DOI:10.11721/cqnuj20170417

带干扰的单险种多索赔情形风险模型的破产概率*

刘利敏，牛海峰

(河南师范大学 数学与信息科学学院，河南 新乡 453007)

摘要：【目的】基于大病保险等险种，建立一类带干扰的单险种多索赔情形的风险模型，为保险公司的风险管理及险种开发提供参考。【方法】假设保单到达过程为 Poisson 过程，各情形索赔到达过程为保单到达过程的 p-稀疏过程，首先证明了调节系数的存在唯一性，然后利用鞅的性质及全期望公式对破产概率进行了探讨。【结果】得到了该模型下破产概率的 Lundberg 不等式及表达式。【结论】所探讨的风险模型接近现实实例，并可进一步推广，对实际情形具有一定的指导作用。

关键词：Poisson 过程；稀疏过程；鞅；破产概率

中图分类号：O211　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2017)04-0052-04

在经典的风险模型[1]中，有两个基本限定：一是保费收入是时间的线性函数；二是保单的索赔到达过程是 Poisson 过程。许多学者对经典风险模型进行了推广研究：对索赔到达过程的推广，主要有把 Poisson 过程推广为 Cox 过程[2]、Poisson-Geometric 过程[3]等；对险种数、保费收入线性的推广，主要有把单险种推广为多险种、保费收入线性推广为某一类随机过程[4-7]等；对多险种索赔到达过程相依性的研究，则已有学者对相依的双险种风险模型进行了探讨[8-9]。由于许多险种包含特定的多种索赔情形，例如政府或保险公司为居民设计的大病保险等，所以本文将单一索赔情形推广为多种索赔情形。

1 基本概念

定义 1　设事件 E 的发生形成参数为 λ 的 Poisson 过程 $\{N(t),t\geqslant 0\}$，如果该事件的每次发生能够以概率 p 被记录下来，且该事件的每次发生是否能被记录下来是相互独立的，并用 $\{M(t),t\geqslant 0\}$ 来表示相应的被记录下来的事件发生次数，则称 $\{M(t),t\geqslant 0\}$ 为 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 的随机 p-稀疏过程。

由上面的定义知，过程 $\{M(t),t\geqslant 0\}$ 具有平稳独立增量，由于

$$P\{M(t)=m\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{M(t)=m \mid N(t)=m+n\}\cdot P\{N(t)=m+n\}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!\,n!}p^m(1-p)^n\cdot\frac{(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda p t)^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda t(1-p)]^n}{n!}=\mathrm{e}^{-\lambda p t}\frac{(\lambda p t)^m}{m!},$$

所以过程 $\{M(t),t\geqslant 0\}$ 是参数为 λp 的 Poisson 过程。

2 模型建立

设概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 是完备的，并且下面的所有随机变量都是定义在此概率空间上。建立如下的风险模型：

$$U(t)=u+cN(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i(t)}X_j^{(i)}+\sigma W(t),t\geqslant 0,$$

$$S(t)=cN(t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i(t)}X_j^{(i)}+\sigma W(t),t\geqslant 0,\tag{1}$$

其中：$U(t)$，$S(t)$ 分别表示保险公司在时刻 t 的盈余和盈利；u 是初始准备金，即 $u=U(0)$；c 是单位保费，即是每张保单收取的保费；$\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是保单到达过程，表示保险公司在 $[0,t]$ 时段内收到的保单数；n 表示此险种包

* **收稿日期**：2016-06-16　　**修回日期**：2017-05-20　　**网络出版时间**：2017-5-16 11:26

资金项目：国家自然科学基金(No.71203056)；河南师范大学博士科研启动项目(No.qd14153)

第一作者简介：刘利敏，女，副教授，研究方向为随即分析和金融数学，E-mail：llim2004@163.com

网络出版地址：http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1126.070.html

含的索赔情形数；$\{N_i(t), t\geqslant 0\}$为索赔情形 i 的索赔到达过程，表示保险公司在$[0,t]$时段内发生的索赔情形 i 的索赔次数；$X_j^{(i)}$ 为索赔情形 i 的第 j 次的索赔额；$\{W(t), t\geqslant 0\}$为标准 Wiener 过程，表示保险公司不确定的收入和支出，$\sigma>0$ 为扰动系数。

对上述建立的风险模型作如下假设：

1）$\{N(t), t\geqslant 0\}$是参数为 λ 的 Poisson 过程，$\{N_i(t), t\geqslant 0\}$是$\{N(t), t\geqslant 0\}$的随机 p-稀疏过程，由定义 1 可知$\{N_i(t), t\geqslant 0\}$是参数为 $p_i\lambda(0<p_i<1)$的 Poisson 过程。

2）对各种索赔情形 i，$\{X_j^{(i)}, j\geqslant 1\}$是独立同分布的随机变量序列，且 $E[X_j^{(i)}]=\mu_i$。

3）$\{N(t), t\geqslant 0\}$，$\{X_j^{(i)}, 1\leqslant i\leqslant n, j\geqslant 1\}$相互独立，且各种索赔情形之间也相互独立。

4）为使保险公司运营稳定，要求 $E[S(t)]>0$，可得 $c-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\mu_i>0$，设 $c=(1+\theta)\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\mu_i>0$，称 θ 为相对安全负载系数。

定义 2　保险公司的破产时刻 $T=\inf\{t\geqslant 0: U(t)<0\}$；保险公司在初始准备金为 u 时的最终破产概率 $\psi(u)=P(T<\infty|U(0)=u)$。

3 引理

引理 1　盈利过程$\{S(t), t\geqslant 0\}$是平稳独立增量过程。

证明　记 $A(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{N_i(t)}X_j^{(i)}$，则对 $\forall k\in\mathbf{N}^+$，可得：

$$S(t_{k+1})-S(t_k)=c[N(t_{k+1})-N(t_k)]-[A(t_{k+1})-A(t_k)]+\sigma[W(t_{k+1})-W(t_k)],$$

由于 Poisson 过程、复合 Poisson 过程和标准 Wiener 过程都是平稳独立增量过程，且险种各索赔情形之间是相互独立的，所以盈利过程$\{S(t), t\geqslant 0\}$是平稳独立增量过程。　　证毕

引理 2　对于盈利过程$\{S(t), t\geqslant 0\}$，存在函数 $g(r)$，使得 $E[e^{-rS(t)}]=e^{tg(r)}$，其中

$$g(r)=\sum_{i=1}^{n}p_i\lambda(M_{X^{(i)}}(r)-1)+\lambda(e^{-rc}-1)+\frac{r^2\sigma^2}{2},$$

$M_{X^{(i)}}(r)=E[\exp(rX^{(i)})]$为该险种索赔情形 i 的索赔额的矩母函数。

证明　由于

$$E\left[\exp\left(r\sum_{j=1}^{N_i(t)}X_j^{(i)}\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}E\left[\exp\left(r\sum_{j=1}^{N_i(t)}X_j^{(i)}\right)\Big|N_i(t)=n\right]\cdot P(N_i(t)=n)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}E[\exp(r(X_1^{(i)}+X_2^{(i)}+\cdots+X_n^{(i)}))]\cdot P(N_i(t)=n)=\sum_{n=0}^{\infty}\{E[\exp(rX^{(i)})]\}^n\cdot\exp(-p_i\lambda t)\frac{(p_i\lambda t)^n}{n!}=$$

$$\exp\{p_i\lambda t[E(\exp(rX^{(i)}))-1]\}=\exp\{p_i\lambda t[M_{X^{(i)}}(r)-1]\},$$

所以有

$$E[\exp(-rS(t))]=E\left\{\exp\left[-rcN(t)+r\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i(t)}X_j^{(i)}-r\sigma W(t)\right]\right\}=$$

$$E[\exp(-rcN(t))]\cdot E\left[\exp\left(r\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i(t)}X_j^{(i)}\right)\right]\cdot E[\exp(-r\sigma W(t))]=$$

$$\exp\left\{t[\lambda(e^{-rc}-1)+\sum_{i=1}^{n}p_i\lambda(M_{X^{(i)}}(r)-1)+\frac{r^2\sigma^2}{2}]\right\},$$

令 $g(r)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\lambda\left(M_{X^{(i)}}(r)-1\right)+\lambda(e^{-rc}-1)+\frac{r^2\sigma^2}{2}$，即有 $E\left[e^{-rS(t)}\right]=e^{tg(r)}$。　　证毕

引理 3　方程 $g(r)=0$ 存在唯一正解，并称此解为调节系数。

证明　由引理 2 知 $g(r)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\lambda\left(M_{X^{(i)}}(r)-1\right)+\lambda(e^{-rc}-1)+\frac{r^2\sigma^2}{2}$，于是可得

$$g'(r)=\sum_{i=1}^{n}p_i\lambda E\left[X^{(i)}\exp\left(rX^{(i)}\right)\right]-c\lambda e^{-rc}+r\sigma^2,$$

$$g''(r)=\sum_{i=1}^{n}p_i\lambda E\left[(X^{(i)})^2\exp(rX^{(i)})\right]+c^2\lambda e^{-rc}+\sigma^2>0,$$

所以函数 $g(r)$在$(0,\infty)$上是凸的。

当 $r=0$ 时,$g(0)=0$,由假设(4)知,$g'(0^+)=\sum_{i=1}^{n}p_i\lambda\mu_i-c\lambda=\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}p_i\mu_i-c\right)<0$,且当 $r\to\infty$时,$g'(r)\to\infty$,因此方程 $g(0)=0$ 存在唯一正解,记此解为 R,即 R 为调节系数。 证毕

定义 3 对于盈利过程$\{S(t),t\geqslant 0\}$,定义事件流$\mathcal{F}_t^S=\sigma\{S(v),v\geqslant t\}$。

引理 4[2] 破产时刻 T 是$\mathcal{F}_t^S$-停时。

引理 5 令 $M(t)=\dfrac{\exp[-r(u+S(t))]}{\exp[tg(r)]}$,则$\{M(t),\mathcal{F}_t^S;t\geqslant 0\}$是鞅。

4 主要结果

定理 1 对于风险模型(1),其最终破产概率 $\psi(u)$满足 Lundberg 不等式 $\psi(u)\leqslant e^{-Ru}$,其中 R 为调节系数。

证明 由 Doob's 鞅不等式[10]及引理 2~5 得:

$$P\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left[-cN(s)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i(s)}X_j^{(i)}-\sigma W(s)\right]\geqslant u\right\}=$$

$$P\left\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\exp\left[R\left(-cN(s)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i(s)}X_j^{(i)}-\sigma W(s)\right)\right]\geqslant e^{Ru}\right\}\leqslant$$

$$e^{-Ru}\cdot E\left\{\exp\left[R\left(-cN(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i(t)}X_j^{(i)}-\sigma W(t)\right)\right]\right\}=e^{-Ru}\cdot E[e^{-RS(t)}]=e^{-Ru},$$

令 $t\to\infty$,可得

$$\psi(u)=P\left\{\inf_{t\geqslant 0}U(t)\leqslant 0\right\}=P\left\{\sup_{t\geqslant 0}[-S(t)]\geqslant u\right\}=P\left\{\sup_{t\geqslant 0}\left[-cN(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_i(t)}X_j^{(i)}-\sigma W(t)\right]\geqslant u\right\}\leqslant e^{-Ru}。$$

证毕

定理 2 对于风险模型(1),其最终破产概率为 $\psi(u)=\dfrac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(t)}\mid T<\infty]}$,其中 R 为调节系数。

证明 由引理 5,令 $r=R$,可得 $M(t)=\dfrac{\exp[-R(u+S(t))]}{\exp[tg(r)]}=e^{-RU(t)}:=M_R(t)$。

对任意固定的时刻 t,$T\wedge t$ 为$\mathcal{F}_t^S$ 有界停时,由有界停时定理得

$$E[M_R(T\wedge t)]=E[M_R(0)]=e^{-Ru},$$

在上式中,由全期望公式得

$$\begin{aligned}e^{-Ru}&=E[M_R(T\wedge t)\mid T\leqslant t]P(T\leqslant t)+E[M_R(T\wedge t)\mid T>t]P(T>t)=\\&E[M_R(t)\mid T\leqslant t]P(T\leqslant t)+E[M_R(t)\mid T>t]P(T>t)。\end{aligned}\tag{2}$$

设 $I(A)$表示 A 的示性函数,那么

$$\begin{aligned}&E[M_R(t)\mid T>t]P(T>t)=E[e^{-RU(t)}\mid T>t]P(T>t)=\\&E[e^{-RU(t)}I(T>t)]\leqslant E[e^{-RU(t)}I(U(t)>0)],\end{aligned}$$

由于 $0<e^{-RU(t)}I(U(t)>0)<1$,又由强大数定律可得$\lim_{t\to\infty}U(t)=+\infty$,a.s,因此由 Lebesgue 控制收敛定理得:

$$\lim_{t\to\infty}E[M_R(t)\mid T>t]P(T>t)=0,\text{a.s.},$$

于是令 $t\to\infty$时,(2)式化为:

$$e^{-Ru}=E[M_R(t)\mid T<\infty]P(T<\infty),$$

即得破产概率 $\psi(u)=\dfrac{e^{-Ru}}{E[M_R(t)\mid T<\infty]}=\dfrac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)}\mid T<\infty]}$。 证毕

5 结束语

本文研究了一类带干扰的单险种多索赔情形的风险模型,在合理假设下得到了该风险模型的破产概率的

Lundberg 不等式及表达式。本文的风险模型在现实中接近很多应用实例，所以本文关于破产概率的研究成果对保险公司的业务风险管理以及新险种的开发都有一定的指导作用。另外，本文研究的风险模型可以进一步推广，使其更接近现实应用，例如，单险种多索赔情形推广为多险种多索赔情形，并且险种之间引入各种合理的相依性。

参考文献：

[1] GERBER H U.An introduction to mathematical risk theory[M].Philadelphia:S.S.Huebner Foundation,1979.

[2] GRANDELL J C.Aspects of risk theory[M].New York:Springer-Verlag,1991.

[3] 毛泽春，刘锦萼.索赔次数为复合 Poisson-Geometric 过程的风险模型及破产概率[J].应用数学学报，2005，28(3)：419-428.
MAO Z C,LIU J E.A risk model and ruin probability with compound Poisson-Geometric process[J].Acta Mathematicae Applicatae Sinica(Chinese Series),2005,28(3):419-428.

[4] 刘超，王永茂，颜玲，等.带干扰的多险种二项风险模型的破产概率[J].郑州大学学报(理学版)，2012，44(1)：46-49.
LIU C,WANG Y M,YAN L,et al.Ruin probability of bino-mialrisk model of multi-line with band interference[J].JournalofZhengzhou University(Natural Science Edition),2012,44(1):46-49.

[5] 肖鸿民，何艳.常数比例投资下基于进入过程风险模型的渐近破产概率[J].河南师范大学学报(自然科学版)，2015，43(2)：14-19.
XIAO H M,HE Y.Asymptotic ruin probabilities for proportional investment under interest force of a risk model basedon entrance process with dominatedly-varying-tailed caims[J].Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition),2015,43(2):14-19.

[6] 牛银菊，邓丽，马崇武.常利率下带投资的多险种风险模型的破产概率[J].江西师范大学学报(自然科学版)，2015，39(3)：286-289.
NIU Y J,DENG L,MA C W.The ruin probability ofmultiple-type risk model with interest rate and investment[J].Journal of Jiangxi Normal University(Natural Science),2015,39(3):286-289.

[7] 郭文旌，高从燕.安全第一准则下最优保险投资策略选择[J].河南师范大学学报(自然科学版)，2015，43(1)：8-13.
GUO W J,GAO C Y.Optimal portfolio selection bounded by safety-first criterion for insurer[J].Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition),2015,43(1):8-13.

[8] 吴传菊，张成林，王晓光，等.指数索赔情形下一类相依两险种风险模型的破产概率[J].数学的实践与认识，2014，44(8)：16-24.
WU C J,ZHANG C L,WANG X G,et al.The ruin probability fora class of bivariate risk model with correlated aggregate claims in the case of exponential claims[J].Mathematics in Practice and Theory,2014,44(8):16-24.

[9] ZHOU L.The Cramer-Lundberg approximation for a correlated aggregate claims with Poisson risk processes[J].Jornal of Mathematics,2010,30(3):480-484.

[10] ØKSENDAL B.Stochastic differential equations[M].NewYork:Springer-Verlag,2000.

Ruin Probability in the Single-multiple-type Risk Model with Interference

LIU Limin, NIU Haifeng

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang Henan 453007, China)

Abstract: [**Purposes**]Consider a risk model with one insurance business which involves multiple claim cases based on catastrophic illness insurance and other insurances. [**Methods**]Assume that the income counting process is Poisson process, and the claim counting processes are p-sparse processes of the income counting process. The existence and uniqueness of adjustment coefficient is proved first, the ruin probability is studied by using martingale properties and law of total expectation. [**Findings**]Lundberg inequality and the generalized expression of ruin probability are obtained under the assumed model. [**Conclusions**]The constructed risk model has a certain guiding role in the insurance company's risk management and insurance development.

Keywords: Poisson process; sparse process; martingale; ruin probability

(责任编辑　许　甲)