2017 年 5 月 重庆师范大学学报(自然科学版) May 2017
第 34 卷 第 3 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 34 No. 3

DOI:10.11721/cqnuj20170312

带随机利率的二维离散时的破产概率*

华志强，张春生，陈丽莹
(内蒙古民族大学 数学学院，内蒙古 通辽 028043)

摘要:【目的】讨论了一个带有随机利率的二维离散时风险模型,该模型由边际分布服从延拓正则变化族分布的随机变量组成的随机向量构造,建立一个更为符合实际需求的二维模型。【方法】借鉴求带常数利率的二维离散时风险模型中的二维有限时破产概率的方法,研究了此模型上的二维有限时破产概率问题。【结果】在给定的一些假设条件下,得到了如下带随机利率的二维离散时风险模型中关于二维有限时破产概率的一致渐近结论:当 $x\to\infty$ 时 $\varphi(\vec{x},n)\sim\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)$,其中 $x=x_1+x_2$。【结论】推广了带常数利率条件下的二维离散时风险模型中的相应结论。

关键词:破产概率;二维离散时风险模型;随机利率

中图分类号:O211.4 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2017)03-0058-06

1 预备知识

近年来,保险和金融等风险模型中一维风险模型备受关注[1-5]。但在风险发生时,由该事件所引起的保险索赔种类往往会超过一种,例如当汽车碰撞风险发生时,除了车辆险之外,还存在第三方的责任险等其他险种,所以研究多维风险模型有更强的实际意义。多维风险模型中的破产概率问题的研究比较复杂,甚至在二维情形中也是如此,多维的风险模型和二维的风险模型中的破产问题详见文献[6-8]。重尾分布是描述稀有事件的分布规律,在风险理论中,由极端的重大自然灾害而造成的保险损失理赔额一般用重尾分布来表示。

称随机变量 X(或其对应的分布函数 $F(x)=P(X\leqslant x)$)是服从重尾分布的,如果 X 不存在有限的指数矩。

称一个支撑在$[0,\infty)$上的分布函数 $F(x)$ 是属于参数为(α,β)的延拓正则变化族的,如果对于某两个常数 $0<\alpha\leqslant\beta<\infty$ 及所有的 $y\geqslant1$,有 $y^{-\beta}\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}\inf\dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}\sup\dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}\leqslant y^{-\alpha}$ 恒成立。

称分布函数 $F(x)$ 属于参数为 α 的正则变化族的,如果存在某个大于等于零的常数 α 及任意的 $y>0$,有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}=y^{-\alpha}$ 成立。延拓正则变化族和正则变化族都是重尾分布族的子族,且延拓正则变化族包含了正则变化族。

本文主要讨论延拓正则变化族上的一个二维离散时风险模型中的破产概率问题,模型中需要的假设如下。

(A1) $\{\boldsymbol{X}_k=(X_{1,k},X_{2,k})^{\mathrm{T}},1\leqslant k\leqslant n\}$ 是一个独立同分布的随机向量序列,分布与随机向量(X_1,X_2)相同,即带有相同的边际分布函数 $F_1(x)$(属于 X_1 的)和边际分布函数 $F_2(x)$(属于 X_2 的)以及联合分布函数 $F_{1,2}(x_1,x_2)=P(X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2)$,且这里随机向量$(-X_1,-X_2)$有一个链接函数 $C(\cdot,\cdot)$。

(A2) $\overline{F}_1(x)=1-F_1(x)$ 属于参数为(α,β)的延拓正则变化族的,F_1 和 F_2 是尾等价的,即存在某个常数 $c\in(0,\infty)$ 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\overline{F}_2(x)}{\overline{F}_1(x)}=c$ 成立,且对于每个分布函数 $F_i(x)$,$i=1,2$,有 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F_i(-x)}{\overline{F}_i(x)}=0$。

(A3) 存在某个常数 $\gamma\in[1,\infty)$ 及任意的 $v>0$ 使得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{C(vg(x),vf(x))}{C(g(x),f(x))}=v^{\gamma}$ 恒成立,此处 $g(x)>0$ 和 $f(x)>0$,且满足 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$。

* **收稿日期**:2016-02-01 **修回日期**:2016-12-13 **网络出版时间**:2017-05-02 17:24
资助项目:国家自然科学基金(No.81460656);内蒙古民族大学科学研究基金资助项目(No.NMDYB1436;No.NMDYB1437)
第一作者简介:华志强,男,副教授,博士研究生,研究方向为概率论与数理统计,E-mail:zqhua_imun @163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170502.1724.026.html

（A4）设$\{Y_i, i\geqslant 1\}$是取值在$[a,b]$上的独立同分布的随机变量，在保险风险模型中Y_i^{-1}代表随机利率，Y_i就是折现因子，$i=1,2,\cdots$，其中$0<a\leqslant b<\infty$。

设随机向量$\boldsymbol{X}_i=(X_{1,i},X_{2,i})^{\mathrm{T}}$代表保险公司在第$i$个时期的净损失（即整个保费索赔额减去保险的保费收入），$i\geqslant 1$。保险公司的初始资本为$\boldsymbol{x}$，记$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，其中$x_1=a_1\boldsymbol{x}$，$x_2=a_2\boldsymbol{x}$，且$a_1$和$a_2$为非负数，$a_1+a_2=1$。$\boldsymbol{U}_i$代表第$i$个时期末的资产盈余，带随机利率的离散时二维离散时风险模型可以写为

$$\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\boldsymbol{U}_i=\begin{pmatrix}U_{1,i}\\U_{2,i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\prod_{j=1}^{i}Y_j^{-1}-\sum_{k=1}^{i}X_{1,k}\prod_{j=k+1}^{i}Y_j^{-1}\\x_2\prod_{j=1}^{i}Y_j^{-1}-\sum_{k=1}^{i}X_{2,k}\prod_{j=k+1}^{i}Y_j^{-1}\end{pmatrix},i\geqslant 1。$$

进而带随机利率的二维离散时风险折现模型可以写为

$$\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\boldsymbol{U}_{i0}=\begin{pmatrix}\hat{U}_{1,i}\\\hat{U}_{2,i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-\sum_{k=1}^{i}X_{1,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j\\x_2-\sum_{k=1}^{i}X_{2,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j\end{pmatrix},i\geqslant 1。\tag{1}$$

记两类保险索赔险种的一维的破产时间分别为$T_1=\min\{n:U_{1,n}<0\}$和$T_2=\min\{n:U_{2,n}<0\}$，取$T=T_1\vee T_2$，称$\varphi(\boldsymbol{x},n)=P\left(\bigcap_{j=1}^{2}(\min_{0\leqslant i\leqslant n}\hat{U}_{j,i}<0)\,\middle|\,\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{x}\right)$为在$T$时刻发生的破产概率。

2 T 时刻的破产概率

引理 1　假设$\{\boldsymbol{X}_k=(X_{1,k},X_{2,k})^{\mathrm{T}},k\geqslant 1\}$是一个非负的随机向量，满足假设条件（A1）和（A3）。若$\{X_{1,k},k\geqslant 1\}$的共同分布$F_1(x)$属于参数为(α,β)的延拓正则变化族的，则对于任意的$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}>\boldsymbol{0}$，$\delta\geqslant 1$，$k\neq j$，有

$$\delta^{-2\beta}\leqslant\liminf_{x\to\infty}\frac{P\left(X_{1,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j>\delta x_1,X_{2,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j>\delta x_2\right)}{P\left(X_{1,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j>x_1,X_{2,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j>x_2\right)}\leqslant$$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P\left(X_{1,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j>\delta x_1,X_{2,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j>\delta x_2\right)}{P\left(X_{1,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j>x_1,X_{2,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j>x_2\right)}\leqslant\delta^{-2\alpha}\ 。$$

采用类似文献[6]的引理 2.1 的方法即可证明引理 1。

定理 1　设初始资本为$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，模型（1）满足假设条件（A1）～（A4），则对于任意固定的正整数n，当$\boldsymbol{x}\to\infty$时在T时刻发生的带有随机利率的二维破产概率为$\varphi(\boldsymbol{x},n)\sim\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)$。

证明　对于任意固定的正整数n，

$$\varphi(\boldsymbol{x},n)=P\left(\bigcap_{j=1}^{2}\left(\min_{0\leqslant i\leqslant n}\hat{U}_{j,i}<0\right)|\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{x}\right)=P\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{i}X_{1,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j>x_1,\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^{i}X_{2,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j>x_2\right)。$$

首先证明对于任意的$n\geqslant 1$，有

$$\varphi(\boldsymbol{x},n)\lesssim\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)。\tag{2}$$

由于$\{Y_j,j\geqslant 1\}$是非负的，所以有$\sum_{k=1}^{n}X_{j,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l\leqslant\max_{0\leqslant m\leqslant n}\sum_{k=1}^{m}X_{j,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l\leqslant\sum_{k=1}^{n}X_{j,k}^{+}\prod_{l=1}^{k}Y_l$，$j=1,2$。存在某个常数$v$使得$\frac{1}{2}<v<1$，$0<y_1=\frac{1-v}{n-1}<\frac{1}{n}<v$成立，于是有

$$P(S_{1,n}>x_1,S_{2,n}>x_2)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>vx_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>vx_2\right)+$$

$$P\left(S_{1,n}>x_1,S_{2,n}>x_2,\bigcap_{k=1}^{n}\left\{X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l\leqslant vx_1\right\},\bigcap_{j=1}^{n}\left\{X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l\leqslant vx_2\right\}\right)+$$

$$P\left(S_{1,n}>x_1,S_{2,n}>x_2,\bigcap_{k=1}^{n}\left\{X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_j\leqslant vx_1\right\},\bigcup_{j=1}^{n}\left\{X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>vx_2\right\}\right)+$$

$$P\left(S_{1,n}>x_1,S_{2,n}>x_2,\bigcup_{k=1}^{n}\left\{X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>vx_1\right\},\bigcap_{j=1}^{n}\left\{X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l\leqslant vx_2\right\}\right)=:P_1+P_2+P_3+P_4\text{。}$$

首先,由延拓正则变化族的定义、假设条件(A2)和引理1知,对于$\frac{1}{2}<v<1$有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>vx_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>vx_2\right)}{P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)}\leqslant\begin{cases}v^{-2\beta},k\neq j,\\ v^{-\beta\gamma},k=j\text{。}\end{cases}\tag{3}$$

因此有

$$\lim_{v\to1}\limsup_{x\to\infty}\frac{P_1}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{j=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,l}\prod_{j=1}^{l}Y_j>x_2\right)}=1\text{。}\tag{4}$$

其次,

$$P_2=P\left(S_{1,n}>x_1,S_{2,n}>x_2,\bigcap_{k=1}^{n}\left\{X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l\leqslant vx_1\right\},\bigcap_{j=1}^{n}\left\{X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l\leqslant vx_2\right\},\right.$$
$$\left.\max_{1\leqslant k\leqslant n}X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>\frac{x_1}{n},\max_{1\leqslant j\leqslant n}X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>\frac{x_2}{n}\right)\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(S_{1,n}>x_1,S_{2,n}>x_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l\leqslant vx_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l\leqslant vx_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>\frac{x_1}{n},X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>\frac{x_2}{n}\right)\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(\sum_{s_1\neq k}X_{1,s_1}\prod_{l=1}^{s_1}Y_l>(1-v)x_1,\sum_{s_2\neq k}X_{2,s_2}\prod_{l=1}^{s_2}Y_l>(1-v)x_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>\frac{x_1}{n},X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>\frac{x_2}{n}\right)=$$
$$E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(\sum_{s_1\neq k}X_{1,s_1}\prod_{l=1}^{s_1}Y_l>(1-v)x_1,\sum_{s_2\neq k}X_{2,s_2}\prod_{l=1}^{s_2}Y_l>(1-v)x_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>\frac{x_1}{n},X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>\frac{x_2}{n}\mid\boldsymbol{F}_\Theta\right)\right]\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s_1\neq k}\sum_{s_2\neq j}E\left[P\left(X_{1,s_1}\prod_{l=1}^{s_1}Y_l>y_1x,X_{2,s_2}\prod_{l=1}^{s_2}Y_l>y_1x_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_1x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_1x_2\mid\boldsymbol{F}_\Theta\right)\right]\text{。}\tag{5}$$

由(3),(5)式可得:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P_2}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)}=0\text{。}\tag{6}$$

对于P_3,有:

$$P_3\leqslant P\left(S_{1,n}>x_1,\bigcap_{k=1}^{n}\left\{X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l\leqslant vx_1\right\},\bigcup_{j=1}^{n}\left\{X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>vx_2\right\},\max_{1\leqslant k\leqslant n}X_{1,k}\prod_{j=1}^{k}Y_j>\frac{x_1}{n}\right)\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(S_{1,n}>x_1,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l\leqslant vx_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>vx_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>\frac{x_1}{n}\right)\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(\sum_{s_1\neq k}X_{1,s_1}\prod_{l=1}^{s_1}Y_l>(1-v)x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>vx_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>\frac{x_1}{n}\right)\leqslant$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s_1\neq k}E\left[P\left(X_{1,s_1}\prod_{l=1}^{s_1}Y_l>y_1x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_1x_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_1x_1\mid\boldsymbol{F}_\Theta\right)\right]\text{。}$$

其中,$\boldsymbol{F}_\Theta=\boldsymbol{F}_\Theta(Y_1,Y_2,\cdots,Y_n)$。类似于(6)式,有

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P_3}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)}=0\text{。}\tag{7}$$

同上,对于P_4有:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P_4}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)}=0。\tag{8}$$

由 $P\left(X_{1,k}^{+}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}^{+}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)=P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)$ 及(4)式、(6)～(8)式可得证(2)式。

接下来证明对于任意的 $n\geqslant1$，有

$$\varphi(\boldsymbol{x},n)\geqslant P\left(\sum_{k=1}^{n}X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,\sum_{j=1}^{n}X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)\gtrsim\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)。\tag{9}$$

当 $n=1$ 时，(9)式成立。现在当 $n\geqslant2$ 时，令常数 $y_2>1$，$w=\dfrac{y_2-1}{n-1}$，则 $w>0$。设

$$Q_{1n}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(\sum_{k=1}^{n}X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,\sum_{k=1}^{n}X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\right),$$

$$Q_{2n}=\sum_{k_1\neq k_2}\sum_{j=1}^{n}P\left(\sum_{k=1}^{n}X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,\sum_{k=1}^{n}X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_2,X_{1,k_1}\prod_{l=1}^{k_1}Y_l>y_2x_1,\right.$$
$$\left.X_{1,k_2}\prod_{l=1}^{k_2}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\right),$$

$$Q_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j_1\neq j_2}P\left(\sum_{k=1}^{n}X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,\sum_{k=1}^{n}X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,j_1}\prod_{l=1}^{j_1}Y_l>y_2x_1,X_{2,j_2}\prod_{l=1}^{j_2}Y_l>y_2x_2\right)。$$

于是有

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,\sum_{j=1}^{n}X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)\geqslant$$
$$P\left(\sum_{k=1}^{n}X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,\sum_{j=1}^{n}X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2,\max_{1\leqslant k\leqslant n}X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,\max_{1\leqslant j\leqslant n}X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\right)=$$
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,\sum_{j=1}^{n}X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\right\}\right)\geqslant Q_{1n}-Q_{2n}-Q_{3n}。$$

对于 Q_{1n}，有：

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(\sum_{k=1}^{n}X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,\sum_{k=1}^{n}X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_2,X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\right)\geqslant$$
$$E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{1,s_1}\prod_{l=1}^{s_1}Y_l>-wx_2,1\leqslant s_1\neq k\leqslant n,\right.\right.$$
$$\left.\left.X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2,X_{2,s_2}\prod_{l=1}^{s_2}Y_l>-wx_2,1\leqslant s_2\neq j\leqslant n\mid\boldsymbol{F}_\Theta\right)\right]=$$
$$\sum_{k\neq j}E\left[P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2,X_{1,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>-wx_1,X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>-wx_2,\right.\right.$$
$$\left.\left.X_{1,s_1}\prod_{l=1}^{s_1}Y_l>-wx_1,X_{2,s_2}\prod_{l=1}^{s_2}Y_l>-wx_2,k,j\neq s_1,k,j\neq s_2\mid\boldsymbol{F}_\Theta\right)\right]+\sum_{k=1}^{n}E\left[P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,\right.\right.$$
$$\left.\left.X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_2,X_{1,s_1}\prod_{l=1}^{s_1}Y_l>-wx_1,X_{2,s_2}\prod_{l=1}^{s_2}Y_l>-wx_2,s_1,s_2\neq k\mid F_\Theta\right)\right],\tag{10}$$

由假设条件(A1)知，(10)式右端第一个和等价于

$$\sum_{k\neq j}E\left[P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2,X_{1,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>-wx_1,X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>-wx_2\mid\boldsymbol{F}_\Theta\right)\times\right.$$
$$\left.\prod_{s\neq k,j}P\left(X_{1,s}\prod_{l=1}^{s}Y_l>-wx_1,X_{2,s}\prod_{l=1}^{s}Y_l>-wx_2\mid\boldsymbol{F}_\Theta\right)\right]。$$

(10)式右端第二个和等价于

$$\sum_{k=1}^{n}E\left[P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_2\mid\boldsymbol{F}_\Theta\right)\prod_{s\neq k}P\left(X_{1,s}\prod_{l=1}^{s}Y_l>-wx_1,X_{2,s}\prod_{l=1}^{s}Y_l>-wx_2\mid\boldsymbol{F}_\Theta\right)\right]。$$

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}P\left(X_{1,s}\prod_{l=1}^{s}Y_l>-wx_1,X_{2,s}\prod_{l=1}^{s}Y_l>-wx_2\mid\boldsymbol{F}_\Theta\right)=1$，所以对于 $k\neq j$，有

$$E\Big[P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2,X_{1,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>-wx_1,X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>-wx_2\mid \boldsymbol{F}_\Theta\Big)\Big]=$$

$$E\Big[P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>-wx_2\mid \boldsymbol{F}_\Theta\Big)P\Big(X_{1,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>-wx_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\mid \boldsymbol{F}_\Theta\Big)\Big]=$$

$$E\ \Big[\Big(P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1\mid \boldsymbol{F}_\Theta\Big)-P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l\leqslant -wx_2\mid \boldsymbol{F}_\Theta\Big)\Big)\times$$

$$\Big(P\Big(X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\mid \boldsymbol{F}_\Theta\Big)-P\Big(X_{1,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l\leqslant -wx_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\mid \boldsymbol{F}_\Theta\Big)\Big)\Big]。$$

进而由假设条件(A2)及 Fatou 引理有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l\leqslant -wx_2\Big)}{P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1\Big)}\leqslant\lim_{x\to\infty}\frac{P\Big(X_{2,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l\leqslant -wx_2\Big)}{P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1\Big)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\int_{a^k}^{b^k}\frac{P\Big(X_{2,k}\leqslant\frac{-wx_2}{t}\Big)}{P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>\frac{x_1}{t}\Big)}\mathrm{d}P\Big(\prod_{l=1}^{k}Y_l\in t\Big)=0。\tag{11}$$

同理有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P\Big(X_{1,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l\leqslant -wx_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\Big)}{P\Big(X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\Big)}=0。\tag{12}$$

因此由延拓正则变化族的定义、假设条件(A2)和引理 1 知,对于 $y_2>1$ 有

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\Big)}{P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\Big)}\geqslant\begin{cases}y_2^{-2\beta},\ k\neq j,\\ y_2^{-\beta\gamma},\ k=j。\end{cases}\tag{13}$$

和

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\Big)}{P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\Big)}\leqslant\begin{cases}y_2^{-2\alpha},\ k\neq j,\\ y_2^{-\alpha\gamma},\ k=j。\end{cases}\tag{14}$$

由(11)～(13)式有

$$\lim_{y_2\downarrow 1}\liminf_{x\to\infty}\frac{Q_{1n}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\Big)}\geqslant 1。\tag{15}$$

对于 Q_{2n},由于

$$Q_{2n}\leqslant\sum_{k_1\neq k_2}\sum_{j=1}^{n}P\Big(X_{1,k_1}\prod_{l=1}^{k_1}Y_l>y_2x_1,X_{1,k_2}\prod_{l=1}^{k_2}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\Big)=$$

$$\sum_{k_1\neq k_2,j\neq k_1}E\Big[P\Big(X_{1,k_1}\prod_{l=1}^{k_1}Y_l>y_2x_1\mid \boldsymbol{F}_\Theta\Big)P\Big(X_{1,k_2}\prod_{l=1}^{k_2}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\mid \boldsymbol{F}_\Theta\Big)\Big]+$$

$$\sum_{k_1\neq k_2,j=k_1}E\Big[P\Big(X_{1,k_2}\prod_{l=1}^{k_2}Y_l>y_2x_1\mid \boldsymbol{F}_\Theta\Big)P\Big(X_{1,k_1}\prod_{l=1}^{k_1}Y_l>y_2x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>y_2x_2\mid \boldsymbol{F}_\Theta\Big)\Big]。\tag{16}$$

由(14),(16)式及 Fatou 引理,有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Q_{2n}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\Big(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\Big)}=0。\tag{17}$$

同上，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Q_{3n}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1,X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)}=0。\tag{18}$$

由(15)，(17)～(18)式可知(9)式成立，故定理得证。　证毕

参考文献：

[1] 华志强，宋立新，冯敬海.UEND 和 φ-混合随机变量随机和的精确大偏差[J].大连理工大学学报，2014，54(3)：371-376.
HUA Z Q，SONG L X，FENG J H.Precise large deviations for random sum of UEND and φ-mixing random variables[J]. Journal of Dalian University of Technology，2014，54(3)：371-376.

[2] 华志强.D 族 END 随机变量的随机和的精确大偏差[J].应用泛函分析学报，2015，17(4)：354-360.
HUA Z Q.Precise large deviations for random sum of END random variables with dominatedly varying tails[J]. Acta Analysis Functionalis Applicata，2015，17(4)：354-360.

[3] 华志强，宋立新，冯敬海，等.索赔盈余风险模型中精确大偏差[J].大连理工大学学报，2016，56(1)：64-69.
HUA Z Q，SONG L X，FENG J H，et al.Precise large deviations for claim surplus risk model[J].Journal of Dalian University of Technology，2016，56(1)：64-69.

[4] 华志强，张春生.推广的延拓负相依风险模型中的精确大偏差[J].重庆师范大学学报(自然科学版)，2016，33(2)：38-42.
HUA Z Q，ZHANG C S.Precise large deviations for generalized extended negatively dependent compound renewal risk model[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2016，33(2)：38-42.

[5] ZHANG Y，SHEN X M，WENG C G.Approximation of the tail probability of randomly weighted sums and applications[J].Stochastic Processes and Their Applications，2009，119(2)：655-675.

[6] SHEN X M，ZHANG Y.Ruin probabilities of a two-dimensional risk model with dependent risks of heavy tail[J].Statistics and Probability Letter，2013，83(7)：1787-1799.

[7] 华志强.多元重尾大偏差及位相型破产概率[M].哈尔滨：地图出版社，2013.
HUA Z Q.Large deviations of random variables with heavy tail in a multi-risk model and ruin probability for risk model with phase-type claims[M]. Harbin：Cartographic Publishing House，2013.

[8] 薛冬梅，华志强.多元风险模型中的长尾 END 的精确大偏差下界[J].重庆师范大学学报(自然科学版)，2016，33(1)：67-72.
XUE D M，HUA Z Q.Lower bounds of precise large deviations for sums of long-tails and END random variables in a multi-risk model[J].Journal of Chongqing Normal University(Natural Science)，2016，33(1)：67-72.

Ruin Probability of a Two-dimensional Discrete Time Risk Model with Random Interest Rates

HUA Zhiqiang，ZHANG Chunsheng，CHEN Liying

(College of Mathematics，Inner Mongolia University for the Nationalities，Tongliao Inner Mongolia 028043，China)

Abstract：[**Purposes**]It talks about a two-dimensional discrete time risk model with random interest rates，which is constructed by the two-dimensional random vectors that be composed of the marginal distributions of random variables are extended regularly varying，and set up a more actual demand two-dimensional model. [**Methods**]Study the issue of the finite-time ruin probability in this two-dimensional model by using the similar method to find the two-dimensional finite-time ruin probability in a two-dimensional discrete time risk model. [**Findings**]Under some given assumptions，the following uniformly asymptotic result about the two-dimensional finite-time ruin probability is established by using the similar method to find the two-dimensional finite-time ruin probability in a two-dimensional discrete time risk model with constant interest rates：as $\boldsymbol{x}\to\infty$，$\varphi(\boldsymbol{x}，n)\sim\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P\left(X_{1,k}\prod_{l=1}^{k}Y_l>x_1，X_{2,j}\prod_{l=1}^{j}Y_l>x_2\right)$，here $\boldsymbol{x}=x_1+x_2$. [**Conclusions**]This result generalizes the corresponding result in a two-dimensional discrete time risk model with constant interest rates.

Keywords：ruin probability；two-dimensional discrete time risk model；random interest rate

(责任编辑　黄　颖)