一条 2 长的连续蓝路, 则为定理 8 的情形。结合图 1, 分以下 14 种情形讨论本原双色有向图  $D$  的本原指数。

情形 1: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型 1), 两圈不存在一条  $4n-2$  长的连续红路,  $(3n+4)$ -圈上存在一条 3 长的连续蓝路  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2 \rightarrow x+3$ , 且两圈中最长红路的终点和起点不包含  $(n+1)$ -圈的蓝弧, 则  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2 \rightarrow x+3$  和  $w \rightarrow w+1$  将两圈中的红路分成两段, 两条红路长分别为  $3n+1$  和  $n$ ;

情形 2: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型 1), 两圈不存在一条  $4n-2$  长的连续红路,  $(3n+4)$ -圈上存在一

条3长的连续蓝路  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2 \rightarrow x+3$ , 且两圈中最长红路的终点和起点包含  $(n+1)$ -圈的蓝弧, 则  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2 \rightarrow x+3$  和  $w \rightarrow w+1$  将两圈中的红路分成两段, 两条红路长分别为  $w-x-3$  和  $4n+4-w+x$ ;

情形3: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型1),  $(3n+4)$ -圈上存在一条2长的连续蓝路  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2$ , 且两圈中最长红路的终点和起点不包含  $(n+1)$ -圈的蓝弧, 则  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2, z \rightarrow z+1$  和  $w \rightarrow w+1$  将两圈中的红路分成3段, 3条红路长分别为  $z-x-2, 3n+3-z+x$  和  $n$ ,  $n$  为3条红路中最短的;

情形4: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型1),  $(3n+4)$ -圈上存在一条2长的连续蓝路  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2$ , 且两圈中最长红路的终点和起点包含  $(n+1)$ -圈的蓝弧, 则  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2, z \rightarrow z+1$  和  $w \rightarrow w+1$  将两圈中的红路分成3段, 3条红路长分别为  $z-x-2, w-z-1$  和  $4n+4-w+x$ ;

情形5: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型1),  $(3n+4)$ -圈上存在一条2长的连续蓝路  $y \rightarrow y+1 \rightarrow y+2$ , 且两圈中最长红路的终点和起点不包含  $(n+1)$ -圈的蓝弧, 则  $y \rightarrow y+1 \rightarrow y+2, x \rightarrow x+1$  和  $w \rightarrow w+1$  将两圈中的红路分成3段, 将两圈中的红路分成3段, 3条红路长分别为  $y-x-1, 3n+2-y+x$  和  $n$ ,  $n$  为3条红路中最短的;

情形6: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型1),  $(3n+4)$ -圈上存在一条2长的连续蓝路  $y \rightarrow y+1 \rightarrow y+2$ , 且两圈中最长红路的终点和起点包含  $(n+1)$ -圈的蓝弧, 则  $y \rightarrow y+1 \rightarrow y+2, x \rightarrow x+1$  和  $w \rightarrow w+1$  将两圈中的红路分成3段, 3条红路长分别为  $y-x-1, w-y-2$  和  $4n+4-w+x$ ;

情形7: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型1),  $(3n+4)$ -圈上不存在连续蓝路, 且两圈中最长红路的终点和起点不包含  $(n+1)$ -圈的蓝弧, 则  $x \rightarrow x+1, y \rightarrow y+1, z \rightarrow z+1$  和  $w \rightarrow w+1$  将两圈中的红路分成4段, 4条红路长分别为  $y-x-1, z-y-1, 3n+3-z+x$  和  $n$ ,  $n$  为4条红路中最短的;

情形8: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型1),  $(3n+4)$ -圈上不存在连续蓝路, 且两圈中最长红路的终点和起点不包含  $(n+1)$ -圈的蓝弧, 则  $x \rightarrow x+1, y \rightarrow y+1, z \rightarrow z+1$  和  $w \rightarrow w+1$  将两圈中的红路分成4段, 4条红路长分别为  $y-x-1, z-y-1, 4n+4-w+x$  和  $n$ ,  $n$  为4条红路中最短的;

情形9: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型2), 且  $(3n+4)$ -圈上存在一条2长的连续蓝路  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2$  (或  $3n \rightarrow 3n+1 \rightarrow 3n+2$ ), 则  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2$  (或  $3n \rightarrow 3n+1 \rightarrow 3n+2$ ) 和  $3n+1 \rightarrow 3n+2$  (或  $x \rightarrow x+1$ ) 将两圈中的红路分成3段, 3条红路长分别为  $3n-x-1, x+2$  和  $n$ ,  $n$  为3条红路中最短的;

情形10: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型2), 且  $(3n+4)$ -圈上存在一条2长的连续蓝路  $3n+3 \rightarrow 3n+4 \rightarrow 1$  (或  $z \rightarrow z+1 \rightarrow z+2$ ), 则  $3n+3 \rightarrow 3n+4 \rightarrow 1$  (或  $z \rightarrow z+1 \rightarrow z+2$ ) 和  $z \rightarrow z+1$  (或  $3n+3 \rightarrow 3n+4$ ) 将两圈中的红路分成3段, 3条红路长分别为  $z-1, 3n-z+2$  和  $n$ ,  $n$  为3条红路中最短的;

情形11: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型2), 且  $(3n+4)$ -圈上不存在连续蓝路, 则  $x \rightarrow x+1, y \rightarrow y+1$  和  $3n+1 \rightarrow 3n+2$  将两圈中的红路分成4段, 4条红路长分别为  $y-x-1, 3n-y, x+2$  和  $n$ ,  $n$  为4条红路中最短的;

情形12: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型2), 且  $(3n+4)$ -圈上不存在连续蓝路, 则  $x \rightarrow x+1, y \rightarrow y+1$  和  $3n+3 \rightarrow 3n+4$  将两圈中的红路分成4段, 4条红路长分别为  $y-x-1, 3n+2-y, x$  和  $n$ ,  $n$  为4条红路中最短的;

情形13: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型3), 且  $(3n+4)$ -圈上存在一条2长的连续蓝路  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2$ , 则  $x \rightarrow x+1 \rightarrow x+2$  和  $3n+2 \rightarrow 3n+3$  将两圈中的红路分成3段, 3条红路长分别为  $x+1, 3n-x$  和  $n$ ,  $n$  为3条红路中最短的;

情形14: 双色有向图  $D$  是本原的, 属于类型3), 且  $(3n+4)$ -圈上不存在连续蓝路, 则  $x \rightarrow x+1, y \rightarrow y+1$  和  $3n+2 \rightarrow 3n+3$  将两圈中的红路分成4段, 4条红路长分别为  $y-x-1, 3n+1-y, x+1$  和  $n$ ,  $n$  为4条红路中最短的。

类似定理5的证明, 可得以上14类情形所对应的本原指数, 各类情形所得结果分别为引理2~引理15。

**引理2** 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于情形1, 则  $\exp(D) = 18n^2 + 27n + 7$ 。

**引理3** 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于情形2, 则:

$$\exp(D) = \begin{cases} 24n^2 + 53n + 29 - (6n+7)(w-x), & 8 \leq w-x < \frac{4n+7}{2}, \\ (6n+7)(w-x) - 17n - 20, & \frac{4n+7}{2} \leq w-x \leq 4n. \end{cases}$$

**引理4** 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于情形3, 则:



$$\exp(D) = \begin{cases} 18n^2 + 39n + 21 - (6n+7)(z-x), & 2 \leq z-x < \frac{3n+5}{2}, \\ (6n+7)(z-x) - 12n - 14, & \frac{3n+5}{2} \leq z-x \leq 3n. \end{cases}$$

引理 5 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于情形 4, 则:

$$\exp(D) = \begin{cases} (6n+7)(z-x) - 11n - 13, & \frac{4n+7}{3} \leq z-x \leq 3n, \\ (6n+7)(w-z) - 5n - 6, & \frac{4n+4}{3} \leq w-z \leq 4n-1, \\ 24n^2 + 53n + 29 - (6n+7)(w-x), & 6 \leq w-x < \frac{8n+11}{3}. \end{cases}$$

引理 6 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于情形 5, 则:

$$\exp(D) = \begin{cases} 18n^2 + 33n + 14 - (6n+7)(y-x) - 5n - 6, & 2 \leq y-x < \frac{3n+3}{2}, \\ (6n+7)(y-x) - 6n - 7, & \frac{3n+3}{2} \leq y-x \leq 3n-1. \end{cases}$$

引理 7 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于情形 6, 则:

$$\exp(D) = \begin{cases} (6n+7)(w-y) - 11n - 13, & \frac{4n+7}{3} \leq w-y \leq 4n, \\ (6n+7)(y-x) - 5n - 6, & \frac{4n+4}{3} \leq y-x \leq 3n-1, \\ 24n^2 + 53n + 29 - (6n+7)(w-x), & 6 \leq w-x < \frac{8n+11}{3}. \end{cases}$$

引理 8 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于情形 7, 则:

$$\exp(D) = \begin{cases} (6n+7)(y-x) - 6n - 7, & \frac{3n+4}{3} \leq y-x \leq 3n-2, \\ (6n+7)(z-y) - 6n - 7, & \frac{3n+4}{3} \leq z-y \leq 3n-2, \\ 18n^2 + 39n + 21 - (6n+7)(z-x), & 4 \leq z-x < \frac{6n+8}{3}. \end{cases}$$

引理 9 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于情形 8, 则:

$$\exp(D) = \begin{cases} (6n+7)(y-x) - 5n - 6, & \frac{4n+5}{4} \leq y-x \leq 3n-2, \\ (6n+7)(z-y) - 5n - 6, & \frac{4n+5}{4} \leq z-y \leq 3n-2, \\ (6n+7)(w-z) - 5n - 6, & \frac{4n+5}{4} \leq w-z \leq 4n-3, \\ 24n^2 + 53n + 29 - (6n+7)(w-x), & 8 \leq w-x \leq \frac{12n+15}{4}. \end{cases}$$

引理 10 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于情形 9, 则:

$$\exp(D) = \begin{cases} 18n^2 + 15n - 7 - (6n+7)x, & 0 \leq x < \frac{3n-3}{2}, \\ (6n+7)x + 12n + 14, & \frac{3n-3}{2} \leq x \leq 3n-2. \end{cases}$$

引理 11 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于情形 10, 则:

$$\exp(D) = \begin{cases} 18n^2 + 33n + 14 - (6n+7)z, & 3 \leq z < \frac{3n+3}{2}, \\ (6n+7)z - 6n - 7, & \frac{3n+3}{2} \leq z \leq 3n. \end{cases}$$

引理 12 若双色有向图  $D$  是本原的, 且属于情形 11, 则:

$$\exp(D) = \begin{cases} (6n+7)(y-x) - 6n - 7, \frac{3n+4}{3} \leq y-x \leq 3n-1, \\ 18n^2 + 21n - (6n+7)y, 2 \leq y < \frac{6n+5}{3}, \\ (6n+7)x + 12n + 14, \frac{3n-5}{3} \leq x \leq 3n-3. \end{cases}$$

引理 13 若双色有向图  $D$  是本原的,且属于情形 12,则:

$$\exp(D) = \begin{cases} (6n+7)(y-x) - 6n - 7, \frac{3n+4}{3} \leq y-x \leq 3n-1, \\ 18n^2 + 33n + 14 - (6n+7)y, 3 \leq y < \frac{6n+5}{3}, \\ (6n+7)x, \frac{3n+1}{3} \leq x \leq 3n-2. \end{cases}$$

引理 14 若双色有向图  $D$  是本原的,且属于情形 13,则:

$$\exp(D) = \begin{cases} 18n^2 + 21n - (6n+7)x, 0 \leq x < \frac{3n-1}{2}, \\ (6n+7)x + 6n + 7, \frac{3n-1}{2} \leq x \leq 3n-1. \end{cases}$$

引理 15 若双色有向图  $D$  是本原的,且属于情形 14,则:

$$\exp(D) = \begin{cases} (6n+7)(y-x) - 6n - 7, \frac{3n+4}{3} \leq y-x \leq 3n-1, \\ 18n^2 + 27n + 7 - (6n+7)y, 2 \leq y < \frac{6n+2}{3}, \\ (6n+7)x + 6n + 7, \frac{3n-2}{3} \leq x \leq 3n-2. \end{cases}$$

综合定理 2~定理 8 及引理 2~引理 15,可得定理 9 这一重要结论。

定理 9 若双色有向图  $D$  是本原的,则  $D$  的指数集为

$$\begin{aligned} & \{6n^2 + 13n + 7\} \cup \{(6n+7)k_1 - 17n - 20 \mid k_1 = 10, 11, \dots, 4n\} \cup \\ & \{(6n+7)k_2 - 12n - 14 \mid k_2 = 7, 8, \dots, 3n\} \cup \{18n^2 + 39n + 21 - (6n+7)k_3 \mid k_3 = 2, 3, \dots, 2n+2\} \cup \\ & \{(6n+7)k_4 - 5n - 6 \mid k_4 = 5, 6, \dots, 4n-1\} \cup \{24n^2 + 53n + 29 - (6n+7)k_5 \mid k_5 = 6, 7, \dots, 3n+3\} \cup \\ & \{18n^2 + 33n + 14 - (6n+7)k_6 \mid k_6 = 2, 3, \dots, 2n+1\} \cup \{(6n+7)k_7 - 6n - 7 \mid k_7 = 4, 5, \dots, 3n\} \cup \\ & \{(6n+7)k_8 - 11n - 13 \mid k_8 = 6, 7, \dots, 4n\} \cup \{18n^2 + 27n + 7\} \cup \\ & \left\{18n^2 + 15n - 7 - (6n+7)k_9 \mid k_9 = 0, 1, \dots, \frac{3n}{2} - 1\right\} \cup \{(6n+7)k_{10} + 12n + 14 \mid k_{10} = 1, 2, \dots, 3n-2\} \cup \\ & \{18n^2 + 21n - (6n+7)k_{11} \mid k_{11} = 0, 1, \dots, 2n+1\} \cup \{(6n+7)k_{12} \mid k_{12} = 3, 4, \dots, 3n-2\} \cup \\ & \{18n^2 + 21n\} \cup \{18n^2 + 27n + 7 - (6n+7)k_{13} \mid k_{13} = 2, 3, \dots, 2n\} \cup \\ & \{(6n+7)k_{14} + 6n + 7 \mid k_{14} = 3, 4, \dots, 3n-1\} \cup \{24n^2 + 17n - 13\}. \end{aligned}$$

#### 参考文献:

- [1] SHADER B L, SUWILO S. Exponents of nonnegative matrix pairs[J]. Linear Algebra Appl, 2003, 363(4): 275-293.
- [2] GAO Y B, SHAO Y L. Exponent of two-colored digraphs with two cycles[J]. Linear Algebra Appl, 2009, 407(2): 263-276.
- [3] GAO Y B, SHAO Y L. Exponent of two-colored double directed cycles[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2004, 21(4): 55-58.
- [4] SHAO Y L, GAO Y B, SUN L. Exponent of a class of two-colored digraphs[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2005, 53(3): 175-188.
- [5] SUMARDI H, SUWILO S. The scrambling index of two-colored two cycles whose lengths differ by 1 [J]. Far East Journal of Mathematical Science, 2015, 96(1): 113-132.
- [6] 罗美金. 一类双色有向图本原指数上界[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(23): 1-9.

LUO M J. Upper bound on primitive exponent of two-colored digraphs[J]. Mathematics in Practice and Theory,

- 2013, 43(23):1-9.
- [7] 白竹香, 邵燕灵. 一类双色有向图的指数[J]. 中北大学学报(自然科学版), 2007, 28(2):100-103.
- BAI Z X, SHAO Y L. Exponents of a class of two-colored digraphs[J]. Journal of North University of China(Natural Science Edition), 2007, 28(2):100-103.
- [8] 罗美金. 一类恰含一个公共点的双色有向图的本原指数集[J]. 暨南大学学报(自然科学与医学版), 2013, 34(5):483-488.
- LUO M J. The primitive exponent set of a class of two-colored digraphs with one common vertex[J]. Journal of Jinan University(Natural Science & Medicine Edition), 2013, 34(5):483-488.
- [9] 刘彩锋, 高玉斌. 只含  $n-1$  圈和  $n-2$  圈的  $n$  阶本原有向图的  $m$ -competition 指数[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2016, 33(1):41-49.
- LIU C F, GAO Y B. The  $m$ -competition indices of all primitive digraphs of order  $n$  only with  $(n-1)$ -cycles and  $(n-2)$ -cycles[J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2016, 33(1):41-49.
- [10] 罗美金, 高玉斌. 一类恰含三个圈的三色有向图的本原指数[J]. 山东大学学报(理学版), 2008, 43(1):65-72.
- LUO M J, GAO Y B. Primitive exponent of three-colored digraphs with three cycles[J]. Journal of Shandong University(Natural Science), 2008, 43(1):65-72.

## The Primitive Exponent Set of a Class of Special Nonnegative Matrix Pairs

LUO Meijin, HOU Zongyi

(School of Mathematics and Statistics, Hechi University, Yizhou Guangxi 546300, China)

**Abstract:** [Purposes] It is a brand-new research in combinatorial matrix theory to extend the exponent of traditional single nonnegative primitive matrix to the exponent of nonnegative primitive matrix pairs. [Methods] With the knowledge of graph theory, the problem of primitive exponent of nonnegative matrix pairs can be transformed into the associated directed digraph of nonnegative matrix pairs, that is two-colored digraphs. [Findings] A class of two-colored digraphs with three common arcs whose uncolored digraph has  $4n+1$  vertices and consists of one  $(3n+4)$ -cycle and one  $(n+1)$ -cycle is considered. The primitive conditions, the upper bound, the lower bound, the sets of exponent, and the characterizations of external two-colored digraphs are given. [Conclusions] The results provide a basis for the study of the exponent of nonnegative primitive matrix pairs and the exponent of nonnegative primitive matrix tuples in the general case.

**Keywords:** nonnegative; matrix pairs; primitive; exponent set

(责任编辑 黄 颖)