DOI:10.11721/cqnuj20170309

一类具有非线性发生率的 SIR 模型的稳定性和 Hopf 分支*

豆中丽[1]，赵良余[2]

(1. 重庆工商大学 融智学院，重庆 400055；2. 重庆商务职业学院 财务处，重庆 401331)

摘要:【目的】研究了一类具有非线性发生率的 SIR 传染病模型，分析该系统在非平凡平衡点处的稳定性和 Hopf 分支。【方法】运用正规形理论和中心流形投影定理，讨论了该系统在平衡点处的稳定性。【结果】得到第一 Laypunov 系数，当 $l_1(0)>0$时，该系统是不稳定的亚临界分支；当 $l_1(0)<0$ 时，该系统是稳定的超临界分支。【结论】得到了系统在非平凡平衡点附近会产生唯一、稳定的极限环，此时传染病会发生但不会大规模流行。

关键词:非线性发生率；非平凡平衡点；Hopf 分支；中心流行投影定理

中图分类号:O175.13　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2017)03-0079-06

传染病的研究早在 1932 年就开始了，如 Kermack 和 Mckendrick 提出了著名的 SIS 仓室模型，随后许多学者作了进一步研究，如文献[1]中研究关于无出生率及有潜伏期的以上模型。文献[2] 中研究了一类带有非线性接触率的 SIR 传染病模型的稳定性，讨论了传染病模型解的正性和最终有界性，证明了无病平衡点的全局稳定性。具有种群 Logistic 增长的传染病动力学模型已经有众多学者进行了研究。文献[3] 中讨论了一类具有 H-V 型功能性反应函数的模型，讨论了系统的平衡点的稳定性[4]；文献[5] 中讨论了一类具两斑块效应的 SIS 传染病模型的稳定性分析，讨论了模型阈值条件以及地方平衡点局部渐进稳定性并给出了数值模拟验证理论结果的正确性；Anderson 等人讨论了一类具有线性发生率的 SIR 传染病模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\alpha SI+\mu-\mu S,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\alpha SI-rI-\mu I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=rI-\mu R。\end{cases}$$

其中，$S(t)$，$I(t)$，$R(t)$分别表示易感者、染病者和恢复者在 t 时刻占总人口的比例，这里所有的参数都是正的常数。μ 表示人口的出生率(死亡率)，α 表示传染率，r 表示患病者的恢复率。文献[6] 中分别用不同的方法讨论系统的平衡点及稳定性，并给出了数值模拟。本研究在上述文献的基础上进行了改进，考虑了一个更接近实际且复杂的非线性发生率的 SIR 传染病模型：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=rS(1-\dfrac{S}{K})-\beta IS^2+cI,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta IS^2-dI-cI-\mu I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\mu I-dR。\end{cases}\tag{1}$$

其中，$S(t)$，$I(t)$，$R(t)$分别表示 t 时刻易感者、感染者和恢复者的数量，r 为内禀自然增长率，K 为环境容纳量，β 为传染率，c 为恢复率，d 为死亡率，μ 为移出率，系统中所有参数均为正值。本研究利用中心流行计算的投影法详细讨论了此系统的正平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性，利用第一 Laypunov 系数分析了该系统在非平凡平衡点附近产生的分支是亚临界分支还是超临界分支的情形。

* **收稿日期**:2015-09-14　　**修回日期**:2016-12-13　　**网络出版时间**:2017-05-02 17:25

资助项目:国家自然科学基金(No.11304403)

第一作者简介:豆中丽，女，研究方向为常微分方程和动力系统，E-mail:1343639662@qq.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170502.1725.032.html

根据生态学意义可知,模型的初始条件为:$G\{(X,Y)\mid X(0)=X_0>0,Y(0)=Y_0>0\}$。

1 平衡点的存在性和稳定性分析

本节讨论系统(1)在 G 内总存在无病平衡点 $E_0(0,0,0)$ 和 $E_1(K,0,0)$;然后讨论系统平衡点的存在唯一性,其次给出系统非平衡点的稳定性分析。

定理1 系统满足初始条件的解为正且是有界的。

定理1利用比较原理可证得。

定理2 当 $K^2>\frac{d+c+\mu}{\beta}$ 时,系统在 G 内存在唯一的非平凡平衡点 $E_2(S^*,I^*,R^*)$,$S^*=\frac{\sqrt{d+c+\mu}}{\sqrt{\beta}}$,$I^*=\frac{r\sqrt{d+c+\mu}}{(d+u)\sqrt{\beta}}\left(1-\frac{\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}}\right)$,$R^*=\frac{\mu r\sqrt{d+c+\mu}}{d(d+\mu)\sqrt{\beta}}\left(1-\frac{\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}}\right)$。

应用线性方程组求解可证明定理2,故将其证明略去。

定理3 无病平衡点 $E_0(0,0,0)$ 是不稳定的。

证明 系统(1)在 $E_0(0,0,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为:$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix} r & c & 0\\ 0 & -d-c-\mu & 0\\ 0 & \mu & -d\end{pmatrix}$,则系统(1)所对应的特征方程为:$(\lambda-r)(\lambda+d+c+\mu)(\lambda+d)=0$,特征值 $\lambda_1=r>0$;$\lambda_2=r-(d+c+\mu)<0$;$\lambda_3=-d<0$,故 $E_0(0,0,0)$ 是不稳定的,为鞍点。 证毕

定理4 当 $\beta<\frac{d+c+\mu}{K^2}$ 时,无病平衡点 $E_1(K,0,0)$ 是局部渐近稳定的。

证明 系统(1)在 $E_1(K,0,0)$ 处的 Jacobi 矩阵为:$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} -r & -\beta K^2+c & 0\\ 0 & \beta K^2-d-c-\mu & 0\\ 0 & \mu & -d\end{pmatrix}$,则系统(3)所对应的特征方程为:$(\lambda+r)(\lambda-\beta K^2+d+c+\mu)(\lambda-d)=0$,特征值 $\lambda_1=-r<0$;$\lambda_2=-d<0$;$\lambda_3=\beta K^2-d-c-\mu$;又因为 $\beta<\frac{d+c+\mu}{K^2}$,从而有 $\beta K^2-d-c-\mu<0$,所以 λ_3 为负实根。故无病平衡点 $E_1(K,0,0)$ 是局部渐近稳定的。

证毕

定理5 当 $K^2>\frac{d+c+\mu}{\beta}$,$\sqrt{\beta}<\frac{2cr\sqrt{d+c+u}}{K[(d+u)-r(d+2c+u)]}$ 且 $K\sqrt{\beta}<\frac{2r\ (d+c+u)^{\frac{3}{2}}}{2r(d+c+u)-1}$ 时,则系统在非平凡平衡点 $E_2(S^*,I^*,R^*)$ 是局部渐近稳定的。

证明 系统(1)在 $E_2(S^*,I^*,R^*)$ 处的 Jacobi 矩阵为:

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} \frac{-r(d+2c+\mu)}{d+\mu}+\frac{2cr\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}(d+\mu)} & -(d+\mu) & 0\\ \frac{2r(d+c+\mu)}{d+\mu}\left(1-\frac{\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}}\right) & 0 & 0\\ 0 & \mu & -d\end{pmatrix},$$

此时系统由特征方程 $(\lambda+d)(\lambda^2-T\lambda+D)=0$ 的特征根所决定。

令 $f(\lambda)=\lambda^2-T\lambda+D$,其中 $T=\frac{-r(d+2c+\mu)}{d+\mu}+\frac{2cr\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}(d+\mu)}$,$D=2r(d+c+\mu)\left(1-\frac{\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}}\right)$。由文献中非平凡平衡点稳定性条件可知:非平凡平衡点 $E_2(S^*,I^*,R^*)$ 是渐近稳定性的条件是:

$$\lambda_1=-d<0,f(1)=1-T+D>0,f(-1)=1+T+D>0,D<1。$$

通过计算可知,当 $K^2>\frac{d+c+\mu}{\beta}$ 时,

$$f(1)=1-T+D=1+\frac{r(d+2c+\mu)}{d+\mu}-\frac{2cr\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}(d+\mu)}+2r(d+c+\mu)\left(1-\frac{\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}}\right)=$$

$$1+\frac{K\sqrt{\beta}r(d+2c+\mu)-2cr\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}(d+\mu)}+2r(d+c+\mu)\left(1-\frac{\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}}\right)>0。$$

当$\sqrt{\beta}<\dfrac{2cr\sqrt{d+c+u}}{K[(d+u)-r(d+2c+u)]}$,可以得到:

$$f(-1)=1+T+D=1-\frac{r(d+2c+\mu)}{d+\mu}+\frac{2cr\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}(d+\mu)}+2r(d+c+\mu)\left(1-\frac{\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}}\right)=$$

$$\frac{K\sqrt{\beta}(d+u)-K\sqrt{\beta}r(d+2c+u)+2cr\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}(d+\mu)}+2r(d+c+\mu)\left(1-\frac{\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}}\right)>0。$$

当 $K\sqrt{\beta}<\dfrac{2r\ (d+c+u)^{\frac{3}{2}}}{2r(d+c+u)-1}$时,可以得到 $D=2r(d+c+\mu)\left(1-\dfrac{\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}}\right)<1$。因此可以得到内禀增长率对非平凡平衡点局部渐近稳定性的影响。　　证毕

定理 6　当$\dfrac{\sqrt{d+c+\mu}}{K}<\sqrt{\beta}<\dfrac{2c\sqrt{d+c+\mu}}{K(d+2c+\mu)}=\beta_0$ 时,系统在非平凡平衡点 $E_2(S^*,I^*,R^*)$附近产生 Hopf 分支[7],则系统(1)所对应的特征方程为$(\lambda+d)(\lambda^2-T\lambda+D)=0$,特征值 $\lambda_1=-d$,$\lambda_2=\dfrac{T-\sqrt{T^2-4D}}{2}$,$\lambda_3=\dfrac{T+\sqrt{T^2-4D}}{2}$,$T=\dfrac{-r(d+2c+\mu)}{d+\mu}+\dfrac{2cr\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}(d+\mu)}$,$D=2r(d+c+\mu)\times\left(1-\dfrac{\sqrt{d+c+\mu}}{K\sqrt{\beta}}\right)>0$。当$\dfrac{\sqrt{d+c+\mu}}{K}<\sqrt{\beta}<\dfrac{2c\sqrt{d+c+\mu}}{K(d+2c+\mu)}=\beta_0$ 时,很容易看出特征值有纯虚部。这里$\sqrt{\beta}=\beta_0=\dfrac{2c\sqrt{d+c+\mu}}{K(d+2c+\mu)}$,因此特征方程有一对共轭复根。特征值为 $\lambda_{2,3}=\pm i\omega_0$,又因为$\left.\dfrac{dT(\beta)}{d\beta}\right|_{\sqrt{\beta}=\beta_0}=\dfrac{r\sqrt{d+c+\mu}}{K\beta^{\frac{3}{2}}}>0$。此时非退化性条件成立,因此有 Hopf 分支产生,当 β 经过 β_0 时系统的稳定性发生变化。

2 Hopf 分支及其稳定性

应用中心流行计算投影法[8]讨论系统在非平凡平衡点 E_2 处的稳定性,把非平凡平衡点 $E_2(S^*,I^*,R^*)$转化到原点,设 $x=S-S^*$,$y=I=I^*$,$z=R-R^*$,系统(1)可以写为:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\left(rS^*+\dfrac{r}{K}S^{*2}-cI^*\right)+\left(r-\dfrac{2rS^*}{K}\right)x-\dfrac{r}{K}x^2-cy-\beta(y+I^*)(x+S^*)^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=\beta(y+I^*)(x+S^*)^2-(d+c+\mu)(y+I^*),\\ \dfrac{dz}{dt}=\mu(y+I^*)-d(z+R^*)。\end{cases}\tag{2}$$

把系统(2)进行化简得:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\left(r-\dfrac{2rS^*}{K}-2\beta S^*I^*\right)x-\left(\dfrac{r}{K}+\beta I^*\right)x^2-(c+\beta S^{*2})y-\beta x^2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=2\beta S^*I^*+(\beta S^*-d-c-\mu)y+\beta I^*x^2+2\beta S^*xy+\beta x^2y,\\ \dfrac{dz}{dt}=\mu y-dz。\end{cases}\tag{3}$$

此时系统(3)可以表示为$\dfrac{d\xi}{dt}=\boldsymbol{A}\xi+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{B}(\xi,\xi)+\dfrac{1}{6}\boldsymbol{C}(\xi,\xi,\xi)$,其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\beta_0)$,$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 分别表示多重线性向量函数,在平面上有向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi,\xi)^{T}$,$\boldsymbol{\eta}=(\eta,\eta)^{T}$,$\boldsymbol{\zeta}=(\zeta,\zeta)^{T}$,这里 $\boldsymbol{A}(\beta_0)$的矩阵可以表示为:

$$\boldsymbol{A}(\beta_0)=\begin{pmatrix}0 & -(d+\mu) & 0\\ \dfrac{\omega_0^2}{d+\mu} & 0 & 0\\ 0 & \mu & -d\end{pmatrix}。$$

设 $q\in C^2$ 是 $\boldsymbol{A}(\beta_0)$ 对应于特征值 λ_1 的特征向量，$q\boldsymbol{A}(\beta_0)=\lambda_1 q$。$p\in C^2$ 是转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\beta_0)$ 的特征值 λ_2 对应的特征向量，$p\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\beta_0)=\overline{\lambda}_2 p$。

为求适当的特征向量：$\boldsymbol{A}q=\mathrm{i}\omega q$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}p=-\mathrm{i}\omega p$。

可将 p 关于 q 标准化，应该尺度化这些向量，即 $\langle p,q\rangle=1$ 可得到：

$$q=\begin{pmatrix}d+\mu\\ -\mathrm{i}\omega_0\\ \dfrac{-\mathrm{i}\omega_0 u}{\mathrm{i}\omega_0+d}\end{pmatrix},p=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2(d+\mu)}\\ \dfrac{\mathrm{i}}{2\omega_0}\\ 0\end{pmatrix}。$$

多重线性向量函数 $\boldsymbol{B}(x,y)$ 和 $\boldsymbol{C}(x,y,z)$ 是 $x,y,u\in\mathbf{R}^2$ 在坐标下的表达式为：

$$\boldsymbol{B}_i(x,y)=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial\xi_j\partial\xi_k}\bigg|_{\xi=0}x_j y_k;\boldsymbol{C}_i(x,y,z)=\sum_{j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial\xi_j\partial\xi_k\partial\xi_l}\bigg|_{\xi=0}x_j y_k z_l,$$

于是

$$\boldsymbol{B}(zq+\overline{zq},zq+\overline{zq})=z^2\boldsymbol{B}(q,q)+2\overline{zz}\boldsymbol{B}(q,\overline{q})+\overline{z}^2\boldsymbol{B}(\overline{q},\overline{q}),$$

其中，$q=q(0)$，$p=p(0)$，故 $g(z,\overline{z},0)$ 中二次项的 Taylor 系数 g_{kl}，$k+l=2$ 可用下面公式表示：

$$g_{20}=\langle p,\boldsymbol{B}(q,q)\rangle,g_{11}=\langle p,\boldsymbol{B}(q,\overline{q})\rangle,g_{02}=\langle p,\boldsymbol{B}(\overline{q},\overline{q})\rangle。$$

类似地，计算 C 得：$g_{21}=\langle p,\boldsymbol{C}(q,q,\overline{q})\rangle$。

通过计算可以得到：

$$\boldsymbol{B}(q,q)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1(q,q)\\ \boldsymbol{B}_2(q,q)\\ \boldsymbol{B}_3(q,q)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\left(\dfrac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^2\\ \beta I^*(d+\mu)^2-2\mathrm{i}\omega_0\beta S^*(d+\mu)\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}(q,\overline{q})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1(q,\overline{q})\\ \boldsymbol{B}_2(q,\overline{q})\\ \boldsymbol{B}_3(q,\overline{q})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\left(\dfrac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^2\\ \beta I^*(d+\mu)^2\\ 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}(q,q,\overline{q})=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\omega_0\beta(d+\mu)^2\\ \mathrm{i}\omega_0\beta(d+\mu)^2\\ 0\end{pmatrix}。$$

求解对应的线性系统得：

$$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{B}(q,\overline{q})=\begin{pmatrix}\dfrac{\beta I^*}{\omega_0^2}(d+\mu)^3\\ \left(\dfrac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)\\ \dfrac{\mu}{d}\left(\dfrac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)\end{pmatrix},$$

$$(2\mathrm{i}\omega_0 E-A)^{-}=\begin{pmatrix}-\dfrac{2\mathrm{i}}{3\omega_0} & \dfrac{d+\mu}{3\omega_0^2} & 0\\ -\dfrac{1}{3(d+\mu)} & -\dfrac{2\mathrm{i}}{3\omega_0} & 0\\ -\dfrac{\mu}{3(d+\mu)(2\mathrm{i}\omega_0+d)} & -\dfrac{2\mathrm{i}\mu}{3\omega_0(2\mathrm{i}\omega_0+d)} & \dfrac{1}{2\mathrm{i}\omega_0+d}\end{pmatrix},$$

$$(2\mathrm{i}\omega_0 E-\boldsymbol{A})^{-}\boldsymbol{B}(q,q)=\begin{pmatrix}\frac{2\beta S^*}{3}(d+\mu)+\frac{2\beta I^*}{3\omega_0^2}(d+\mu)^3+\mathrm{i}\left[\frac{2}{3\omega_0}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^2-\frac{4\beta S^*}{3\omega_0}(d+\mu)^2\right]\\ \frac{2}{3}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^2-\frac{2}{3}\beta S^*(d+\mu)-\mathrm{i}\left[\frac{2}{3}\omega_0\beta S^*+\frac{4\beta I^*}{3\omega_0}(d+\mu)^2\right]\\ \frac{2\mu}{3(2\mathrm{i}\omega_0+d)}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)-\frac{2}{3}\mu\beta S^*(d+\mu)-\mathrm{i}\left[\frac{4\mu\omega_0\beta S^*}{3(2\mathrm{i}\omega_0+d)}+\frac{4\mu\beta S^*}{3\omega_0(2\mathrm{i}\omega_0+d)}\right]\end{pmatrix},$$

$$g_{21}=\langle p,C(q,q,\bar{q})\rangle=\frac{\mathrm{i}\omega_0\beta(d+\mu)}{2}-\frac{\beta(d+\mu)^2}{2}。$$

通过计算可以得到：

$$\boldsymbol{B}(\bar{q},(2\mathrm{i}\omega_0 E-A)^{-}\boldsymbol{B}(q,q))=$$

$$\begin{pmatrix}-\frac{2\beta S^*}{3}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^2-\frac{2\beta I^*}{3\omega_0^2}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^4-\frac{4\beta S^*}{3}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^3+\frac{2\beta^2 S^{*2}}{3}(d+\mu)^2-\\ \mathrm{i}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)^2(d+\mu)^3-\frac{2\beta S^*}{3\omega_0}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)^2(d+\mu)^3+\frac{2\omega_0\beta^2 S^{*2}}{3}(d+\mu)-\frac{4\beta^2 S^* I^*}{3\omega_0}(d+\mu)^3\right]\\ \frac{4\beta^2 S^* I^*}{3}(d+\mu)^2+\frac{4\beta^2 I^*}{3\omega_0^2}(d+\mu)^4+\frac{2\beta S^*}{3}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^3-\frac{2\beta^2 S^{*2}}{3}(d+\mu)^2+\\ \mathrm{i}\left[\frac{2\omega_0\beta^2 S^{*2}}{3}(d+\mu)+\frac{2\beta I^*}{3\omega_0}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)^2(d+\mu)^3-\frac{4\beta^2 S^* I^*}{\omega_0}(d+\mu)^3\right]\\ 0\end{pmatrix}。$$

由公式得第一 Laypunov 系数[9]的不变表达式：

$$\begin{aligned}L_1(\beta_0)=&\frac{1}{2\omega_0}\mathrm{Re}(\langle p,\boldsymbol{C}(q,q,\bar{q})\rangle-2\langle p,\boldsymbol{B}(q,\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{B}(q,\bar{q}))\rangle+\langle p,\boldsymbol{B}(\bar{q},(2\mathrm{i}\omega_0E-\boldsymbol{A})^{-}\boldsymbol{B}(q,q))\rangle)=\\ &\frac{1}{2\omega_0}\mathrm{Re}(g_{21}-2\langle p,\boldsymbol{B}(q,\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{B}(q,\bar{q}))\rangle+\langle p,\boldsymbol{B}(\bar{q},(2\mathrm{i}\omega_0E-\boldsymbol{A})^{-}\boldsymbol{B}(q,q))\rangle)=\\ &\frac{1}{2\omega_0}\mathrm{Re}\Bigg(\frac{\mathrm{i}\omega_0\beta(d+\mu)}{2}-\frac{\beta(d+\mu)^2}{2}-2\left[-\frac{2\beta I^*}{\omega_0^2}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^3-2\beta S^*\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)+\right.\\ &\left.\frac{2\beta^2 S^* I^*}{\omega_0}(d+\mu)^3\right]+\mathrm{i}\left[\frac{2\beta^2 S^* I^*}{\omega_0}(d+\mu)^2+\frac{2\beta^2 I^{*2}}{\omega_0^3}(d+\mu)^4+\frac{2\beta S^*}{\omega_0}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^2\right]-\\ &\frac{4\beta S^*}{3}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)-\frac{2\beta I^*}{3\omega_0^2}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^3-\frac{2\beta S^*}{3}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^2+\frac{4\beta^2 S^{*2}}{3}(d+\mu)-\\ &\mathrm{i}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^2-\frac{4\beta S^*}{3\omega_0}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^2+\frac{4\omega_0\beta^2 S^{*2}}{3}+\frac{2\beta^2 S^* I^*}{3\omega_0}(d+\mu)\right]+\\ &\mathrm{i}\left[\frac{2\beta^2 S^* I^*}{3}(d+\mu)^2+\frac{2\beta^2 I^*}{3\omega_0^2}(d+\mu)^4+\frac{2\beta S^*}{3}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)(d+\mu)^3-\frac{4\beta^2 S^{*2}}{3}(d+\mu)^2\right]-\\ &\frac{4\beta^2 S^{*2}}{3}(d+\mu)-\frac{4\beta I^*}{3\omega_0^2}\left(\frac{r}{K}+\beta I^*\right)^2(d+\mu)^3+\frac{4\beta^2 S^* I^*}{\omega_0^2}(d+\mu)^3\Bigg)。\end{aligned}$$

由文献[10]中分支稳定性理论可知：当分支参数处于临界值时，如果 $l_1(0)>0$，则系统在非平凡平衡点 $E(S^*,I^*,R^*)$ 处产生 Hopf 分支是不稳定的亚临界分支；如果 $l_1(0)<0$，则系统在非平凡平衡点 $E(S^*,I^*,R^*)$ 处产生 Hopf 分支是稳定的超临界分支，此系统产生唯一、稳定的极限环。出现稳定的周期解，意味着染病者和恢复者数量基本稳定，但是有小振幅周期振荡现象，此时传染病会发生但不会大规模流行。

参考文献：

[1] 马知恩，周义仓，王稳地．传染病动力学的数学建模与研究[M]．北京：科学出版社，2004．
MA Z E，ZHOU Y C，WANG W D．Mathematical modeling and research on infections disease dynamics[M]．Beijing：Science Press，2004．

[2] 杨洪，魏骏杰．一类带有非线性接触率的 SIR 传染病模型的稳定性[J]．高校应用数学学报，2014(1)：11-16．
YANG H，WEI J J．Stability of SIR epidemical model with a

class of nonlinear incidence rates[J]. Acta Applied Mathematics of Chinese Universities, 2014(1): 11-16.

[3] 胡春健,王莉.一类 H-V 功能性反应的捕食系统的持续性与稳定性分析[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2016,33(3):74-78.

HU C J, WANG L. Persistence and stability analysis of a classof predator system with H-V functional response[J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science), 2016, 33(3): 74-78.

[4] 张毅,张磊,罗元.自平衡控制系统稳定性分析与验证[J].重庆邮电大学学报(自然科学版),2014,33(4):501-506.

ZHANG Y, ZHANG L, LUO Y. Stability analysis and verification of self-balancing control system [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Editor), 2014, 33(4): 501-506.

[5] 杨文川,杨志春.一类具两斑块的 SIS 传染病模型的稳定性分析[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2015,32(5):81-84.

YANG W C, YANG Z C. Stability analysis of a SIS epidemic model with two patches[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2015, 32(5): 81-84.

[6] 张锦炎.常微分方程几何理论与分支问题[M].北京:北京大学出版社,1987.

ZHANG J Y. Geometric theory and bifurcation problems of ordinary differential equations[M]. Beijing: Peking University Press, 1987.

[7] 徐为坚.具有种群 Logistic 增长及饱和传染率的 SIR 模型的稳定性和 Hopf 分支[J].数学物理学报,2008,28A(3):578-584.

XU W J. Stability and Hopf bifurcation of SIR model with population Logistic growth and saturated infection rate[J]. 2008, 28A(3): 578-584.

[8] KUZNETSOV Y A. Elements of applied bifurcation theory [M]. New York: Spring-Verlag, 2004.

[9] 张辉,徐文雄,李应岐.一类非线性 SEIR 传染病模型的全局稳定性[J].数学的实践与认识,2015(4):165-170.

ZHANG H, XU W X, LI Y Q. Global stability of a class of nonlinear SEIR epidemic model[J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory, 2015(4): 165-170.

[10] ELADI S, GEHRING F W, RIBET K A. An introduction to difference equations[M]. New York: Springer, 2005.

Stability and Hopf Bifurcation of an SIR Model with Nonlinear Incidence Rate

DOU Zhongli[1], ZHAO Liangyu[2]

(1. College of Rongzhi, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400033;

2. Finance Department, Chongqing Business Vocational College, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]It presents a class of model, which hosts the SIR contagion with the nonlinear incidence rate, and the stability and Hopf branch at nontrivial equilibrium point have been analyzed. [**Methods**]The normal form theory and center manifold projection theorem have been employed to discuss the stability at the equilibrium point in this system. [**Findings**]This system is not the stable subcritical branch when the first Laypunov coefficient $l_1(0)>0$, while the system hosts the stable supercritical branch if $l_1(0)<0$. [**Conclusions**]The investigation indicates that the unique and stable limit cycle of the system is generate, and the contagion would be occur but not be popular.

Keywords: nonlinear incidence rate; nontrivial equilibrium point; Hopf bifurcation; projected theorem of center manifold computation

(责任编辑 游中胜)