2017 年 3 月　重庆师范大学学报(自然科学版)　Mar. 2017
第 34 卷 第 2 期　Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)　Vol. 34 No. 2

DOI:10.11721/cqnuj20170213

二维细胞神经网络的多稳态分析*

宿　娟

(成都师范学院 数学学院，成都 611130)

摘要:【目的】通过对二维细胞神经网络的多稳态分析,得到该神经网络的多个平衡点,并得到进一步研究的启发。【方法】为了寻找系统的平衡点的位置和个数,首先根据系统中激活函数的性质,将实数平面划分成 9 个子区域。【结果】根据系统在每个子区域中是线性,找到系统在每个子区域中非退化平衡点存在的充要条件。【结论】进一步讨论 9 个平衡点同时存在的充要条件,得出该二维细胞神经网络存在 9 个非退化平衡点的充要条件。最后讨论了 9 个平衡点的定性性质,得出其中 4 个是稳定结点,4 个为鞍点,1 个为不稳定焦点或结点。

关键词:神经网络;多维态;平衡点;子区域;定性性质

中图分类号:O175.12　**文献标志码**:A　**文章编号**:1672-6693(2017)02-0067-05

细胞神经网络由美国电子学家 Chua 等人于 1988 年提出[1]。由于在图形处理、优化问题、模式识别等方面的广泛应用,细胞神经网络的研究成为了神经研究的热点,并取得了很多成果[2-12]。在神经网络应用于优化问题时,要求网络具有唯一平衡点并且全局渐近稳定。目前为止,已有很多学者对细胞神经网络存在唯一平衡点并且是全局渐近稳定进行了研究,取得了重大成果[10-12]。然而,在神经网络应用于协同记忆和模式识别时,多个平衡点的共存是网络所必备的。多稳态的神经网络描述了多个稳定状态包括稳定平衡点和周期轨的共存。目前,已有很多关于神经网络多稳态的研究[13-15]。其中,文献[13]研究了一类含光滑 S 型激活函数的神经网络,通过激活函数的性质,在系统参数满足一定条件下,作者构造了 3^n 个自映射区域,其中 n 是网络的维数。再利用 Brouwer 不动点定理,文献[13]得到该网络至少存在 3^n 个平衡点,并结合对应的线性化系统,给出其中的 2^n 个是渐近稳定的。文献[14]所研究的神经网络中激活函数是分段线性的,得到了系统具有$(2r+1)^n$ 个平衡点的充分条件,其中 n 是系统的维数,$2r$ 是激活函数的角点个数。尽管含分段线性激活函数的神经网络是非线性的,但是根据激活函数的性质可以将相空间 $\mathbf{R}^n$ 分割成多个子区域,并使得系统在每个子区域是线性的。因此对于含分段线性激活函数的神经网络,获得平衡点的准确个数及其对应的参数条件对人们认识神经网络的动力学性质有重要的作用。

受文献[14]的启发,本研究讨论二维细胞神经网络的多稳态,得到 9 个非退化平衡点存在的充要条件,并讨论了每个平衡点的定性性质。首先根据激活函数的性质将平面区域划分成 9 个子区域。由于系统在每个子区域是线性的,从而每个区域中非退化平衡点的存在即说明了唯一,并且可以得到每个子区域中非退化平衡点的存在条件。然后分析 9 个非退化平衡点共存的充要条件。最后讨论了每个平衡点的定性性质。

1 预备知识

研究如下二维神经网络:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+a_{11}g(x_1(t))+a_{12}g(x_2(t))+h_1,\\ \dot{x}_2(t)=-x_2(t)+a_{21}g(x_1(t))+a_{22}g(x_2(t))+h_2。\end{cases}\tag{1}$$

其中 $x_i(t),i=1,2,\cdots$ 表示第 i 个神经元的状态变量, $a_{ij}\in\mathbf{R},i,j=1,2,\cdots$ 表示神经元的联络权,激活函数 $g(s)=\frac{1}{2}(|s+1|-|s-1|)$,$h_i\in\mathbf{R},i=1,2$,表示外部输入。

* 收稿日期:2015-12-29　修回日期:2017-01-10　网络出版时间:2017-03-13 11:06

资助项目:国家自然科学基金(No. 61202045);成都师范学院校级项目(No. CS16ZB03)

第一作者简介:宿娟,讲师,研究方向为常微分方程的定性分析,E-mail:sujuanmath@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170313.1106.022.html

系统(1)的平衡点 $x^*:=(x_1^*,x_2^*)\in\mathbf{R}^2$ 满足

$$\begin{cases}-x_1^*+a_{11}g(x_1^*)+a_{12}g(x_2^*)+h_1=0,\\ -x_2^*+a_{21}g(x_1^*)+a_{22}g(x_2^*)+h_2=0。\end{cases}\tag{2}$$

平衡点 x^* 非退化是指系统(1)在点 x^* 的 Jacobian 矩阵可逆[15]。为了描述系统(1)的非退化平衡点的位置,根据激活函数 g 的性质,将实数平面 $\mathbf{R}^2$ 划分成如下9个区域:

$$D_{11}=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1<-1,x_2>1\},\ D_{12}=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:-1\leqslant x_1\leqslant 1,x_2>1\},$$
$$D_{13}=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1>1,x_2>1\},\ D_{21}=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1<-1,-1\leqslant x_2\leqslant 1\},$$
$$D_{22}=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:-1\leqslant x_1\leqslant 1,-1\leqslant x_2\leqslant 1\},\ D_{23}=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1>1,-1\leqslant x_2\leqslant 1\},$$
$$D_{31}=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1<-1,x_2<-1\},\ D_{32}=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:-1\leqslant x_1\leqslant 1,x_2<-1\},$$
$$D_{33}=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1>1,x_2<-1\}。$$

显然 $\mathbf{R}^2=\bigcup_{i,j=1}^{3}D_{ij}$,且任意两个区域 D_{ij} 交为空。设系统参数 $\lambda:=(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},h_1,h_2)\in\mathbf{R}^6$。

2 主要结论

在上述每个子区域 D_{ij},$i,j=1,2,3,\cdots$ 中,系统(1)均为线性的。因此在每个 D_{ij} 中,系统(1)最多存在一个非退化平衡点。从而得到系统(1)的非退化平衡点最多有9个,并且9个非退化平衡点存在的充要条件即是对每个区域中非退化平衡点存在条件交集的讨论。下面的定理1给出了系统(1)恰好存在9个非退化平衡点的充要条件,即每个区域 D_{ij} 中均存在非退化平衡点的充要条件。

定理1 系统(1)存在9个非退化平衡点当且仅当 $\{\lambda\in\mathbf{R}^6:a_{11}-|a_{12}|-1>|h_1|,-|a_{21}|+a_{22}-1>|h_2|\}$。

证明 由于系统(1)在每个区域 D_{ij} 中均是线性的,因此在每个区域 D_{ij} 中最多存在1个非退化平衡点,从而最多存在9个非退化平衡点。并且恰好9个平衡点存在的充要条件即是每个区域中均存在平衡点的充要条件。于是首先在每个区域 D_{ij} 中分别讨论非退化平衡点存在的充要条件,然后再讨论9个区域中平衡点共存的交集。

1) 若 $(x_1^*,x_2^*)\in D_{11}$,则平衡点方程(2)化为 $\begin{cases}-x_1^*-a_{11}+a_{12}+h_1=0\\ -x_2^*-a_{21}+a_{22}+h_2=0\end{cases}$。计算得到 $x_1^*=-a_{11}+a_{12}+h_1$,$x_2^*=-a_{21}+a_{22}+h_2$。根据 $(x_1^*,x_2^*)\in D_{11}$,得到

$$h_1<a_{11}-a_{12}-1,h_2>a_{21}-a_{22}+1。\tag{3}$$

系统在该平衡点 x^* 的 Jacobian 矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ 可逆,从而(3)式是区域 D_{11} 中存在唯一非退化平衡点的充要条件。同理有如下结论:$(x_1^*,x_2^*)\in D_{13}$ 且非退化当且仅当

$$h_1>-a_{11}-a_{12}-1,h_2>-a_{21}-a_{22}+1。\tag{4}$$

$(x_1^*,x_2^*)\in D_{31}$ 且非退化当且仅当

$$h_1<a_{11}+a_{12}-1,h_2<a_{21}+a_{22}-1。\tag{5}$$

$(x_1^*,x_2^*)\in D_{33}$ 且非退化当且仅当

$$h_1>-a_{11}+a_{12}+1,h_2<-a_{21}+a_{22}-1。\tag{6}$$

当 $x^*=(x_1^*,x_2^*)\in D_{12}$ 且非退化时,得到系统(1)在 x^* 的 Jacobian 矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}a_{11}-1&0\\a_{21}&-1\end{pmatrix}$ 可逆。显然该条件等价于 $a_{11}\neq 1$。此时的平衡点方程(2)转化为 $\begin{cases}(a_{11}-1)x_1^*+a_{12}+h_1=0\\ a_{21}x_1^*-x_2^*+a_{22}+h_2=0\end{cases}$。计算得到 $x_1^*=-\frac{a_{12}+h_1}{a_{11}-1}$,$x_2^*=-\frac{a_{21}(a_{12}+h_1)}{a_{11}-1}+a_{22}+h_2$。于是 $(x_1^*,x_2^*)\in D_{12}$ 且非退化,当且仅当

$$-1\leqslant\frac{a_{12}+h_1}{a_{11}-1}\leqslant 1,h_2>a_{21}\frac{a_{12}+h_1}{a_{11}-1}-a_{22}+1。\tag{7}$$

同理下列结论成立:$(x_1^*,x_2^*)\in D_{21}$ 为非退化平衡点,当且仅当

$$h_1<-a_{12}\frac{a_{21}-h_2}{a_{22}-1}+a_{11}-1,-1\leqslant\frac{a_{21}-h_2}{a_{22}-1}\leqslant 1。\tag{8}$$

$(x_1^*, x_2^*) \in D_{22}$为非退化平衡点,当且仅当

$$-1 \leqslant \frac{(1-a_{22})h_1+a_{12}h_2}{(a_{11}-1)(a_{22}-1)-a_{12}a_{21}} \leqslant 1, -1 \leqslant \frac{(1-a_{11})h_2+a_{21}h_1}{(a_{11}-1)(a_{22}-1)-a_{12}a_{21}} \leqslant 1。\tag{9}$$

$(x_1^*, x_2^*) \in D_{23}$为非退化平衡点,当且仅当

$$h_1 > a_{12}\frac{a_{21}+h_2}{a_{22}-1}-a_{11}+1, -1 \leqslant \frac{a_{21}+h_2}{a_{22}-1} \leqslant 1。\tag{10}$$

$(x_1^*, x_2^*) \in D_{32}$为非退化平衡点,当且仅当

$$-1 \leqslant \frac{a_{12}-h_1}{a_{11}-1} \leqslant 1, h_2 < -a_{21}\frac{a_{12}-h_1}{a_{11}-1}+a_{22}-1。\tag{11}$$

2) 上述就每个子区域中分别讨论了非退化平衡点存在的充要条件,下面进一步来分析这些条件的共存情况,从而得出 9 个非退化平衡点存在的充要条件。首先分析子区域 D_{11}, D_{13}, D_{31} 和 D_{33} 中非退化平衡点同时存在的条件。在这 4 个区域中,系统(1)均存在唯一非退化平衡点的充要条件是(3)～(6)式同时成立。容易验证

$$|h_1| < a_{11}-|a_{12}|-1, |h|_2 < -|a_{21}|+a_{22}-1 \tag{12}$$

是(3)～(6)式同时成立的充要条件。

然后在条件(12)式下讨论剩余子区间中非退化平衡点的存在性,即(7)～(12)式同时成立的条件。下面证明(7)式和(12)式同时成立的条件仍然为(12)式。事实上(12)式中的第一式表明 $a_{11}>1$,并且等价于

$$-1 < \frac{h_1-|a_{12}|}{a_{11}-1} < \frac{h_1+|a_{12}|}{a_{11}-1} < 1。\tag{13}$$

显然从(13)式可以得到

$$\left|\frac{h_1+a_{12}}{a_{11}-1}\right| < 1 \tag{14}$$

成立,即(7)式中的第一式成立。于是得到:若(12)式中第一式成立,则(7)式中的第一式成立。再根据(12)式中的第二式和(14)式,有

$$a_{21}\frac{a_{12}+h_2}{a_{11}-1}-a_{22}+1 \leqslant |a_{21}|-a_{22}+1 < h_2, \tag{15}$$

说明从(12)式还能得到(7)中的第二式成立。综上,当(12)式成立时,(7)式也成立。同时还可以得到(8),(10),(11)式和(12)式同时成立当且仅当(12)式成立。于是系统(1)在除去 D_{22} 以外的剩余 8 个子区域中均存在唯一非退化平衡点的充要条件是(12)式成立。

最后分析(9)和(12)式同时成立的充要条件。若(12)式成立,显然有 $a_{11}-1>|a_{12}|, a_{22}-1>|a_{21}|$,从而

$$(a_{11}-1)(a_{22}-1)-a_{12}a_{21} > 0。\tag{16}$$

当 $a_{12} \geqslant 0, a_{21} \geqslant 0$ 时,根据(12)式计算得到

$$(1-a_{22})h_1+a_{12}h_2 < (1-a_{22})(-a_{11}+a_{12}+1)+a_{12}(-a_{21}+a_{22}-1) = (a_{11}-1)(a_{22}-1)-a_{12}a_{21}, \tag{17}$$

$$(1-a_{22})h_1+a_{12}h_2 > (1-a_{22})(a_{11}-a_{12}-1)+a_{12}(a_{21}-a_{22}+1) = -(a_{11}-1)(a_{22}-1)+a_{12}a_{21}。\tag{18}$$

(16)～(18) 式表明

$$-1 < \frac{(1-a_{22})h_1+a_{12}h_2}{(a_{11}-1)(a_{22}-1)-a_{12}a_{21}} < 1。\tag{19}$$

类似地,还可以得到

$$-1 < \frac{(1-a_{11})h_2+a_{21}h_1}{(a_{11}-1)(a_{22}-1)-a_{12}a_{21}} < 1。\tag{20}$$

由此说明当 $a_{12} \geqslant 0, a_{21} \geqslant 0$ 时,(9)和(12)式同时成立的充要条件仍然为(12)式。同样的方法可以验证在 a_{12}, a_{21}的剩余 3 类情况下:即 $a_{12}<0, a_{21} \geqslant 0$,或 $a_{12} \geqslant 0, a_{21}<0$,或 $a_{12}<0, a_{21}<0$,若(12)式成立,则(9)式成立。

综上,(3)～(11)式同时成立的充要条件是(12)式成立,即系统(1)存在 9 个非退化平衡点的充要条件为(12)式。此时每个子区域 $D_{ij}, i,j=1,2,3$ 中均存在唯一平衡点。　　证毕

下面进一步来分析定理 1 中每个平衡点的定性性质。

定理 2　设$\{\lambda \in \mathbf{R}^6: a_{11}-|a_{12}|-1>|h_1|, -|a_{21}|+a_{22}-1>|h_2|\}$,则系统(1)的 9 个非退化平衡点中,子区域 D_{11}, D_{13}, D_{31} 和 D_{33} 中的平衡点是稳定的临界结点,子区域 D_{12}, D_{21}, D_{23} 和 D_{32} 中的平衡点是鞍点,子区域

D_{22}中的平衡点为不稳定的焦点或结点。

证明 1) 设 $x^*=(x_1^*,x_2^*)\in D_{11}$ 是系统(1)的平衡点。计算系统(1)在 x^* 的 Jacobian 矩阵得 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$。显然 x^* 是系统(1)的稳定临界结点。同理 D_{13},D_{31}和 D_{33}和中的平衡点也是稳定临界结点。

2) 设 $x^*=(x_1^*,x_2^*)\in D_{12}$是系统(1)的平衡点。计算系统(1)在 x^* 的 Jacobian 矩阵得 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}a_{11}-1 & 0\\ a_{21} & -1\end{pmatrix}$。根据 $\boldsymbol{J}$ 的行列式 $\det(\boldsymbol{J})=1-a_{11}<0$ 说明该平衡点是鞍点。同理 D_{21},D_{23}和 D_{32}中的平衡点也是鞍点。

3) 设 $x^*=(x_1^*,x_2^*)\in D_{22}$是系统(1)的平衡点。此时 Jacobian 矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}a_{11}-1 & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-1\end{pmatrix}$,计算得到 $\boldsymbol{J}$ 的迹和行列式分别为 $\mathrm{trace}(\boldsymbol{J})=2-a_{11}-a_{22}$,$\det(\boldsymbol{J})=(a_{11}-1)(a_{22}-1)-a_{12}a_{21}$。根据定理的参数条件得到 $\mathrm{trace}(\boldsymbol{J})<0$,$\det(\boldsymbol{J})>0$,说明 D_{22}中平衡点是不稳定的焦点或结点。 证毕

注 文献[14]中的定理 1 表明参数满足$\{\lambda\in\mathbf{R}^6: a_{11}-|a_{12}|-1>|h_1|, -|a_{21}|+a_{22}-1>|h_2|\}$是系统(1)具有 9 个平衡点的充分条件,并且给出其中 4 个是稳定的。而在本研究的定理 1 中得出该参数条件是充要的,并且在定理 2 中给出了每个平衡点的定性性质。

3 结束语

研究了二维细胞神经网络的 9 个非退化平衡点存在的充要条件。通过对此问题的探讨,得到如下两个方面的启发:首先,是否能将所得结论在 n 维系统进行推广,或者用一般的分段线性的激活函数 g 替换本研究中的特殊情况,例如文献[14]中采用的含 $2r$ 个角点的分段线性函数。其次,根据多稳态的含义,能否给出 2 个以上平衡点存在的充要条件。

参考文献:

[1] CHUA L O, YANG L. Cellular neural networks: theory[J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1988, 35: 1257-1272.

[2] CHUA L O, YANG L. Cellular neural networks: applications[J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1988, 35: 1273-1290.

[3] PETER L V, TAMAS R. Image compression by cellular neural networks[J]. IEEE Trans Circuits Syst I, 1998, 45(3): 205-215.

[4] HAN Q, LIAO X F, LI C D. Analysis of associative memories based on stability of cellular neural networks with time delay[J]. Neural Comput and Applic, 2013, 23: 237-244.

[5] 盛维涛,张文君,袁宇鹏,等. 基于自适应神经网络模糊推理系统的心电信号检测[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2015,32(6):140-144.

SHENG W T, ZHANG W J, YUAN Y P, et al. Electrocardiograph signal identification based on adaptive neuro-fuzzy inference system[J]. Journal of Chongqing Normal University(Nature Science), 2015, 32(6): 140-144.

[6] 胡晓倩,张莲,蒋东荣. 遗传神经网络在室内环境热舒适度融合评价中的应用研究[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版),2014(9):102-107.

HU X Q, ZHANG L, JIANG D R. Research on genetic neural network fusion for evaluation of indoor thermal comfort degree[J]. Journal of Chongqing University of Technology(Natural Science), 2014(9): 102-107.

[7] 张义,田爱奎,韩士元. 一种自适应的混沌粒子群优化 RBF 神经网络算法[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版),2015(11):126-130.

ZHANG Y, TIAN A K, HAN S Y. An adaptive chaotic particle swarm RBF neural network optimization algorithm[J]. Journal of Chongqing University of Technology(Natural Science), 2015(11): 126-130.

[8] 肖业鸣,张晴晴,宋黎明,等. 深度神经网络技术在汉语语音识别声学建模中的优化策略[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版),2014,26(3):373-379.

XIAO Y M, ZHANG Q Q, SONG L M, et al. Optimization of deep neural network in acoustic modeling for mandarin speech recognition[J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications(Natural Science Edition), 2014, 26(3): 373-379.

[9] 戴蓉,黄成. 基于时变神经网络的迭代学习辨识算法[J]. 重庆邮电大学学报(自然科学版),2016,28(2):265-272.

DAI R, HUANG C. Iterative learning identification algorithm based on time-varying neural network[J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2016, 28(2): 265-272.

[10] ARIK S. An analysis of global asymptotic stablity of delayed cellular neural networks[J]. IEEE Transaction on Neural Networks, 2002, 13(5): 1239-1242.

[11] ARIK S. An improved global stability result for the delayed cellular neural networks[J]. IEEE Trans Circuits

Syst I,2002,49(8):1211-1214.

[12] ZHANG Y,PHENG A H,KWONG S L. Convergence analysis of cellular neural networks with unbounded delay [J]. IEEE Trans Circuits Syst I,2001,48(6):680-687.

[13] CHENG C Y,LIN K H,SHIH C W. Multi-stability in recurrent neural networks[J]. SIAM J Appl Math,2006,66(4):1301-1320.

[14] WANG L L,LU W L,CHEN T P. Coexistence and local stability of multiple equilibria in neural networks with piecewise linear nondecreasing activation functions[J]. Neural Networks,2010,23:189-200.

[15] TAN K C,TANG H J,ZHANG W N. Qualitative analysis for the recurrent neural networks with linear threshold transfer function[J]. IEEE Trans Circuits Syst I,2005,52(5):1003-1012.

Multistability Analysis for Two Dimensional Cellular Neural Networks

SU Juan

(Department of Mathematics, Chengdu Normal University, Chengdu 611130, China)

Abstract: [**Purposes**]It focuses on the multistability analysis of two dimensional cellular neural networks. [**Methods**]Firstly, in order to locate the equilibria of the system, we partition the planar into 9 subregions according to the characteristics of activation function. [**Findings**]As the two dimensional system is linear in every subregion, conditions for the existence of exactly one equilibrium in every subregion, which is nondegenerated, can be given respectively. [**Conclusions**]Then, coexisting of 9 equilibria is analyzed, and the necessary and sufficient condition for coexistence of 9 nondegenerated equilibria for the two dimensional system is proposed. Finally, the qualitative properties of each equilibrium in the 9 subregions is discussed, and there are 4 stable nodes, 4 saddle points and 1 unstable node or focus.

Keywords: neural networks; multistability; equilibria; subregion; qualitative properties

(责任编辑　游中胜)