2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目

运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20170414

具有一般截断因子和资源约束的单机工期窗口排序问题*

罗成新，翟雯瑾

(沈阳师范大学 数学与系统科学学院，沈阳 110034)

摘要:【目的】研究具有一般的与任务有关的截断学习效应的凸资源单机窗口排序问题。【方法】任务的实际加工时间是所获得的资源量、与任务有关的学习效应以及控制参数的函数。在资源总量有限的条件下确定最优资源分配方案、最优公共工期窗口的位置及大小、最优的任务排序，使得由工件的提前惩罚、延误惩罚、窗口的开始时间和宽度、时间表长等构成的总费用最小。【结果】在上述总费用具有上界的前提下，求出最优决策变量使得资源总费用最小。【结论】分别给出了求解相应问题的多项式时间最优算法。

关键词:排序;截断因子;工期窗口;资源分配;学习效应

中图分类号:O221.7　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2017)04-0001-07

排序问题是一类重要的组合最优化问题，在运筹学、计算机科学、管理科学与工业生产等领域有广泛应用。在经典排序模型中，工件的加工时间是固定的，是与加工位置和资源分配无关的常数。然而在实际问题中，工件的加工时间可能会在分配给工件一定资源(如人力、电力、催化剂等)后相应缩短，或者由于操作人员经过反复重复加工而提高了技术后，工作效率提高，加工时间缩短。这一现象被称为学习效应。具有学习效应和资源分配的排序问题在工业生产加工等实际环境中有广泛应用，近年来得到了广泛研究。然而当学习效应不受限制时，排在后面加工的工件的实际加工时间将会快速地接近于零，这显然是不合理的。因此文献中提出了截断控制参数来克服上述不足。截断控制参数模型的提出，客观地反映应了人类学习效应的局限性。生产效率随着工作人员操作水平的熟练而提高的幅度不是无限的，因此文献中提出了截断控制参数研究有学习效应的问题更合乎实际。近年来具有学习效应和对于学习效应作适当控制的排序问题得到了广泛研究[1-5]。文献[1]研究具有学习效应和资源分配的工期指派单机排序问题;文献[2]在公共流窗口假设下研究具有学习效应和资源分配的工期指派单机排序问题，给出了多项式时间的最优算法;文献[5]研究具有截断学习效应的单机排序问题，给出了多项式时间的算法。

近 20 多年，由于现代运营管理理念的引进，具有公共工期或工期窗口的排序问题逐渐引起了研究者的重视。在这类排序问题中，如果一个工件在它的工期窗口之前完成加工，那么它需要承担一部分的提前惩罚费用，相应地，如果一个工件在它的工期窗口之后完成加工，那么它需要承担一部分的延误惩罚费用。Panwalkar 等人[7]首先研究了带有公共工期的排序问题，目标是最小化提前惩罚、延误惩罚和工期的开始时间的总费用。自此之后，在不同环境下的带有公共工期或工期窗口的排序问题被陆续研究[6-7]。文献[6-7]分别在不同条件下研究含有工期或工期窗口排序问题，相应地得到了多项式时间的最优算法。

具有资源分配的排序问题近年来得到了高度的重视。相关的研究论文十分丰富[8-16]。其中文献[8]比较全面地介绍了关于可控处理时间的研究论文，包含近期的绝大多数研究成果。

本文研究具有一般的与任务有关的截断学习效应的凸资源单机窗口排序问题。模型中任务的实际加工时间是所获得的资源量，与任务有关的学习效应以及控制参数的函数。目标是在资源总量(或与任务及排序等有关的一个总费用)有限的条件下，确定资源分配方案、公共工期窗口的位置及大小、任务排序，使得由工件的提前惩罚、延误惩

* **收稿日期:**2016-06-12　　**修回日期:**2017-05-25　　**网络出版时间:**2017-05-016　11:27

资助项目:国家自然科学基金(No. 11171050);辽宁省教育厅科学研究基金(No. L2014433)

第一作者简介:罗成新，男，教授，研究方向为组合最优化与随机运筹学，E-mail:luochengxin@163.com **通信作者:**翟雯瑾，E-mail:724482159@qq.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1127.076.html

罚、窗口的开始时间和宽度、时间表长等构成的总费用(或总的资源费用)最小。本文在文献[10]的基础上进一步研究与工期窗口有关的带有截断控制参数的单机排序问题。因为增加了窗口,所以目标函数与文献[10]不同,包含提前和误工费用以及窗口费用。同样给出了多项式时间的最优算法,并给出算例说明算法的应用。

1 问题描述

设有 n 个独立的任务(工件)$J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$在一台机器上加工,所有任务在零时刻都已到达。机器在同一时刻最多只能加工一个工件,工件加工不允许中断。用 $p_{jr}^A(u_j)$表示任务 J_j 排在位置 r 上的实际加工时间,它是资源消耗量 u_j 的凸函数

$$p_{jr}^A(u_j)=\left(\frac{w_j\max\{f_j(r),a_j\}}{u_j}\right)^k,u_j>0。\tag{1}$$

其中,w_j 为工件 J_j 的负荷,$a_j(0<a_j<1)$为工件 J_j 截断控制参数,u_j 是分配给工件 J_j 的资源量,$f_j(r)$是工件 J_j 在位置 r 加工的学习效应,满足 $0<f_j(r+1)<f_j(r)\leqslant 1,j,r=1,2,\cdots,n$;$k$ 是正常数。用 p_j^A 表示任务 J_j 的实际加工时间,定义 $\pi=(J_1,J_2,\cdots,J_n)$为一个资源分配 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$所确定的工件排序,$C_j=C_j(\pi)$表示 J_j 的完工时间,$C_{\max}=\max\{C_j\mid j=1,\cdots,n\}$表示时间表长。考虑所有工件都有一公共工期窗口$[d,w]$,$E_j=\max\{0,d-C_j\}$,$T_j=\max\{0,C_j-w\}$分别表示工件 J_j 的提前量和延迟量,$D=w-d$ 为工期窗口的大小。

本文研究的第一个问题是在资源总量有限制,即 $\sum_{j=1}^n u_{[j]}\leqslant U$ 的前提下,决定最优工期$[d,w]$,最优资源分配方案 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$及最优排序 π 使得总消耗费用 $Z_1(\pi,d,D,u)=\sum_{j=1}^n(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D)+\theta C_{\max}$ 最小,其中 $\alpha>0,\beta>0,\gamma>0,\delta>0,\theta>0$ 为给定常数。用三参数表示法[11]表示如下:

$$1\mid p_{jr}^A(u_j)=\left(\frac{w_j\max\{f_j(r),a_j\}}{u_j}\right)^k,\sum_{j=1}^n u_{[j]}\leqslant U\mid Z_1。\tag{2}$$

研究的第二个问题是在由任务的提前、延误等构成的总费用 $\sum_{j=1}^n(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D)+\theta C_{\max}$ 不大于常数 L 的前提下,决定最优工期$[d,w]$,最优资源分配方案 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 及最优排序 π 使得总资源消耗费用 $Z_2(\pi,d,D,u)=\sum_{j=1}^n v_j u_j$ 最小,其中 $v_j(>0)$ 为资源分配量 u_j 的单位费用。用三参数表示法表示如下:

$$1\mid p_{jr}^A(u_j)=\left(\frac{w_j\max\{f_j(r),a_j\}}{u_j}\right)^k,\sum_{j=1}^n(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D)+\theta C_{\max}\leqslant L\mid Z_2。\tag{3}$$

2 最优解的性质

下述几个重要结论给出了最优解所具有的性质,它们对于得到最优算法是必不可少的。首先,引理1的结论是显然的。

引理1 存在一个最优排序,其中首个任务开始加工时间为0,且两个相邻任务之间无空闲时间。

引理2 对于固定排序 $\pi=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$和资源分配方案 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$,存在最优工期窗口,其开始时间 d 和结束时间 w 分别与某个工件的完工时间一致,即 $d^*=C_{[l]}$,$w^*=C_{[l+m]}$,其中 $l=\left\lceil\frac{n(\delta-\gamma)}{\alpha}\right\rceil$,$l+m=\left\lceil\frac{n(\beta-\delta)}{\beta}\right\rceil$。此处$\lceil x\rceil$表示大于或等于 x 的最小整数。

证明 不妨设任务排序为 $\pi=(J_1,J_2,\cdots,J_n)$,且 $C_{l-1}\leqslant d\leqslant C_l$,$\Delta_1=d-C_{l-1}$,$0\leqslant\Delta_1\leqslant p_l^A(u_l)$;$C_{l+m-1}\leqslant w\leqslant C_{l+m}$,$\Delta_2=w-C_{l+m-1}$,$0\leqslant\Delta_2\leqslant p_{l+m}^A(u_{l+m})$。

计算出总费用为:

$$Z_1=\sum_{j=1}^n(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D)+\theta C_{\max}=\alpha\sum_{j=1}^{l-1}E_j+\beta\sum_{j=k+m}^n T_j+\sum_{j=1}^n\gamma d+\sum_{j=1}^n\delta D+\theta\sum_{j=1}^n p_j^A(u_j)=$$

$$\alpha(l-1)\Delta_1+\alpha\sum_{j=1}^{l-1}(j-1)p_j^A(u_j)-\beta(n+1-l-m)\Delta_2+\sum_{j=l+m}^n\beta(n-j+1)p_j^A(u_j)+n\gamma\Delta_1+\sum_{j=1}^{l-1}n\gamma p_j^A(u_j)+$$

$$n\delta(\Delta_2-\Delta_1)+\sum_{j=l}^{l+m-1}n\delta p_j^A(u_j)+\theta\sum_{j=1}^{l-1}p_j^A(u_j)+\theta\sum_{j=l}^{l+m-1}p_j^A(u_j)+\theta\sum_{j=l+m}^{n}p_j^A(u_j)=A\Delta_1+B\Delta_2+C,$$

其中，

$$A=\alpha(l-1)+n(\gamma-\delta),B=n\delta-\beta(n+1-l-m),$$

$$C=\sum_{j=1}^{l-1}[\alpha(j-1)+n\gamma+\theta]p_j^A(u_j)+\sum_{j=l}^{l+m-1}(n\delta+\theta)p_j^A(u_j)+\sum_{j=l+m}^{n}[\beta(n-j+1)+\theta]p_j^A(u_j)。$$

由此可得知：当 $A\geqslant 0,B\geqslant 0$，取 $\Delta_1=\Delta_2=0$；当 $A\geqslant 0,B<0$，取 $\Delta_1=0,\Delta_2=p_{l+m}^A(u_{l+m})$；当 $A<0,B\geqslant 0$，取 $\Delta_1=p_l^A(u_j),\Delta_2=0$；当 $A<0,B<0,\Delta_1=p_l^A(u_l),\Delta_2=p_{l+m}^A(u_{l+m})$。

上述几种情形都表明窗口开始时间 d 和结束时间 w 分别与某个工件的完工时间一致。

至于如何确定 $l,l+m$ 的表达式，证明过程与参考文献[2]中的情形类似。　证毕

3 问题(1)的最优解

由引理 1 和引理 2，对于固定排序 $\pi=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$ 和资源分配方案 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，有：

$$Z_1=\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D)+\theta C_{\max}=\alpha\sum_{j=1}^{l}(C_{[l]}-C_{[j]})p_{jr}^A(u_j)+\beta\sum_{j=l+1}^{n}(C_{[j]}-C_{[l+m]})p_{jr}^A(u_j)+$$
$$\sum_{j=1}^{l}n\gamma p_{jr}^A(u_j)+\sum_{j=l+1}^{l+m}n\delta p_{jr}^A(u_j)=\sum_{j=1}^{l}[\alpha(j-1)+n\gamma+\theta]p_{jr}^A(u_j)+\sum_{j=l+1}^{l+m}(n\delta+\theta)p_{jr}^A(u_j)+$$
$$\sum_{j=l+m+1}^{n}[\beta(n-j+1)+\theta]p_{jr}^A(u_j)=\sum_{j=1}^{n}\varpi_j p_{jr}^A(u_j)=\sum_{j=1}^{n}\varpi_j\left(\frac{w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\}}{u_{[j]}}\right)^k,$$

其中，

$$\varpi_j=\begin{cases}\alpha(j-1)+n\gamma+\theta,j=1,\cdots,l,\\ n\delta+\theta,j=l+1,\cdots,l+m,\\ \beta(n-j+1)+\theta,j=l+m+1,\cdots,n。\end{cases}\tag{4}$$

引理 3　对于固定排序 $\pi=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$，最优资源分配方案 $u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)$ 由下式给出：

$$u_{[j]}^*=\frac{(\varpi_j)^{\frac{1}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}}}{\sum_{j=1}^{n}(\varpi_j)^{\frac{1}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}}}U,j=1,2,\cdots,n。\tag{5}$$

证明　由于 $Z_1=\sum_{j=1}^{n}\varpi_j\left(\frac{w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\}}{u_{[j]}}\right)^k$ 是关于 $u_{[j]}$ 的凸函数，从而最优资源 u 必使 $\sum_{j=1}^{n}u=U$，从而可使用拉格朗日乘子法求解。对于任意给定排序 $\pi=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$，拉格朗日函数为

$$L(u,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\varpi_j\left(\frac{w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\}}{u_{[j]}}\right)^k+\lambda\left\{\sum_{j=1}^{n}u_{[j]}-U\right\}。\tag{6}$$

其中，λ 为拉格朗日乘子。对(6)式中的变量分别求偏导，并令其为零得到：

$$\frac{\partial L(u,\lambda)}{\partial\lambda}=\sum_{j=1}^{n}u_{[j]}-U=0,\tag{7}$$

$$\frac{\partial L(u,\lambda)}{\partial u_{[j]}}=\lambda-\frac{k\,\varpi_j[w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\}]^k}{u_{[j]}^{k+1}}=0,j=1,2,\cdots,n。\tag{8}$$

由(7)，(8)式可得：

$$u_{[j]}=u_{[1]}\left(\frac{\varpi_j}{\varpi_1}\right)^{\frac{1}{k+1}}\frac{(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}}}{(w_{[1]}\max\{f_{[1]}(1),a_{[1]}\})^{\frac{k}{k+1}}},j=1,\cdots,n。\tag{9}$$

将(9)式代入(7)式得：

$$u_{[1]}=\frac{(\varpi_{[1]})^{\frac{1}{k+1}}(w_{[1]}\max\{f_{[1]}(1),a_{[1]}\})^{\frac{k}{k+1}}}{\sum_{j=1}^{n}(\varpi_{[j]})^{\frac{1}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}}}U。\tag{10}$$

将(10)式代入(9)式即可得(5)式。 证毕

现在将(5)式代入 Z_1 的表达式,得 $Z_1=U^{-k}\left[\sum_{j=1}^{n}(\varpi_j)^{\frac{1}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}}\right]^{k+1}$。注意到 $U>0$,$k>0$ 都是已知常数,于是上述问题等价于最小化函数 $f=\sum_{j=1}^{n}(\varpi_j)^{\frac{1}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}}$。

令 $y_{jr}=\begin{cases}1,\text{若工件 } J_j \text{ 被排在 } r \text{ 位置上}\\0,\text{若工件 } J_j \text{ 没有被排在 } r \text{ 位置上}\end{cases}$,则问题(1)转化为下述指派问题:

$$\min\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}(\varpi_r)^{\frac{1}{k+1}}(w_j\max\{f_j(r),a_j\})^{\frac{k}{k+1}}y_{jr},\tag{11}$$

$$\text{s.t.}\quad\sum_{r=1}^{n}y_{jr}=1,j=1,2\cdots,n,\tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{n}y_{jr}=1,r=1,2,\cdots,n,\tag{13}$$

$$y_{jr}=1\text{ 或 }0,j,r=1,2,\cdots,n。\tag{14}$$

因此,对于问题(1),可以给出如下最优算法。

算法 1 第一步,根据引理 2,求出最优窗口位置 $l,l+m$;第二步,解指派问题(11)~(14)求出最优排序 π^*;第三步,根据(5)式,求出排序 π^* 下的最优资源分配 $u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)$;第四步,根据引理 2,确定最优工期 $d^*=C_{[m]},w^*=C_{[l+m]},D^*=w^*-d^*$。

定理 1 对于问题 $1\mid p_{jr}^{A}(u_j)=\left(\frac{w_j\max\{f_j(r),a_j\}}{u_j}\right)^k,\sum_{j=1}^{n}u_j\leqslant U\mid Z_1$,利用算法 1 可以通过求解指派问题在 $O(n^3)$ 时间内求得最优解。

证明 上面的分析保证定理 1 结论的正确性。第一步可在 $O(1)$ 时间内完成,第二步可在 $O(n^3)$ 时间内完成,第三步和第四步分别需要 $O(n)$ 时间,因此算法总的时间复杂性为 $O(n^3)$。 证毕

例 1 考虑 $n=6,\alpha=3,\beta=15,\gamma=5,\delta=6,\theta=1,k=1,U=30$。其他数据在表 1 中给出。指派问题(11)~(14)式中系数:

$$c_{jr}=(\varpi_r)^{\frac{1}{k+1}}(w_j\max\{f_j(r),a_j\})^{\frac{k}{k+1}},$$

计算结果在表 2 中给出,其中根据(4)式计算出

$(\bar{w}_1,\bar{w}_2,\bar{w}_3,\bar{w}_4,\bar{w}_5,\bar{w}_6)=(31,34,37,37,31,16)$。

计算结果如下:

1) 由引理 1 得

$l=\lceil n(\delta-\gamma)/\alpha\rceil=2,l+m=\lceil n(\beta-\delta)/\beta\rceil=4$。

2) 解指派问题(11)~(14)得最优工件排序为 $\pi^*=[J_5,J_4,J_1,J_6,J_2,J_3]$,最优目标值为

18.25+21.78+16.00+17.49+21.56+18.42= 113.50。

3) 由(5)式得出最优资源分配为

$u^*=(u_5^*,u_4^*,u_1^*,u_6^*,u_2^*,u_3^*)=$

(5.51,4.46,4.65,5.75, 5.55,4.08)。

4) 由引理 2 得:

$d^*=p_{[1]}(u_{[1]}^*)+p_{[2]}(u_{[2]}^*)=4.96$,

$D^*=p_{[3]}(u_{[3]}^*)+p_{[4]}(u_{[4]}^*)=4.33$,

$\omega^*=d^*+D^*=9.29$,

表 1 例 1 的数据

Tab. 1 The date of example 1

J_j	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
W_j	12	18	20	10	15	16
$f_j(r)$	$r^{-0.32}$	$r^{-0.22}$	$r^{-0.12}$	0.90^{r-1}	0.85^{r-1}	0.95^{r-1}
a_j	0.75	0.85	0.80	0.90	0.95	0.85

表 2 例 1 中的 C_{jr} 值

Tab. 2 The C_{jr} values of example 1

j	r					
	1	2	3	4	5	6
1	19.28	18.06	18.25	18.25	16.70	12.00
2	23.62	22.94	23.80	23.80	21.78	15.65
3	24.90	25.01	25.52	25.08	22.68	16.00
4	17.60	17.49	18.25	18.25	16.70	16.00
5	21.56	22.01	22.96	22.96	21.02	15.10
6	22.27	22.73	23.40	18.42	20.53	14.75

最优目标值为 $Z_1(\pi^*,d^*,D^*,u^*)=U^{-k}\left[\sum_{j=1}^{n}(\varpi_j)^{\frac{1}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}}\right]^{k+1}=\frac{(113.50)^2}{30}=429.40$。

4 问题(2)的最优解

本节中在 $\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D)+\theta C_{\max}$ 的总和不大于常数 L 的前提下，决定最优工期窗口 $[d,w]$，最优资源分配方案 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 及最优排序 π 使得总资源消耗费用最小。

类似于上一节的推导，有 $\sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D)+\theta C_{\max}=\sum_{j=1}^{n}\varpi_j\left(\frac{w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\}}{u_{[j]}}\right)^k$，从而约束条件化为

$$\sum_{j=1}^{n}\varpi_j\left(\frac{w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\}}{u_{[j]}}\right)^k\leqslant L。\tag{15}$$

引理 4　对于固定排序 $\pi=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$，最优资源分配方案 $u^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_n^*)$，由

$$u_{[j]}^*=\frac{\varpi_j^{\frac{1}{k+1}}}{L^{\frac{1}{k}}v_{[j]}^{\frac{1}{k+1}}}((w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}})\sum_{j=1}^{n}\varpi_j^{\frac{1}{k+1}}v_{[j]}^{\frac{k}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}},j=1,2,\cdots,n\tag{16}$$

确定，其中 ϖ_j 由(4)式确定。

证明　由于约束不等式(15)式左端是关于 $u_{[j]}$ 的凸函数，从而最优资源 u 必使(15)式取等号，从而可使用拉格朗日乘子法求解。对于给定排序 $\pi=(J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]})$，拉格朗日函数为

$$L(u,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}+\lambda\left\{\sum_{j=1}^{n}\varpi_j\left(\frac{w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\}}{u_{[j]}}\right)^k-L\right\},\tag{17}$$

其中，λ 为拉格朗日乘子。对(17)式中的变量分别求偏导，令其等于零得到：

$$\frac{\partial L(u,\lambda)}{\partial\lambda}=\sum_{j=1}^{n}\varpi_j\left(\frac{w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\}}{u_{[j]}}\right)^k-L=0,\tag{18}$$

$$\frac{\partial L(u,\lambda)}{\partial u_{[j]}}=v_{[j]}-\frac{k\lambda\,\varpi_j\,(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^k}{u_{[j]}^{k+1}}=0,j=1,2,\cdots,n。\tag{19}$$

由(18)，(19)式可得：

$$u_{[j]}=(k\lambda)^{\frac{1}{k+1}}\left(\frac{\varpi_j}{v_{[j]}}\right)^{\frac{1}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}},\tag{20}$$

$$(k\lambda)^{\frac{1}{k+1}}=L^{-\frac{1}{k}}\left\{\sum_{j=1}^{n}\varpi_j^{\frac{1}{k+1}}v_{[j]}^{\frac{k}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}}\right\}^{\frac{1}{k}}。\tag{21}$$

由(20)，(21)式即可得(16)式。　证毕

将(16)式代入目标函数 Z_2，得 $Z_2^*(\pi,d,D,u^*)=L^{-\frac{1}{k}}\left(\sum_{j=1}^{n}\varpi_j^{\frac{1}{k+1}}v_{[j]}^{\frac{k}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}}\right)^{1+\frac{1}{k}}$。注意到 $L>0,k>0$ 都是已知常数，从而上式右边与函数 $\sum_{j=1}^{n}\varpi_j^{\frac{1}{k+1}}v_{[j]}^{\frac{k}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}}$ 同时取得最小值，于是上述问题等价于最小化下述函数 $g=\sum_{j=1}^{n}(\varpi_j)^{\frac{1}{k+1}}(w_{[j]}\max\{f_{[j]}(j),a_{[j]}\})^{\frac{k}{k+1}}$，因此问题(2)等价于下述指派问题：

$$\min\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\varpi_r^{\frac{1}{k+1}}v_j^{\frac{1}{k+1}}(w_j\max\{f_j(r),a_j\})^{\frac{k}{k+1}}y_{jr},\tag{22}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{r=1}^{n}y_{jr}=1,j=1,2,\cdots,n,\tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{jr}=1, r=1,2,\cdots,n, \tag{24}$$

$$y_{jr}=1 \text{ 或 } 0, j, r=1,2,\cdots,n。 \tag{25}$$

因此,对于问题(2)可以给出如下最优算法。

算法2 第1步,根据引理2,求出最优窗口的位置 $l, l+m$;第2步,解指派问题(22)~(25),求出最优排序 π^*;第3步,根据(16)式,求出排序 π^* 下的最优资源分配 $u^*=(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)$;第4步,根据引理2,确定最优工期 $d^*=C_{[m]}, w^*=C_{[l+m]}, D^*=w^*-d^*$。

定理2 对于问题 $1 \mid p_{jr}^A(u_j)=\left(\frac{w_j \max\{f_j(r), a_j\}}{u_j}\right)^k, \sum_{j=1}^{n}(\alpha E_j+\beta T_j+\gamma d+\delta D)+\theta C_{\max} \leqslant L \mid Z_2$,利用算法2可以通过求解指派问题在 $O(n^3)$ 时间内求得最优解。

证明 上面的分析保证了定理2结论的正确性。因为求解指派问题(22)~(25)式需要 $O(n^3)$ 时间,于是求解问题(2)的时间复杂度为 $O(n^3)$。 证毕

5 结论

本文研究具有一般的与任务有关的截断学习效应的凸资源单机窗口排序问题。分别在资源总量有限和总费用受限的条件下确定最优资源分配方案、最优公共工期窗口的位置及大小、最优的任务排序,使得由工件的提前惩罚、延误惩罚、窗口的开始时间和宽度、时间表长等构成的总费用和资源总费用最小化。分别给出了求解相应问题的多项式时间最优算法。

参考文献:

[1] LU Y Y, LI G, WU Y B, et al. Optimal due-date assignment problem with learning effect and resource-dependent processing times[J]. Optimization Letters, 2014, 8(1): 113-127.

[2] LI G, LUO M L, ZHANG W J, et al. Single-machine due-window assignment scheduling based on common flow allowance, learning effect and resource allocation[J]. Int J Prod Res, 2015, 53(4): 1228-1241.

[3] YANG S J, HSU C J, YANG D L. Single-machine scheduling with due-date assignment and aging effect under a deteriorating maintenance activity consideration[J]. 2010, 21(2): 177-195.

[4] LEE W C. A note on deteriorating jobs and learning in single machine scheduling problems[J]. Int J Business Econ, 2004, 3(1): 83-89.

[5] WANG X R, JIN J, WANG J B, et al. Single machine scheduling with truncated job-dependent learning effect[J]. Optim Lett, 2014, 8(2): 669-677.

[6] WANG J B, WANG M Z. Single-machine due-window assignment and scheduling with learning effect and resource-dependent processing times[J]. Asia Pac J Oper Res, 2014, 31(5): 1450036.

[7] PANWALKAR S S, SMITH M L, SEIDMANN A. Common due date assignment to minimize total penalty for the one machine scheduling problem[J]. Operations Research, 1982, 30(2): 391-399.

[8] SHABTAY D, STEINER G. A survey of scheduling with controllable processing times[J]. Discrete Apll Math, 2007, 155(13): 1643-1666.

[9] CHENG T C E. Optimal single machine sequencing and assignment of common due-date[J]. Computers and Industrial Engineering, 1992, 22(2): 115-120.

[10] HE H Y, LIU M Q, WANG J B. Resource constrained scheduling with general truncated job-dependent learning effect and resource-dependent processing times[J]. J Comb Optim, 2017, 33(2): 626-644.

[11] GRAHAM R L, LAWLER E L, LENSTRA J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1979, 5(1): 287-326.

[12] WANG X Y, WANG J J. Single-machine due-date assignment problem with deteriorating jobs and resource-dependent processing times[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2013, 67: 255-260.

[13] 郭玲,赵传立.带有公共交货期窗口和加工时间可控的单机排序问题[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2012,29(6):9-14.

GUO L, ZHAO C L. Single machine scheduling with common due-window assignment and controllable processing times[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2012,29(6):9-14.

[14] 刘春来,赵传立.工期窗口安排与具有退化效应和维护活动的单机排序[J].数学的实践与认识,2012,42(11):121-130.

LIU C L,ZHAO C L.Due-window assignment and single-machine scheduling with aging effect and maintenance[J]. Mathematics in Practice and Theory,2012,42(11):121-130.

[15] 赵崴羽,罗成新.在退化维修活动下具有多窗口及退化效应的单机排序问题[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2017,34(3):6-11.

ZHAO W Y,LUO C X.Single machine scheduling with multiple common due-window assignment and aging effect under a deteriorating maintenance activity cosideration[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2017,34(3):6-11.

[16] 张蕾,赵传立.带有维修活动和交货期窗口的单机排序问题[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2017,34(3):12-19.

ZHANG L,ZHAO C L.Single machine scheduling maintenance activity and due-window assignment[J].Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2017,34(3):12-19.

Operations Research and Cybernetics

Single Machine Due-window Assignment and Scheduling Problem with General Job-dependent Truncated Learning Effect under Convex Resource Constraints

LUO Chengxin, ZHAI Wenjin

(School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: [**Purposes**]A single machine due-window assignment and scheduling problem with general job-dependent truncated learning effect under convex resource constraints is studied here. [**Methods**]The actual processing time of a job is a function of the resource amount allocated; general job-dependent truncated learning effect and control parameter. The first objective is to determine the due-window location and size, the resource assignment and the job sequence to minimize the total cost of the earliness and tardiness of the jobs, the due-window location and size and the makespan under the condition that the total resource amount is limited. [**Findings**]The second objective is to minimize the total resource cost under the condition that the total cost above is limited. [**Conclusions**]Polynomial time algorithms are presented to solve the problems underlying respectively.

Keywords: scheduling; truncated factor; due-window; resource allocation; learning effect

(责任编辑　黄　颖)