2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20170303

在退化维修活动下具有多窗口及退化效应的单机排序问题*

赵崴羽，罗成新
(沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034)

摘要:【目的】对多窗口和具有退化效应与退化维护活动的单机排序问题进行求解。【方法】假设任务的实际加工时间是关于该任务加工位置的函数,一个窗口不能包含另一个窗口。由于机器存在退化效应,适时地对机器进行维护能提高机器的生产效率。一旦维护活动结束,机器恢复到最初状态,并且任务的退化效应更新,机器维护活动持续的时间取决于维护活动的开始时间。将所有任务分成若干个任务集,任务集个数已知,每一个任务集共用一个窗口。目标是得到每个任务集最优窗口的位置、大小和最优维护活动的位置及任务的最优加工顺序使得任务的提前惩罚费用、延误惩罚费用、窗口开始时间及宽度费用之和最小。【结果】证明了此问题可以通过转化为指派问题求得最优解。【结论】并给出一个多项式时间算法来解该问题。

关键词:排序;单机;多窗口;退化效应;退化维护

中图分类号:O223　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2017)03-0006-06

随着准时生产概念的出现,准时生产排序模型在排序研究中引起广泛关注。供应商与客户的供应合同中通常规定一个交货期,在交货期时间内,供应商应将货品提供给客户。在讨论准时生产排序问题时,交货期称为任务窗口,窗口的左端和右端分别为窗口的开始时间和结束时间。准时生产的理念是任务尽可能在窗口内加工完成。如果任务在窗口之前加工完成,由于储存等状况会引起提前惩罚;如果任务在窗口之后加工完成,超出规定的交货时间将导致延误惩罚。根据准时生产理论,任务的提前完成或者延误完成在生产过程中都不被鼓励。关于不同环境下具有窗口排序问题的研究可参考文献[1-3]。

在实际加工生产过程中,对机器进行定期检修能使机器恢复到初始状态或者提高机器的生产效率。受这种情况的影响,具有速率改变行为(RMA)的排序问题引起研究者的关注[4-14]。文献[4]研究具有固定维护时间的单机排序问题,给出了多项式算法求解该问题。最初研究具有维护活动的排序问题中,维护活动持续的时间都是固定的常数,而现实中维护活动持续时间受多种因素影响,通常假定为关于维护活动开始时间的线性函数。经典排序模型中,任务的加工时间都是固定的常数,然而考虑到学习效应、退化效应和资源分配等情况,任务的加工时间不再为固定的常数。文献[5]研究具有一个窗口且任务加工时间可变的单机排序问题,目标是得到窗口的最优位置和大小、最优压缩任务及最优排序使得提前惩罚、延误惩罚、窗口的位置与大小和加工时间之和最小。文献[7]研究在单机环境下,具有多窗口以及加工时间可变的排序问题,目标是得到最优窗口的位置和大小、每个窗口所对应的任务集、最优任务压缩和最优排序使得提前惩罚费用、延误惩罚费用、任务压缩费用和窗口费用之和最小。文献[14]研究在退化维护活动下具有多工期及退化效应的单机排序问题,目标是得到最优工期、最优维护位置使得任务提前惩罚费用、延误惩罚费用、工期费用之和最小。本文在文献[14]的基础上,考虑在退化维护活动下具有多窗口及退化效应的单机排序问题。目标是求出最优任务分组并得到每个任务集最优窗口的位置、大小和最优维护活动的位置及任务的最优加工顺序使得任务的提前惩罚费用、延误惩罚费用、窗口开始时间及宽度费用之和。并给出了多项式算法求解该问题。

1 问题描述

给定 n 个独立的任务 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$,在零时刻已全部到达,所有任务加工不可中断,在一台机器上进行

* **收稿日期**:2016-06-03　**修回日期**:2017-03-12　**网络出版时间**:2017-05-02 17:25

资助项目:国家自然科学基金(No.11171050);辽宁省教育厅项目(No.L2014433)

第一作者简介:赵崴羽,女,研究方向为应用数学,E-mail:309806781@qq.com;**通信作者**:罗成新,教授,E-mail:luochengxin@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170502.1725.044.html

加工,一次最多只能加工一个任务。如果任务 J_j 在某一排序中排在第 r 个位置,那么它的实际加工时间 $p_{jr}=p_j\cdot r^{a_j}$,$a_j(>0)$ 表示任务 J_j 的退化因子,p_j 表示任务 J_j 的正常加工时间,$j=1,\cdots,n$。给定一个排序 $\pi=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$,$d_{[i]}$ 表示多窗口的开始时间,$w_{[i]}$ 表示多窗口的结束时间,$D_{[i]}=w_{[i]}-d_{[i]}$ 表示多窗口的长度,$i=1,\cdots,m$。$C_{[j]}$ 表示任务 $J_{[j]}$ 的完工时间,$E_{[j]}=\max\{0,d_{[j]}-C_{[j]}\}$ 和 $T_{[j]}=\max\{0,C_{[j]}-w_{[j]}\}$ 分别表示任务 J_j 的提前和延误,$j=1,\cdots,n$。假定窗口个数 m 已给出,向量集$(n_1,n_2,\cdots,n_m)$ 表示 m 个给定的整数,且 $n=\sum\limits_{i=1}^{m}n_i$,$|I_i|=n_i$,$I_i$ 表示第 i 个任务集,任务集 I_i 的窗口为$[d_i,w_i]$,$|I_i|$ 表示第 i 个任务集中任务的个数。定义 $N_i=\sum\limits_{k=1}^{i}n_k$,$i=1,\cdots,m$,$N_0=0$,$N_i$ 表示前 i 个窗口所对应的任务集中任务总数之和。

维护能提高机器的生产效率。假定维护活动可以在计划范围内的任何位置进行,且维护活动的开始时间和位置未知。进一步假定:1) 维护活动后,机器恢复到初始状态并且退化效应更新。2) 机器维护时间是关于机器开始维护时间的线性函数,表示为 $f(t)=b+ct$,$b>0$,$c\geqslant 0$,t 是维护活动的开始时间。在一个排序中,若任务 J_j 排在维护活动后,则任务的实际加工时间表示为 $p_{jr}=p_j(r-h)^{a_j}$,h 表示排在维护活动之前的任务的位置,$h+1$ 表示排在维护活动后的第一个任务的位置,r 表示任务 J_j 在排序中的位置。目标是找到最优 $d=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}$,$w=\{w_1,w_2,\cdots,w_m\}$,$I=\{I_1,I_2,\cdots,I_m\}$ 和维护活动的最优位置及最优的任务排序,使得总费用 $Z=\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{J_j\in I_i}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d_{[i]}+\delta D_{[i]})$ 最小。其中,$\alpha>0$,$\beta>0$,$\gamma>0(\beta>\gamma)$,$\delta>0$。该问题用三参数描述法[15]表示为 $1|\mathrm{ma},p_{jr}=p_jr^{a_j}|\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{J_j\in I_i}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d_i+\delta D_{[i]})$,其中,ma(maintenance) 表示维护活动。

2 准备工作

引理 1　最优排序中,在机器上加工的两个连续任务之间无空闲时间,并且第一个任务从零时刻开始加工。

引理 2　任意给定 d,w 和排序 π,存在一个最优任务集划分 $I=\{I_1,I_2,\cdots,I_m\}$,使得每部分任务集 $I_i=\{J_{[N_{i-1}+1]},J_{[N_{i-1}+2]},\cdots,J_{[N_i]}\}$,$i=1,\cdots,m$。其中 $J_{[r]}$ 表示排序 π 中排在第 r 个位置的任务。

引理 2 的证明与文献[9] 中引理 1 的证明类似。

引理 3　任意给定一个排序 π,存在最优窗口$[d_i,w_i]$,且 d_i,w_i 恰好是任务集 I_i 中某个任务的完工时间,即 $d_i=C_{[k_i]}$,$w_i=C_{[k_i+q]}$,$i=1,\cdots,m$。

证明　不失一般性,假设 $i=l$,$1\leqslant l\leqslant m$,$C_{[k_l-1]}\leqslant d_l\leqslant C_{[k_l]}$,$C_{[k_{l+q}-1]}\leqslant w_l\leqslant C_{[k_{l+q}]}$,$N_{l-1}+1\leqslant k_l\leqslant N_l$。下面对 $N_{l-1}+1\leqslant h\leqslant k_l$ 这种情况进行证明,其他情况类似可证。定义

$$\Delta_1=d_l-C_{[k_l-1]},0\leqslant\Delta_1\leqslant p_{k_l}(k_l-h)^{a_{k_l}},\Delta_2=C_{[k_{l+q}]}-w_l,0\leqslant\Delta_2\leqslant p_{k_{l+q}}(k_{l+q}-h)^{a_{k_{l+q}}}。$$

机器维护活动时间为 $f(t)=b+ct=b+c(p_{[1]}+p_{[2]}2^{a_{[2]}}+p_{[3]}3^{a_{[3]}}+\cdots+p_hh^{a_h})$,总费用为:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d_i+\delta D_{[i]})=A\Delta_1+B\Delta_2+C。$$

其中

$$A=\alpha(k_l-1-N_{l-1})+n_l\gamma-n_l\delta,B=\beta(N_l-k_{l+q}+1)-\delta n_l,$$

$$C=\alpha\Big[\sum_{j=h+1}^{k_l-1}(j-N_{l-1}-1)p_j(j-h)^{a_j}+(h-N_{l-1})b+(h-N_{l-1})c\sum_{j=1}^{h}p_jj^{a_j}+\sum_{j=N_{l-1}+1}^{h}(j-N_{l-1}-1)p_jj^{a_j}\Big]+$$
$$\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i-1}\alpha(d_i-C_{[j]})+\sum_{i=l+1}^{m}\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i-1}\alpha(d_i-C_{[j]})+\sum_{j=k_{l+q}}^{N_l}(N_l-j+1)p_j(j-h)^{a_j}+$$
$$\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_{i+q}}^{N_i}\beta(C_{[j]}-w_i)+\sum_{i=l+1}^{m}\sum_{j=k_{i+q}}^{N_i}\beta(C_{[j]}-w_i)+n_l\gamma\Big[\sum_{j=h+1}^{k_l-1}p_j(j-h)^{a_j}+b+(c+1)\sum_{j=1}^{h}p_jj^{a_j}\Big]+$$

$$\sum_{i=1}^{l-1} n_i\gamma d_i + \sum_{i=l+1}^{m} n_i\gamma d_i + \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_{i+1}}^{k_{i+q}} \delta n_i p_j j^{a_j} + \sum_{i=l+1}^{m}\sum_{j=k_l}^{k_{l+q}} \delta n_i p_j (j-h)^{a_j} + \sum_{j=k_l}^{k_{l+q}} \delta n_l p_j (j-h)^{a_j}。$$

显然,A,B 和 C 独立于 Δ_1 和 Δ_2,$C>0$,为了使总费用最小,以下情况一定成立:

1) 当 $A>0,B>0$ 时,$\Delta_1=0,\Delta_2=0$;当 $A>0,B\leqslant 0$ 时,$\Delta_1=0,\Delta_2=p_{k_{l+q}}(k_{l+q}-h)^{a_{k_{l+q}}}$。

2) 当 $A\leqslant 0,B>0$ 时,$\Delta_1=p_{k_l}(k_l-h)^{a_{k_l}}$,$\Delta_2=0$;当 $A\leqslant 0,B\leqslant 0$ 时,$\Delta_1=p_{k_l}(k_l-h)^{a_{k_l}}$,对于以上情况,均能得到任务集窗口的开始时间和结束时间为某个任务的完工时间。 证毕

引理 4 任意给定排序 π,存在最优窗口的开始时间 d_i,以及结束时间 w_i,满足

$$d_i=C_{[k_i]},k_i=N_{i-1}+\lceil n_i(\delta-\gamma)/\alpha\rceil,w_i=C_{[k_{i+q}]},k_{i+q}=N_{i-1}+[n_i(\beta-\delta)/\beta],i=1,\cdots,m,$$

其中 $\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数。

引理 4 的证明与文献[4]中引理 3 的证明类似。

3 最优解

如果维护活动在窗口的开始时间 d_l 之前进行,$1\leqslant l\leqslant m$,$N_{l-1}\leqslant h\leqslant k_l$,总费用为:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d_i+\delta D_{[i]})=\sum_{i=1}^{l-1}\Big\{\sum_{j=1}^{N_{i-1}} n_i\gamma p_{[j]}j^{a_{[j]}}+$$
$$\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}[n_i\gamma+\alpha(j-N_{i-1}-1)]\,p_{[j]}j^{a_{[j]}}+\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+q}} n_i\delta p_{[j]}j^{a_{[j]}}+\sum_{j=k_{i+q}+1}^{N_i}\beta(N_i-j+1)p_{[j]}j^{a_{[j]}}\Big\}+$$
$$\sum_{j=1}^{N_{l-1}}[\beta c(N_l-h)+n_l\gamma]\,p_{[j]}j^{a_{[j]}}+\sum_{j=N_{l-1}+1}^{h}[\alpha(j-N_{l-1}-1)+\alpha(h-N_{l-1})c+n_l(1+c)\gamma]\,p_{[j]}j^{a_{[j]}}+$$
$$\sum_{j=h+1}^{k_l}[\alpha(j-1-N_{l-1})+n_l\gamma]\,p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+\sum_{j=k_l+1}^{k_{l+q}} n_l\delta p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+\sum_{j=k_{l+q}+1}^{N_l}\beta(N_l-j+1)p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+$$
$$\alpha(h-N_{l-1})b+n_l\gamma b+\sum_{i=l+1}^{m}\Big\{\sum_{j=1}^{h}[n_i\gamma(1+c)]\,p_{[j]}j^{a_{[j]}}+\sum_{j=h+1}^{N_{i-1}} n_i\gamma p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+$$
$$\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}[\alpha(j-N_{i-1}-1)+n_i\gamma]\,p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+q}} n_i\delta p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+$$
$$\sum_{j=k_{i+q}+1}^{N_i}\beta(N_i-j+1)p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+n_i\gamma b\}。$$

如果维护活动在窗口 $[d_l,w_l]$ 中进行,$1\leqslant l\leqslant m$,$k_l\leqslant h\leqslant k_{l+p}$,总费用为:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d_i+\delta D_{[i]})=\sum_{i=1}^{l-1}\Big\{\sum_{j=1}^{N_{i-1}} n_i\gamma p_{[j]}j^{a_{[j]}}+$$
$$\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}[n_i\gamma+\alpha(j-N_{i-1}-1)]p_{[j]}j^{a_{[j]}}+\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+q}} n_i\delta p_{[j]}j^{a_{[j]}}+\sum_{j=k_{i+q}+1}^{N_i}\beta(N_i-j+1)p_{[j]}j^{a_{[j]}}\Big\}+$$
$$\sum_{j=1}^{N_{l-1}}[\gamma n_l+\delta n_l(1+c)]\,p_{[j]}j^{a_{[j]}}+\sum_{j=N_{l-1}+1}^{k_l}[\alpha(j-N_{l-1}-1)+\delta n_l(1+c)+\gamma n_l]\,p_{[j]}j^{a_{[j]}}+$$
$$\sum_{j=k_l+1}^{h}[n_l\delta(1+c)]\,p_{[j]}j^{a_{[j]}}+\sum_{j=h+1}^{k_{l+q}} n_l\delta p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+\sum_{j=k_{l+q}+1}^{N_l}\beta(N_l-j+1)p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+n_l\delta b+$$
$$\sum_{i=l+1}^{m}\Big\{\sum_{j=1}^{h}[n_i\gamma(1+c)]\,p_{[j]}j^{a_{[j]}}+\sum_{j=h+1}^{N_{i-1}} n_i\gamma p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}[\alpha(j-N_{i-1}-1)+n_i\gamma]\,p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+$$
$$\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+q}}\delta n_i p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+\sum_{j=k_{i+q}+1}^{N_i}[\beta(N_i-j+1)]\,p_{[j]}(j-h)^{a_{[j]}}+\gamma n_i b\Big\}。$$

如果维护活动在窗口的结束时间 w_l 之后进行,$1\leqslant l\leqslant m$,$k_{l+q}\leqslant h\leqslant N_l$,总费用为:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d_i+\delta D_{[i]})=\sum_{i=1}^{l-1}\Big\{\sum_{j=1}^{N_{i-1}} n_i\gamma p_{[j]}j^{a_{[j]}}+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}[n_i\gamma+\alpha(j-N_{i-1}-1)]p_{[j]}j^{a_{[j]}}+$$

$$\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+q}} n_i\delta p_{[j]} j^{a_{[j]}} + \sum_{j=k_{i+q}+1}^{N_i} \beta(N_i - j + 1) p_{[j]} j^{a_{[j]}} \Big\} + \sum_{j=1}^{N_{l-1}} [n_l\gamma + \beta c(N_l - h)] p_{[j]} j^{a_{[j]}} +$$

$$\sum_{j=N_{l-1}}^{k_l} [\alpha(j - N_{l-1} - 1) + (N_l - h)\beta c + n_l\gamma] p_{[j]} j^{a_{[j]}} + \sum_{j=k_l+1}^{k_{l+q}} [(N_l - h)\beta c + n_l\delta] p_{[j]} j^{a_{[j]}} +$$

$$\sum_{j=k_{l+q}+1}^{h} [\beta(N_l - j + 1) + \beta(N_l - h)c] p_{[j]} j^{a_{[j]}} + \sum_{j=h+1}^{N_l} \beta(N_l - j + 1) p_{[j]} (j - h)^{a_{[j]}} + \beta(N_l - h)b +$$

$$\sum_{i=l+1}^{m} \Big\{ \sum_{j=1}^{h} [n_i\gamma(1 + c)] p_{[j]} j^{a_{[j]}} + \sum_{j=h+1}^{N_{i-1}} n_i\gamma p_{[j]} (j - h)^{a_{[j]}} + \sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i} [\alpha(j - N_{i-1} - 1) + n_i\gamma] p_{[j]} (j - h)^{a_{[j]}} +$$

$$\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+q}} \delta n_i p_{[j]} (j - h)^{a_{[j]}} + \sum_{j=k_{i+q}+1}^{N_i} \beta(N_i - j + 1) p_{[j]} (j - h)^{a_{[j]}} + n_i\gamma b] \Big\}。$$

对于已给定 $l(1 \leqslant l \leqslant m)$，记 $M = \begin{cases} \alpha(h - N_{l-1}) + n_l\gamma b + \sum_{i=l+1}^{m} n_i\gamma b (N_{l-1} \leqslant h < k_l) \\ n_l\delta b + \sum_{i=l+1}^{m} n_i\gamma b (k_l \leqslant h < k_{l+q}) \\ \beta(N_l - h)b + \sum_{i=l+1}^{m} n_i\gamma b (k_{l+q} \leqslant h < N_l) \end{cases}$。于是：

$$Z = \sum_{i=1}^{h} w_j p_{[j]} j^{a_{[j]}} + \sum_{i=h+1}^{n} w_j p_{[j]} (j - h)^{a_{[j]}} + M。$$

当 $N_{l-1} \leqslant h < k_l$ 时，对 $i = 1, \cdots, l - 1, w_j = \begin{cases} n_i\gamma, j = 1, 2, \cdots, N_{i-1} \\ n_i\gamma + \alpha(j - N_{i-1} - 1), j = N_{i-1} + 1, \cdots, k_i \\ n_i\delta, j = k_i + 1, \cdots, k_{i+q} \\ \beta(N_i - j + 1), j = k_{i+q} + 1, \cdots, N_i \end{cases}$；

对 $i = l, w_j = \begin{cases} n_l\gamma + (N_l - h)\beta c, j = 1, \cdots, N_{l-1} \\ \alpha(j - N_{l-1} - 1) + \alpha(h - N_{l-1})c + n_l\gamma(1 + c), j = N_{l-1} + 1, \cdots, h \\ \alpha(j - 1 - N_{l-1}), j = h + 1, \cdots, k_l \\ n_l\delta, j = k_l + 1, \cdots, k_{l+q} \\ \beta(N_l - j + 1), j = k_{l+q} + 1, \cdots, N_l \end{cases}$；

对 $i = l + 1, \cdots, m, w_j = \begin{cases} n_i\gamma(1 + c), j = 1, \cdots, h \\ n_i\gamma, j = h + 1, \cdots, N_{i-1} \\ \alpha(j - N_{i-1} - 1) + n_i\gamma, j = N_{i-1} + 1, \cdots, k_i \\ n_i\delta, j = k_i + 1, \cdots, k_{i+q} \\ \beta(N_i - j + 1), j = k_{i+q} + 1, \cdots, N_i \end{cases}$。

当 $k_l \leqslant h \leqslant k_{l+q}$ 时，对 $i = 1, \cdots, l - 1, w_j = \begin{cases} n_i\gamma, j = 1, 2, \cdots, N_{i-1} \\ n_i\gamma + \alpha(j - N_{i-1} - 1), j = N_{i-1} + 1, \cdots, k_i \\ n_i\delta, j = k_i + 1, \cdots, k_{i+q} \\ \beta(N_i - j + 1), j = k_{i+q} + 1, \cdots, N_i \end{cases}$；

对 $i = l, w_j = \begin{cases} \gamma n_l + n_l\delta(1 + c), j = 1, \cdots, N_{i-1} \\ \alpha(j - N_{l-1} - 1) + \beta n_l(1 + c) + \gamma n_l, j = N_{l-1} + 1, \cdots, k_l \\ n_l\delta(1 + c), j = k_l + 1, \cdots, h \\ n_l\delta, j = h + 1, \cdots, k_{l+q} \\ \beta(N_l - j + 1), j = k_{l+q} + 1, \cdots, N_l \end{cases}$；

$$\text{对 } i=l+1,\cdots,m,w_j=\begin{cases}n_i\gamma(1+c),j=1,\cdots,h\\ n_i\gamma,j=h+1,\cdots,N_{i-1}\\ \alpha(j-N_{i-1}-1)+n_i\gamma,j=N_{i-1}+1,\cdots,k_i\\ n_i\delta,j=k_i+1,\cdots,k_{i+q}\\ \beta(N_i-j+1),j=k_{i+q}+1,\cdots,N_i\end{cases};$$

$$\text{对 } i=1,\cdots,l-1,w_j=\begin{cases}n_i\gamma,j=1,\cdots,N_{i-1}\\ n_i\gamma+\alpha(j-N_{i-1}-1),j=N_{i-1},\cdots,k_i\\ n_i\delta,j=k_i+1,\cdots,k_{i+q}\\ \beta(N_i-j+1),j=k_{i+q}+1,\cdots,N_i\end{cases};$$

$$\text{对 } i=l,w_j=\begin{cases}n_l\gamma+\beta(N_l-h)c,j=1,\cdots,N_{i-1}\\ \alpha(j-N_{l-1}-1)+(N_l-h)\beta c+n_l\gamma,j=N_{l-1},\cdots,k_l\\ (N_l-h)\beta c+n_l\delta,j=k_l+1,\cdots,k_{l+q}\\ \beta(N_l-j+1)+\beta(N_l-h)c,j=k_{l+q}+1,\cdots,h\\ \beta(N_l-j+1),j=h+1,\cdots,N_l\end{cases};$$

$$\text{对 } i=l+1,\cdots,m,w_j=\begin{cases}n_i\gamma(1+c),j=1,\cdots,h\\ n_i\gamma,j=h+1,\cdots,N_{i-1}\\ \alpha(j-N_{i-1}-1)+n_i\gamma,j=N_{i-1}+1,\cdots,k_i\\ n_i\delta,j=k_i+1,\cdots,k_{i+q}\\ \beta(N_i-j+1),j=k_{i+q}+1,\cdots,N_i\end{cases}。$$

为了得到所求问题的最优排序,将所求问题转化为指派问题,令 x_{jr} 是一个0/1变量,如果任务 J_j 排在第 r 个位置上加工时,$x_{jr}=1$,否则,$x_{jr}=0$。给定 $l(1\leqslant l\leqslant m)$ 和 $h(N_{l-1}+1\leqslant h\leqslant N_l)$,指派问题如下:

$$\min\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{h}w_r p_j r^{a_j}x_{jr}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=h+1}^{n}w_r p_j(r-h)^{a_j}x_{jr}\right]$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{r=1}^{n}x_{jr}=1,j=1,\cdots,n;\sum_{j=1}^{n}x_{jr}=1,r=1,\cdots,n。$$
$$x_{jr}=1\text{ 或 }0,j=1,\cdots,n,r=1,\cdots,n。$$

定理1 问题 $1|\mathrm{ma},p_{jr}=p_j r^{a_j}|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha E_{[j]}+\beta T_{[j]}+\gamma d_i+\delta D_{[i]})$ 可在 $O(n^4)$ 时间内或 $O(n^{m+3})$ 时间内求出最优解。

证明 若 $|I_i|=n_i$ 提前给定,可在 $O(n^3)$ 时间内求解上述指派问题,维护活动有 n 种不同的排法,因此,该问题在 $O(n^4)$ 时间内可解。若 $|I_i|=n_i$ 未提前给定,用 $(n_1,n_2,\cdots,n_m)$ 表示分配到每个窗口的任务个数,其中 $n_i(\geqslant 1)$ 表示第 i 个窗口中任务的个数,故每个窗口中任务个数的可能取值为 $1,2,\cdots,n-m+1$。如果知道前 $m-1$ 个窗口中所对应的任务总数,由 $n=\sum_{i=1}^{m}n_i$ 可知第 m 个窗口中任务的个数,故 $(n-m+1)^{m-1}\leqslant n^{m-1}$,因此,该问题在 $O(n^{m+3})$ 时间内可解。 证毕

4 结论

本文研究了多窗口和具有退化效应与维护活动的单机排序问题。目标是得到最优窗口的位置、大小和最优维护活动的位置及任务的最优排序,使得任务的提前惩罚费用、延误惩罚费用、窗口开始时间及宽度费用之和最小,并给出了一个多项式算法求解该问题。

参考文献:

[1] LIMAN S D, PANWALKER S S, THONGMEE S. Determination of common due window location determination in a single machine scheduling problem[J]. European Journal of Operational Research, 1996, 93(1): 68-74.

[2] YEUNG W K, OGUZ C, CHENG T C E. Single-machine scheduling with a common due window[J]. Computers & Operations Research, 2001, 28(2): 157-175.

[3] JANIAK A, JANIAK W A, MAREK M. Single processor scheduling problems with various models of a due window assignment[J]. Bull Polish Acad Sci, 2009, 57(1): 95-101.

[4] MOSHEIOV G, SARIG A. Scheduling a maintenance activity and due-window assignment on a single machine[J]. Computers & Operations Research, 2009, 36(9): 2541-2545.

[5] LIMAN S D, PANWALKAR S S, THONGMEE S. A single machine scheduling problem with common due window and controllable processing times[J]. Ann Oper Res, 1997, 70: 145-154.

[6] 李韦萱，赵传立.带有机器维修和多个工期的单机排序问题[J].重庆师范大学学报(自然科学版)，2015，32(1)：22-27.
LI X W, ZHAO C L. Multiple common due-date assignment and optimal maintenance scheduling with linear deteriorating jobs[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2015, 32(1): 22-27.

[7] YANG D L, LAI C J, YANG S J. Scheduling problems with multiple due windows assignment and controllable processing times on a single machine[J]. Int J Production Economics, 2014, 150: 96-103.

[8] JI M, GE J J, CHEN K, et al. Single-machine due-window assignment and scheduling with resource allocation, aging effect, and a deteriorating rate-modifying activity[J]. Computers & Industrial Engineering, 2013, 66(4): 952-961.

[9] CHAND S, CHHAJED D. A single machine model for determination of optimal due dates and sequence[J]. Oper Res, 1992, 40(3): 596-602.

[10] SHABTAY D, STEINER G. Optimal due date assignment in multi-machine scheduling environments[J]. Sched, 2008, 11(3): 217-228.

[11] SHABTAY D. Due date assignments and scheduling a single machine with a general earliness/tardiness cost function[J]. Comput Oper Res, 2008, 35(5): 1539-1545.

[12] MOSHEIOV G, ORON D. Due-date assignment and maintenance activity scheduling problem[J]. Math Comput Model, 2006, 44(11/12): 1053-1057.

[13] 刘春来，赵传立.退化条件下具有维护活动的单机排序问题[J].重庆师范大学学报(自然科学版)，2011，28(4)：6-10.
LIU C L, ZHAO C L. The problem of single-machine scheduling with rate-modifying activities under deterioration[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2011, 28(4): 6-10.

[14] FAN Y P, ZHAO C L. Single machine scheduling with multiple common due date assignment and aging effect under a deteriorating maintenance activity consideration[J]. Appl Math Comput, 2014, 46(1): 51-66.

[15] GRAHAM R L, LAWLER E L, LENSTRA J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling[J]. A Survey Annals of Discrete Mathematics, 1979, 5(1): 287-326.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine Scheduling with Multiple Common Due-window Assignment and Aging Effect under a Deteriorating Maintenance Activity Consideration

ZHAO Weiyu, LUO Chengxin

(School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: [**Purposes**]It considers multiple common due-window assignment and single machine scheduling with a job-dependent aging effect and a deteriorating maintenance activity. [**Methods**]The processing time of a job is a function about its position and its aging factor in a sequence. Once the maintenance activity has been completed, the machine will revert to its initial condition and the aging effect will start anew, the maintenance duration depends on its starting time. All jobs were divided into some groups. Every group has a common due-window. The objective is to find the due-window position and size, the maintenance activity position and the job sequence to minimize the total of earliness, tardiness, the starting time of due-window and the size of due-window. [**Findings**]It is proved that the optimal solution can be obtained by solving the assignment problem. [**Conclusions**]It introduces an algorithm to solve the problem, and prove that the problem can be solved in polynomial time.

Keywords: scheduling; single machine; multiple common due-window; aging effect; deteriorating

(责任编辑　黄　颖)