2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20170301

带有多个工期窗口及退化维护的单机排序问题*

张浩楠, 罗成新

(沈阳师范大学 数学与系统科学学院, 沈阳 110034)

摘要:【目的】讨论带有多个工期窗口及退化维护的单机排序问题。【方法】工件的加工时间是一个和资源分配、工件在排序中的位置以及退化效应有关的凸函数。目标是确定多个最优工期窗口的位置和大小、指派给每个工期窗口的工件集合、分配给每个工件的资源、最优的维修位置和最优的工件排序,最小化提前、误工、工期窗口的开始时间、工期窗口的大小、资源分配、时间表长的总费用。【结果】证明了带有多个工期窗口及退化维护的单机排序问题仍然是多项式可解的。【结论】最优算法是可以在 $O(n^4)$ 时间内求出最优解。

关键词:单机排序;多工期窗口;可控加工时间;退化效应;退化维修

中图分类号:O223 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2017)03-0020-08

对于经典排序问题大多数作如下假设:工件的加工时间是不变的。但是在实际生产过程中这种假设条件不能总是被满足。例如由于机器老化、资源的分配等原因,工件的加工时间会发生相应的改变。由于退化效应,工件的加工时间越来越长,所以有必要进行机器维修。维修得越晚,机器老化越严重,维修所需的时间越长,即退化维修。Sidney[1]首先提出了带有工期窗口指派的单机排序问题,其目标是找到工件的最优排序及提前与误工的最小费用。Janiak 等人[2]考虑了一台机器上带有多个模型的工期窗口指派的排序问题,目标是确定提前和误工及工期窗口大小费用总和的最小值。Wang 等人[3]提出了在一台机器上带有共同工期窗口及学习效应和退化的排序问题,他们引入了算法时间复杂度为 $O(n\ \log\ n)$ 的最优解法。Kubin 和 Strusevich[4],Mosheiov 和 Sidney[5]假定维修的时间是退化的,即维修得越晚,维修的持续时间约长。本文考虑的是一台机器带有多个工期窗口及退化维护的排序问题,目标是最小化提前、误工、工期窗口的开始时间、工期窗口的大小、资源分配、时间表长的总费用。对该问题给出了时间复杂度为 $O(n^4)$ 的最优算法。

1 问题描述

设有 n 个独立的工件 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$ 在一台机器上加工,所有的工件在零时刻都已到达,且加工不可中断,机器在每个时刻至多加工一个工件。如果工件 J_j 排在第 r 个位置上,那么它的实际加工时间由 $p_{jr}(u_j)=\left(\frac{p_j r^{a_j}}{u_j}\right)^v$ 给出,其中 $a_j>0$ 表示工件 J_j 的老化因子,u_j 为分配给 J_j 的资源,k 为非负常数,p_j 是正常加工时间。

本文考虑以下假设:1) 生产期间至多有一次维修;2) 维修时,机器为空闲且不能进行加工;3) 在一个工件完工之后维修可立即进行;4) 维修后,机器立即恢复初始状态;5) 维修的时间按开始时间线性增加:$f(t)=b+ct$,其中 $b>0$ 表示基本维修时间,$c\geqslant 0$ 是维修退化率,t 是维修的开始时间。

维修是在第 h 个位置即是指在第 h 个工件完工后立即进行维修。如果工件 J_j 在第 r 个位置且在维修之后进行加工,那么它的实际加工时间由 $p_{jr}(u_j)=\left(\frac{p_j\ (r-h)^{a_j}}{u_j}\right)^v$ 给出,其中 h 为维修位置。n 个工件有 m 个不同

* **收稿日期:**2016-06-03 **修回日期:**2017-03-29 **网络出版时间:**2017-05-02 17:25

资助项目:国家自然科学基金(No.11171050);辽宁省教育厅项目(No.L2014433)

第一作者简介:张浩楠,女,研究方向为组合最优化,E-mail:zhnagnes@foxmail.com;**通信作者:**罗成新,教授,E-mail:luochengxin@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170502.1725.048.html

的工期窗口,其中 $1\leqslant m\leqslant n$。进一步假设任一个工期窗口不允许包含另外一个工期窗口。$d_i(\geqslant 0)$和 $w_i(\geqslant d_i)$分别表示工期窗口的开始时间和结束时间。$D_i=w_i-d_i$ 表示工期窗口的大小($i=1,\cdots,m$)。当 $m=1$ 时,表示所有的工件有一个共同工期窗口。当 $m=n$ 时,表示每个工件都有一个工期窗口。$I_i(i=1,\cdots,m)$表示指派给第 i 个工期窗口的工件集。工件 J_j 的提前和误工分别为 $E_j=\max\{0,d_i-C_j\}$和 $T_j=\{0,C_j-w_i\}$,其中 $J_j\in I_i$,C_j 表示工件 J_j 的完工时间。目标是确定工期窗口的开始时间 $d=\{d_1,d_2,\cdots,d_m\}$,工期窗口的大小 $D=\{D_1,D_2,\cdots,D_m\}$,指派给每个工期窗口的工件集 $I=\{I_1,I_2,\cdots,I_m\}$,分配给每个工件的资源 $u=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,维修的最优位置,最优的工件排序,使得下面的目标函数最小:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_i+\delta D_i+G_j u_j)+\theta C_{\max},$$

其中,$\alpha>0,\beta>0,\gamma>0,\delta>0,G_j>0,\theta>0$,且均是给定的常数,分别表示提前、误工、工期窗口的开始时间、工期窗口大小、资源及时间表长的单位费用。

本文考虑的是有多个工期窗口并且在期间有一次维修的单机排序问题。利用三参数表示法[6],此排序问题可记为

$$1\left|\mathrm{ma},p_{jr}(u_j)=\left(\frac{p_j r^{a_j}}{u_j}\right)^{v}\right|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_i+\delta D_i+G_j u_j)+\theta C_{\max}。$$

2 初步分析

引理 1[7]　任给出一个排序 π,最优的工期窗口的开始时间 d_i 与结束时间 w_i 都与某一个工件的完工时间是一致的。

证明　当所有工件有一个共同工期(即 $m=1$)时,Liman 等人[8]以及 Mosheiov 和 Saring[9]证明了存在最优的工期窗口的开始时间和结束时间都与某一个工件的完工时间是一致的。证明过程给出工件在加工过程是独立的,因此对于本问题该证明也同样成立。　证毕

引理 2　对于任给的 d,D,u,存在最优的 I,$I_i=(J_{[N_{i-1}+1]},J_{[N_{i-1}+2]},\cdots,J_{[N_i]})(i=1,\cdots,m)$,其中 $J_{[r]}$是排在第 r 个位置上的工件。即 n_i 个连续的工件是以同一个工期窗口为标准的。定义 $N_i=\sum_{k=1}^{i}n_k$,$(i=1,\cdots,m)$,并且 $N_0=0$,N_i 为指派给前 i 个工期窗口的工件数量总和。

证明　对于任给的 d,D,u,不失一般性,假设存在排序 $S_1=(\pi_1,J_k,J_l,\pi_2)$,工件 J_k 排在 J_l 之前。排序 $S_2=(\pi_1,J_l,J_k,\pi_2)$,工件 J_k 和 J_l 交换位置,其中 $\pi_1\pi_2$ 分别表示局部排序,在 S_1 中 J_kJ_l 分别表示排在 r 和 $r+1$ 位置的工件。进一步假设在排序 S_1 和 S_2 中,J_k 在 $i+1$ 窗口中是提前完工的;J_l 在 i 窗口中是误工的,其中 $J_k\in I_{i+1}$,$J_l\in I_i$。

令 $C_j(S_1)$和 $C_j(S_2)$分别为工件 J_j 在 S_1 和 S_2 中的完工时间。通过定义,工件 J_k 和 J_l 在 S_1 中的完工时间分别为:$C_k(S_1)=\sum_{j=1}^{r-1}p_{[j]}+p_k C_l(S_1)=\sum_{j=1}^{r-1}p_{[j]}+p_k+p_l$,类似地:$C_l(S_2)=\sum_{j=1}^{r-1}p_{[j]}+p_l C_k(S_2)=\sum_{j=1}^{r-1}p_{[j]}+p_l+p_k$。排序 S_1 的费用减 S_2 的费用:$\alpha(d_{i+1}-C_k(S_1))+\beta(C_l(S_1)-w_i)-[\alpha(d_{i+1}-C_k(S_2))+\beta(C_l(S_2)-w_i)]=\alpha p_l+\beta p_k>0$。因此 $\alpha(d_{i+1}-C_k(S_1))+\beta(C_l(S_1)-w_i)>\alpha(d_{i+1}-C_k(S_2))+\beta(C_l(S_2)-w_i)$。　证毕

引理 3　对于任给的 I,u,π,存在最优的工期窗口,使得 $d_i=C_{[k_i]}$和 $w_i=C_{[k_i+h_i]}$,其中 $k_i=N_{i-1}+\left\lceil\frac{n_i(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil$和 $k_i+h_i=N_{i-1}+\left\lceil\frac{n_i(\beta-\delta)}{\beta}\right\rceil(i=1,\cdots,m)$。其中$\lceil x\rceil$表示大于等于 x 的最小整数。

证明　当所有工件有一个共同工期窗口时,考虑最优的排序和最优的工期窗口 $C_{[k_1]}=d_1$ 和 $C_{[k_1+h_1]}=w_1$。用一个小的扰动技巧 Mosheiov 和 Saring[10],可以得到 $k_1=\left\lceil\frac{n_1(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil$和 $k_1+h_1=\left\lceil\frac{n_1(\beta-\delta)}{\beta}\right\rceil$。因为每个工期窗口之间都是互相不包含的,且每个工件在时间轴上的分布都是独立的,因此上述结论成立。　证毕

根据上述 3 个引理,能够确定第 i 个工期窗口前$(k_i-N_{i-1}-1)$个工件在 I_i 中提前完工的,后$(N_{i-1}-k_i-$

h_i)个工件在 I_i 中是误工的。

3 最优解法

3.1 $|I_i|=n_i$ 已知的情况

这一部分将确定每个工期窗口的工件集、最优的资源分配、最优的维修位置、最优的工件排序使得目标函数最小。

假设工件的排序为 $\pi=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$ 且 $|I_i|=n_i$ 已知,假设向量 $(n_1,n_2,\cdots,n_m)$ 为 m 个正整数被指定,并且 $n=\sum\limits_{i=1}^{m}n_i$,$|I_i|=n_i(i=1,\cdots,m)$。注意到虽然 $|I_i|=n_i$ 是假设已知的,但是 I_i 中具体包含的任务是未知的。

假设维修在第 l 个任务集 I_l 中工期窗口 $[d_l,w_l]$ 之前进行,即 $N_{l-1}<h<k_l$ 则有

$$
\begin{aligned}
Z={}&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_i+\delta D_i+G_ju_j)+\theta C_{\max}=\\
&\sum_{i=1}^{m}\Bigg\{\alpha\Bigg[\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}(j-1-N_{i-1})\Bigg]p_{[j]}+(h-N_{l-1})f(t)+\beta\Bigg[\sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i}(N_i-j+1)p_{[j]}\Bigg]+\\
&\gamma\Bigg[\sum_{j=1}^{k_i}p_{[j]}+(m-l+1)f(t)\Bigg]+\delta\sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i}p_{[j]}+\sum_{j=1}^{n}G_ju_j+\theta\Bigg(\sum_{j=1}^{n}p_{[j]}+f(t)\Bigg)\Bigg\}=\\
&\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha(j-N_{i-1}-1)\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=N_{l-1}+1}^{h}\alpha(j-N_{l-1}-1)\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{j=h+1}^{k_l}\alpha(j-N_{l-1}-1)\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{i=l+1}^{m}\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha(j-N_{i-1}-1)\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i}\beta(N_i-j-1)\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{i=l}^{m}\sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i}\beta(N_i-j-1)\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{k_i}\gamma\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=1}^{h-1}\gamma\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=h}^{k_l}\gamma\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i}\delta\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{i=l}^{m}\sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i}\delta\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{i=l+1}^{m}\sum_{j=1}^{k_i}\gamma\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\gamma(m-l+1)\left(b+c\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v\right)+\\
&\sum_{j=1}^{h}\theta\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=h+1}^{n}\theta\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\theta\left(b+c\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v\right)+\sum_{j=1}^{n}G_ju_j=\\
&\sum_{i=1}^{l-1}\Bigg(\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha(j-N_{i-1}-1)\left(\frac{\overline{p}_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i}\beta(N_i-j-1)\left(\frac{\overline{p}_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{j=1}^{k_i}\gamma\left(\frac{\overline{p}_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i}\delta\left(\frac{\overline{p}_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v\Bigg)+\sum_{j=N_{l-1}+1}^{h}\alpha(j-N_{l-1}-1)\left(\frac{\overline{p}_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{j=h+1}^{k_l}\alpha(j-N_{l-1}-1)\left(\frac{\overline{p}_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=k_l+h_l+1}^{N_l}\beta(N_i-j-1)\left(\frac{\overline{p}_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{j=1}^{h-1}\gamma\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=h}^{k_l}\gamma\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\theta c\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=k_l+1}^{k_l+h_l}\delta\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{j=1}^{h}\theta\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=h+1}^{n}\theta\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\gamma(m-l+1)c\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{i=l+1}^{m}\Bigg[\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha(j-N_{i-1}-1)\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i}\beta(N_i-j-1)\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i}\delta\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=1}^{k_i}\gamma\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v\Bigg]+\gamma(m-l+1)b+\theta b+\sum_{j=1}^{n}G_ju_j。
\end{aligned}
$$

假设维修在第 l 个任务集 I_l 中工期窗口$[d_l, w_l]$中进行,即 $k_l \leqslant h < k_l + h_l$ 则有

$$
\begin{aligned}
Z = {} & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in I_i} (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma d_i + \delta D_i + G_j u_j) + \theta C_{\max} = \\
& \sum_{i=1}^{m} \Bigg\{ \alpha \Bigg[\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i} (j - N_{i-1} - 1) \Bigg] p_{[j]} + \beta \Bigg[\sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i} (N_i - j + 1) p_{[j]} \Bigg] + \\
& \gamma \Bigg[\sum_{j=1}^{k_i} p_{[j]} + (m - l - 1) f(t) \Bigg] + \delta \Bigg(\sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i} p_{[j]} + f(t) \Bigg) + \sum_{j=1}^{n} G_j u_j + \theta \Bigg(\sum_{j=1}^{n} p_{[j]} + f(t) \Bigg) \Bigg\} = \\
& \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i} \alpha (j - N_{i-1} - 1) \left(\frac{\bar{p}_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{i=l+1}^{m} \sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i} \alpha (j - N_{i-1} - 1) \left(\frac{\bar{p}_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i} \beta (N_i - j + 1) \left(\frac{\bar{p}_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{i=l}^{m} \sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i} \beta (N_i - j + 1) \left(\frac{\bar{p}_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \beta (N_l - h) \left(b + c \sum_{j=1}^{h} \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v \right) + \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{k_i} \gamma \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{i=l+1}^{m} \Bigg[\sum_{j=1}^{h} \gamma \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \sum_{j=h+1}^{k_i} \gamma \left(\frac{p_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v \Bigg] + \gamma (m - l) \left(b + c \sum_{j=1}^{h} \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v \right) + \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i} \delta \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \sum_{j=k_l+1}^{h} \delta \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{j=h+1}^{k_l+h_l} \delta \left(\frac{p_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{i=l+1}^{m} \sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i} \delta \left(\frac{p_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \theta \sum_{j=1}^{h} \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \theta \sum_{j=h+1}^{n} \left(\frac{p_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \theta b + \theta c \sum_{j=1}^{h} \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{j=1}^{n} G_j u_j = \\
& \sum_{i=1}^{l-1} \Bigg(\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i} \alpha (j - N_{i-1} - 1) \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i} \beta (N_i - j + 1) \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \sum_{j=1}^{k_i} \gamma \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i} \delta \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v \Bigg) + \sum_{j=N_{l-1}+1}^{k_l} \alpha (j - N_{l-1} - 1) \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \sum_{j=k_l+h_l+1}^{N_l} \beta (N_l - j + 1) \left(\frac{p_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{j=1}^{k_l} \gamma \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{j=k_l+1}^{h} \delta \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \sum_{j=h+1}^{k_l+h_l} \delta \left(\frac{p_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{i=l+1}^{m} \Bigg[\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i} \alpha (j - N_{i-1} - 1) \left(\frac{p_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i} \beta (N_i - j + 1) \left(\frac{p_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{j=1}^{h} \gamma \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{j=h+1}^{k_i} \gamma \left(\frac{p_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i} \delta \left(\frac{p_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v \Bigg] + \beta (N_l - h) b + \beta c (N_l - h) \sum_{j=1}^{h} \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \gamma (m - l) b + \gamma (m - l) c \sum_{j=1}^{h} \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \theta \sum_{j=1}^{h} \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \theta \sum_{j=h+1}^{n} \left(\frac{p_{[j]} (r-h)^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \\
& \theta b + \theta c \sum_{j=1}^{h} \left(\frac{p_{[j]} r^{a_j}}{u_{[j]}} \right)^v + \sum_{j=1}^{n} G_j u_j 。
\end{aligned}
$$

假设维修在第 l 个任务集 I_l 中工期窗口$[d_l, w_l]$之后进行,即 $k_l + h_l \leqslant h \leqslant N_l$ 则有

$$
\begin{aligned}
Z = {} & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \in I_i} (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma d_i + \delta D_i + G_j u_j) + \theta C_{\max} = \\
& \sum_{i=1}^{m} \Bigg\{ \alpha \Bigg[\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i} (j - N_{i-1} - 1) \Bigg] p_{[j]} + \beta \Bigg[\sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i} (N_i - j + 1) p_{[j]} + (N_l - h) f(t) \Bigg] + \\
& \gamma \Bigg[\sum_{j=1}^{k_i} p_{[j]} + (m - l) f(t) \Bigg] + \delta \Bigg(\sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i} p_{[j]} \Bigg) + \sum_{j=1}^{n} G_j u_j + \theta \Bigg(\sum_{j=1}^{n} p_{[j]} + f(t) \Bigg) \Bigg\} =
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha(j-N_{i-1}-1)\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{i=l+1}^{m}\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha(j-N_{i-1}-1)\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i}\beta(N_i-j+1)\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=k_l+h_l+1}^{h}\beta(N_l-j+1)\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{j=h+1}^{N_l}\beta(N_i-j+1)\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{i=l+1}^{m}\sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i}\beta(N_i-j+1)\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\beta(N_l-h)\left(b+c\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v\right)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}\gamma\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\gamma(m-l)\left(b+c\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v\right)+\\
&\sum_{i=l+1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{h}\gamma\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=h}^{k_i}\gamma\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v\right)+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i}\delta\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{i=l+1}^{m}\sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i}\delta\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\theta\left(\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=h+1}^{n}\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v\right)+\\
&\theta\left(b+c\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v\right)+\sum_{j=1}^{n}G_{[j]}u_{[j]}=\\
&\sum_{i=1}^{l-1}\Big(\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha(j-N_{i-1}-1)\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i}\beta(N_i-j+1)\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=1}^{k_i}\gamma\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i}\delta\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v\Big)+\sum_{j=N_{l-1}+1}^{k_l}\alpha(j-N_{l-1}-1)\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=k_l+h_l+1}^{h}\beta(N_l-j+1)\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{j=h+1}^{N_l}\beta(N_l-j+1)\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\beta(N_l-h)c\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=1}^{k_l}\gamma\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\gamma(m-l)c\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=k_l+1}^{k_l+h_l}\delta\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\theta c\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\theta\sum_{j=1}^{h}\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\theta\sum_{j=h+1}^{n}\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{i=l+1}^{m}\Big(\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha(j-N_{i-1}-1)\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{j=k_i+h_i+1}^{N_i}\beta(N_i-j+1)\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=1}^{h}\gamma\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=h+1}^{k_i}\gamma\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\\
&\sum_{j=k_i+1}^{k_i+h_i}\delta\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v\Big)+\gamma(m-l)b+\theta b+\beta(N_l-h)b+\sum_{j=1}^{n}G_{[j]}u_{[j]},
\end{aligned}$$

引入记号 w_j，当 $N_{l-1}<h<k_l$ 时，$M=\gamma(m-l+1)b+\theta b$，

1) $i=1,2,\cdots,l-1,w_j=\begin{cases}\alpha(j-N_{i-1}-1)+\gamma,j=N_{i-1}+1,\cdots,k_i\\ \delta,j=k_i+1,\cdots,k_i+h_i\\ \beta(N_i-j-1),j=k_i+h_i+1,\cdots,N_i\end{cases}$

2) $i=l,w_j=\begin{cases}\theta+\theta c+\gamma(m-l+1)c,j=1,\cdots,N_{l-1}\\ \alpha(j-N_{i-1}-1)+\gamma+\theta+\theta c+\gamma(m-l+1)c,j=N_{l-1}+1,\cdots,h\\ \alpha(j-N_{i-1}-1)+\gamma+\theta,j=h+1,\cdots,k_l\\ \delta,j=k_l+1,\cdots,k_l+h_l\\ \beta(N_l-j-1),j=k_l+h_l+1,\cdots,N_l\end{cases}$

3) $i=l+1,\cdots,m,w_j=\begin{cases}\alpha(j-N_{i-1}-1)+\gamma,j=N_{i-1}+1,\cdots,k_i\\ \delta,j=k_i+1,\cdots,k_i+h_i\\ \beta(N_i-j-1),j=k_i+h_i+1,\cdots,N_i\end{cases}$

当 $k_l\leqslant h<k_l+h_l$ 时，$M=\gamma(m-l)b+\beta(N_l-h)b+\theta b$，

1) $i=1,2,\cdots,l-1,w_j=\begin{cases}\gamma,j=1,\cdots,N_{i-1}\\ \alpha(j-N_{i-1}-1)+\gamma,j=N_{i-1}+1,\cdots,k_i\\ \delta,j=k_i+1,\cdots,k_i+h_i\\ \beta(N_i-j+1),j=k_i+h_i+1,\cdots,N_i\end{cases}$

2) $i=l,w_j=\begin{cases}\gamma+\beta c+\gamma c+\theta+\theta c,j=1,\cdots,N_{l-1}\\ \alpha(j-N_{i-1}-1)+\gamma+\beta c+\gamma c+\theta+\theta c,\ j=N_{l-1}+1,\cdots,k_l\\ \delta+\gamma+\beta c+\gamma c+\theta+\theta c,j=k_l+1,\cdots,h\\ \delta+\theta,j=h+1,\cdots,k_l+h_l\\ \beta(N_l-j+1)+\theta,j=k_l+h_l+1,\cdots,N_l\end{cases}$

3) $i=l+1,\cdots,m,w_j=\begin{cases}\alpha(j-N_{i-1}-1)+\gamma,j=N_{i-1}+1,\cdots,k_i\\ \delta,j=k_i+1,\cdots,k_i+h_i\\ \beta(N_i-j+1),j=k_i+h_i+1,\cdots,N_i\end{cases}$

当 $k_l+h_l\leqslant h\leqslant N_l$ 时,$M=\gamma(m-l)b+\beta(N_l-h)b+\theta b$,

1) $i=1,2,\cdots,l-1,w_j=\begin{cases}\gamma,j=1,\cdots,N_{i-1}\\ \alpha(j-N_{i-1}-1)+\gamma,j=N_{i-1}+1,\cdots,k_i\\ \delta,j=k_i+1,\cdots,k_i+h_i\\ \beta(N_i-j+1),j=k_i+h_i+1,\cdots,N_i\end{cases}$

2) $i=l,w_j=\begin{cases}\gamma+\beta(N_l-h)c+\gamma(m-l)c+\theta+\theta c,j=1,\cdots,N_{l-1}\\ \alpha(j-N_{i-1}-1)+\gamma+\beta(N_l-h)c+\gamma(m-l)c+\theta+\theta c,j=N_{l-1}+1,\cdots,k_l\\ \delta+\beta(N_l-h)c+\gamma(m-l)c+\theta+\theta c,\ j=k_l+1,\cdots,k_l+h_l\\ \beta(N_l-j+1)+\beta(N_l-h)c+\gamma(m-l)c+\theta+\theta c,j=k_l+h_l+1,\cdots,h\\ \beta(N_l-j+1)+\theta,j=h+1,\cdots,N_l\end{cases}$

3) $i=l+1,\cdots,m,w_j=\begin{cases}\gamma,j=1,\cdots,N_{i-1}\\ \alpha(j-N_{i-1}-1)+\gamma,j=N_{i-1}+1,\cdots,k_i\\ \delta,j=k_i+1,\cdots,k_i+h_i\\ \beta(N_i-j+1),j=k_i+h_i+1,\cdots,N_i\end{cases}$

于是 $Z=\sum_{j=1}^{h}w_j\left(\frac{p_{[j]}r^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=h+1}^{n}w_j\left(\frac{p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}}\right)^v+\sum_{j=1}^{n}G_{[j]}u_{[j]}+M$。

将目标函数对 $u_{[j]}$ 求偏导使其等于零得到最优资源表达式:

$$\frac{\partial Z}{\partial u_{[j]}}=-v\cdot w_j\frac{(p_{[j]}r^{a_{[j]}})}{u_{[j]}^{v+1}}+G_j,j=1,\cdots,h;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u_{[j]}}=-v\cdot w_j\frac{[p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}]}{u_{[j]}^{v+1}}+G_j,j=h+1,\cdots,n;$$

$$u_{[j]}^{*}=\left(\frac{v\cdot w_j}{G_j}\right)^{\frac{1}{v+1}}(p_{[j]}r^{a_{[j]}})^{\frac{v}{v+1}},j=1,\cdots,h;$$

$$u_{[j]}^{*}=\left(\frac{v\cdot w_j}{G_j}\right)^{\frac{1}{v+1}}(p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}})^{\frac{v}{v+1}},j=h+1,\cdots,n。\tag{1}$$

将最优资源表达式(1)式带入目标函数,可得

$$Z=\sum_{j=1}^{h}\left\{w_j\left(p_{[j]}r^{a_{[j]}}\cdot\frac{G_{[j]}}{v\cdot w_j}\right)^{\frac{v}{v+1}}+(v\cdot w_j)^{\frac{1}{v+1}}(p_{[j]}r^{a_{[j]}}\cdot G_{[j]})^{\frac{v}{v+1}}\right\}+$$

$$\sum_{j=h+1}^{n}\left\{w_j\left(p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}\cdot\frac{G_{[j]}}{v\cdot w_j}\right)^{\frac{v}{v+1}}+(v\cdot w_j)^{\frac{1}{v+1}}(p_{[j]}(r-h)^{a_{[j]}}\cdot G_{[j]})^{\frac{v}{v+1}}\right\}+M。$$

令 x_{jr} 为 0/1 变量,当工件 J_j 排在第 r 个位置加工时 $x_{jr}=1$,否则 $x_{jr}=0$。对于给定的 $l(1\leqslant l\leqslant m)$ 和 $h(N_{l-1}+1\leqslant h\leqslant N_l)$,问题可以由以下指派问题解决。

$$\min\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{h}\left(w_r\left(p_j r^{a_j}\cdot\frac{G_j}{v\cdot w_r}\right)^{\frac{v}{v+1}}+(v\cdot w_r)^{\frac{1}{v+1}}(p_j r^{a_j}\cdot G_j)^{\frac{v}{v+1}}\right)x_{jr}+\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=h+1}^{n}\left(w_r\left(p_j(r-h)^{a_j}\cdot\frac{G_j}{v\cdot w_r}\right)^{\frac{v}{v+1}}+(v\cdot w_r)^{\frac{1}{v+1}}(p_j(r-h)^{a_j}\cdot G_j)^{\frac{v}{v+1}}\right)x_{jr}\right]$$
$$\sum_{r=1}^{n}x_{jr}=1,j=1,2,\cdots,n;\quad\sum_{j=1}^{n}x_{jr}=1,r=1,2,\cdots,n$$
$$x_{jr}=1\text{ 或 }0,j=1,2,\cdots,n,r=1,2,\cdots,n$$

定理1 问题 $1\left|ma,p_{jr}(u_j)=\left(\frac{p_j r^{a_j}}{u_j}\right)^v\right|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_i+\delta D_i+G_j u_j)+\theta C_{\max}$ 可以在 $O(n^4)$ 时间内求出最优解。

证明 首先,由指派问题求出最优的工件排序 π^*,再由(*)式求出最优的资源分配 u^*,相应的可以求出 d^*,w^*。显然,一旦维修的位置 h 被确定,可以通过指派问题在 $O(n^3)$ 时间内解决,因为 h 可以排在 m 个不同的位置且 $1\leqslant m\leqslant n$,因此问题可在 $O(n^4)$ 时间内解决。 证毕

3.2 $|I_i|=n_i$ 未知的情况

在这一部分中,考虑 $(n_1,n_2,n_3,\cdots,n_m)$ 是未知的,其中 d,D,I,π 是决策变量。根据文献[11]中,用 $P(n,m)=(n_1,n_2,n_3,\cdots,n_m)$ 表示指派给每个工期窗口的工件数量,其中 $n_i\geqslant 1$ 表示指派给第 i 个工期窗口的工件数量,并且 $n=\sum_{i=1}^{m}n_i$。注意的是,指派给每个工期窗口的工件数量可能是 $1,2,\cdots,n-m+1$,所以当知道前 $m-1$ 个工期窗口的工件数量后,那么最后一个工期窗口也相应的被确定。因此 $P(n,m)$ 的上界是 $(n-m+1)^{m-1}\leqslant n^{m-1}$。

定理2 对于给定的常数 m,如果 $|I_i|=n_i,i=1,2,3,\cdots,m$ 是未知的,那么问题 $1\left|ma,p_{jr}(u_j)=\left(\frac{p_j r^{a_j}}{u_j}\right)^v\right|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_i+\delta D_i+G_j u_j)+\theta C_{\max}$ 可以在 $O(n^{m+3})$ 时间内求出最优解。

证明 前一节提出问题 $1\left|ma,p_{jr}(u_j)=\left(\frac{p_j r^{a_j}}{u_j}\right)^v\right|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d_i+\delta D_i+G_j u_j)+\theta C_{\max}$ 可以在 $O(n^4)$ 时间内求出最优解。另外 $P(n,m)$ 的上界是 $(n-m+1)^{m-1}\leqslant n^{m-1}$。因此如果 $|I_i|=n_i,i=1,2,3,\cdots,m$ 未知时,问题可在 $O(n^{m+3})$ 时间内求出最优解。 证毕

4 结论

本文考虑的是一台机器带有多个工期窗口及退化维护的排序问题,目标是最小化提前、误工、工期窗口的开始时间、工期窗口的大小、资源分配、时间表长的总费用。对该问题给出了时间复杂度为 $O(n^4)$ 和 $O(n^{m+3})$ 的最优算法。

参考文献:

[1] SIDNEY J. Optimal single-machine scheduling with earliness and tardiness penalties[J].Oper Res,1977,25:62-69.

[2] JANIAK A,JANIAK W A,MAREK M.Single processor schedulin-gproblems with various models of a due window assignment[J].Bull Polish Acad Sci,2009,57:95-101.

[3] WANG J B,WANG C.Single-machine due-window assignment problem with learning effect and deteriorating jobs [J].Appl Math Model,2011,35:4017-4022.

[4] KUBZIN M A,STRUSEVICH V A.Planning machine maintenance in twomachine shop scheduling[J]. Operations Research,2006,54:789-800.

[5] MOSHEIOV G,SIDNEY J B.Scheduling a deteriorating main-tenance activity on a single machine[J].Journal of the Operational Research Society,2010,61:882-887.

[6] GRAHAM R L,LAWLER E L,LENSTRA J K,et al.Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling.a survey[J]. Ann Discret Math,1979,5:287-326.

[7] YANG D L, LAI C J, YANS S J. Scheduling problems with multiple due windows assignment and controllable processing times on a single machine[J]. Int J Production Economics, 2014, 150: 96-103.

[8] LIMAN S, PANWALKER S S, THONGMEE S. Common due window size and location determination in a single machine scheduling problem[J]. Oper Res Soc, 1998, 49(9): 1007-1010.

[9] MOSHEIOV G, SARING A. A due-window assignment problem with position dependent processing times[J]. Oper Res Soc, 2008, 59: 997-1003.

[10] MOSHEIOV G, SARING A. Scheduling a maintenance activity and due-window assignment on a single machine[J]. Comout Oper Res, 2009, 36: 2541-2545.

[11] YANG S J, YANG D L. Minimizing the total completion time in single-machine activities[J]. Comput Math Appl, 2010b, 60: 2161-2169.

[12] JI M, GE J J, CHEN K, et al. Single-machine due-window assignment and scheduling with resource allocation, aging effect, and a deteriorating rate-modify activity[J]. Computers & Industrial Engineering, 2013, 66: 952-961.

[13] 郭晓姣,罗成新.带有线性退化工件和退化维护时间的单机窗口排序[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版),2012,30(1):7-11.

GUO X J, LUO C X. Single-machine with due-window assignm-ent and Linear-aging jobs under a deteriorating maintenance activity[J]. Journal of ShenYang Normal University(Natural Science Edition), 2012, 30(1): 7-11.

[14] FAN Y P, ZHAO C L. Single machine scheduling with multiple common due date assignment and aging effect under a deteriorating maintenance activity Consideration [J]. Appl Math Comput, 2014, 46: 51-66.

[15] 赵升华,罗成新.带有学习及退化效应和资源分配的交货期指派的单机排序问题[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2014,31(1):20-24.

ZHAO S H, LUO C X. Single machine due date assignment and scheduling with resource allocation and aging effect[J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science), 2014, 31(1): 20-24.

Operations Research and Cybernetics

Single-machine Multiple Due-window Assignment and a Deteriorating Rate-modifying Activity

ZHANG Haonan, LUO Chengxin

(School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: [**Purposes**]It considers the multiple common due-window assignment and single machine scheduling with a job-dependent aging effect and deteriorating maintenance activity. [**Methods**]It assumes that the processing time of a job is a convex function of the amount of a resource allocated to it, its position in the processing sequence, and its aging effect. The objective is to find the optimal due-window, the optimal maintenance position so as to minimize the total cost, which is a function of earliness, tardiness, due-window starting time, due-window size, resource consumption, makespan. [**Findings**]It shows that multiple due-window assignment and a deteriorating rate-modifying activity remains polynomial time solvable. [**Conclusions**]And it introduces an efficient $O(n^4)$ algorithm to solve the problem.

Keywords: single machine scheduling; multiple common due-windows; controllable processing times; aging effect; deteriorating rating-modifying activity

(责任编辑 许 甲)