2017 年 7 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Jul. 2017
第 34 卷 第 4 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 34 No. 4

DOI:10.11721/cqnuj20170403

φ-混合随机变量序列加权和的完全收敛性及完全矩收敛性*

奚海燕，颛孙晨露
(安徽大学 数学科学学院，合肥 230601)

摘要:【目的】对 φ-混合随机变量序列的完全收敛性和完全矩收敛性进行讨论。【方法】利用 φ-混合随机变量序列的 Rosenthal 型极大值不等式。【结果】建立了 φ-混合随机变量序列加权和的完全收敛性，并且在同样的条件下得到了 φ-混合序列的完全矩收敛性。【结论】所得结果推广并改进了已有文献中关于 NA 序列相应的结果。

关键词:完全收敛性;完全矩收敛性;加权和;φ-混合随机变量

中图分类号:O211.4 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2017)04-0056-05

设$\{X_n,n\geqslant1\}$为一列定义在概率空间(Ω,F,P)上的随机变量,定义 σ-域 $F_n^m=\sigma(X_k,n\leqslant k\leqslant m)$。

定义 1 称随机变量序列$\{X_n,n\geqslant1\}$为 φ-混合的,如果混合系数

$$\varphi(n)=\sup_{k\geqslant1}\Big(\sup_{A\in F_1^k,B\in F_{k+n}^\infty,P(A)>0}\Big|P(B\mid A)-P(B)\Big|\Big)\to0,n\to\infty。$$

φ-混合随机变量的概念最早由文献[1]提出,随后很多学者对它的收敛性质进行了研究。例如文献[2-3]研究了它的中心极限定理;文献[4-5]得到了弱不变性原理;文献[6]建立了几乎必然不变性原理;文献[7]得到了大偏差的结果等。

完全收敛性概念由文献[8]提出:称随机变量序列$\{X_n,n\geqslant1\}$完全收敛于一个常数 C,如果对任意的$\varepsilon>0$,都有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|X_n-C|>\varepsilon)<\infty$。由 B-C 引理可知,上面的不等式可以推出在几乎处处(a.s.)意义下 $X_n\to C$。

假设$\{X_n,n\geqslant1\}$为一个随机变量序列,且 $a_n>0,b_n>0,q>0$。文献[9]引入了下述关于完全矩收敛性的概念:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nE\{b_n^{-1}|X_n|-\varepsilon\}_+^q<\infty,\forall\varepsilon>0$。通过一些程序化的运算可知,完全矩收敛可以得到完全收敛。因此,完全矩收敛是比完全收敛更强的一种收敛性质。

文献[10]建立了下述关于负相协(NA)随机变量加权和的完全收敛性的结果。

定理 1 令$\{X,X_n,n\geqslant1\}$为一同分布的 NA 随机变量序列,$\{a_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant1\}$为一常数阵列,且存在$0<\alpha\leqslant2$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ni}|^\alpha=o(n)。\tag{1}$$

记 $b_n=n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma}$,其中常数 $\gamma>0$。并且假设当 $0<\alpha\leqslant2$ 时,$EX=0$。如果

$$\begin{cases}E|X|^\alpha<\infty,\alpha>\gamma,\\E|X|^\alpha\log|X|<\infty,\alpha=\gamma,\\E|X|^\gamma<\infty,\alpha<\gamma。\end{cases}\tag{2}$$

则对任意的$\varepsilon>0$,都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|>b_n\varepsilon\right)<\infty。\tag{3}$$

进一步研究关于 φ-混合随机变量序列的完全收敛性,将定理 1 的结果由 NA 推广到 φ-混合序列,并且更进一步在相同条件下得到比完全收敛性更强的完全矩收敛性。

为方便起见,定义如下一些记号:C 代表一个在不同地方取值不同的正常数,$\log x=\ln\max(x,e)$,$I(A)$为集合 A 的示性函数,$a^+=aI(a\geqslant0)$且 $a^+=-aI(a<0)$。

* **收稿日期**:2016-03-20 **修回日期**:2016-08-22 **网络出版时间**:2017-5-16 11:28

第一作者简介:奚海燕,女,研究方向为概率极限理论,E-mail:xihaiyan747@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1128.098.html

1 预备引理

为证明本研究的主要结果，需要下述关于 φ-混合随机变量序列的 Rosenthal 型极大值不等式。

引理 1[11]　令$\{X_n,n\geqslant1\}$为 φ-混合随机变量序列。假设存在 $q\geqslant2$ 使得对所有的 $i\geqslant1$ 都有 $EX_i=0,E|X_i|^q<\infty$。若 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(n)<\infty$，则存在仅与 q 及 $\varphi(\cdot)$有关的常数 C，使得

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^{k}|^q\leqslant C\left\{\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^q+\left(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2\right)^{q/2}\right\}。$$

引理 2[12]　令$\{a_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant1\}$为一满足(1)式的常数阵列，其中 $\alpha>0$，X 为一随机变量。令 $b_n=n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma}$，其中常数 $\gamma>0$。则有

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^{-1}b_n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}E|a_{ni}X|^{\alpha}I(|a_{ni}X|>b_n)\leqslant\begin{cases}E|X|^{\alpha}<\infty,\alpha>\gamma,\\E|X|^{\alpha}\log|X|<\infty,\alpha=\gamma,\\E|X|^{\gamma}<\infty,\alpha<\gamma。\end{cases}$$

引理 3[12]　令$\{a_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant1\}$为一满足(1)式的常数阵列，其中 $\alpha>0$，X 为一随机变量。令 $b_n=n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma}$，其中常数 $\gamma>0$。若 $q>\max(\alpha,\gamma)$，则有

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^{-1}b_n^{-q}\sum_{i=1}^{n}E|a_{ni}X|^{q}I(|a_{ni}X|\leqslant b_n)\leqslant\begin{cases}E|X|^{\alpha}<\infty,\alpha>\gamma,\\E|X|^{\alpha}\log|X|<\infty,\alpha=\gamma,\\E|X|^{\gamma}<\infty,\alpha<\gamma。\end{cases}$$

引理 4[13]　令$\{X_n,n\geqslant1\}$为一随机变量序列，$\{b_n,n\geqslant1\}$为一正常数列，满足 $b_n\uparrow$ 且 $b_{2n}/b_n=o(1)$。若对任意的 $\varepsilon>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}X_i\right|>b_n\varepsilon\right)<\infty$，则$\sum_{i=1}^{n}X_i/b_n\to0$，a.s.。

2 主要结果及证明

定理 2　令$\{X,X_n,n\geqslant1\}$为一同分布的 φ-混合随机变量序列，$\{a_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant1\}$为一满足(1)式的常数阵列，其中 $0<\alpha\leqslant2$。记 $b_n=n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma}$，其中 $\gamma>0$。当 $1<\alpha\leqslant2$ 时假设 $EX=0$。如果(2)式成立，则对任意的 $\varepsilon>0$，(3)式成立。

由定理 2 及引理 4 很容易得到下述推论。

推论 1　令$\{X,X_n,n\geqslant1\}$为一同分布的 φ-混合随机变量序列，$\{a_n,n\geqslant1\}$为一满足 $\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{\alpha}=o(n)$ 的常数列，其中 $0<\alpha\leqslant2$。记 $b_n=n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma}$，其中 $\gamma>0$。当 $1<\alpha\leqslant2$ 时，假设 $EX=0$。如果(2)式成立，则对任意的 $\varepsilon>0$，$b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\to0$，a.s.，$n\to\infty$。

定理 3　令$\{X,X_n,n\geqslant1\}$为一同分布的 φ-混合随机变量序列，$\{a_{ni},1\leqslant i\leqslant n,n\geqslant1\}$为一满足(1)式的常数阵列，其中 $0<\alpha\leqslant2$。记 $b_n=n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma}$，其中 $\gamma>0$。当 $1<\alpha\leqslant2$ 时，假设 $EX=0$。如果(2)式成立，则对任意的 $\varepsilon>0$，

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}E\left(b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|-\varepsilon\right)_+^{\alpha}<\infty。\tag{4}$$

注　注意到

$$\infty>\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}E\left(b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|-\varepsilon\right)_+^{\alpha}\geqslant$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\varepsilon^{\alpha}}P\left(b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|>\varepsilon+t^{1/\alpha}\right)\mathrm{d}t\geqslant\varepsilon^{\alpha}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|>2\varepsilon\right)。$$

因此定理 3 是比定理 2 更强的结果。

下面给出主要结果的证明。

证明　(定理 2)注意到 $a_{ni}=a_{ni}^{+}-a_{ni}^{-}$，故不失一般性，假设 $a_{ni}\geqslant0$。对任意给定的 $n\geqslant1$，令 $Y_{ni}=a_{ni}X_iI$，$|a_{ni}X_i|\leqslant b_n$ 且 $Z_{ni}=a_{ni}X_iI$，$|a_{ni}X_i|>b_n$。于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|>b_n\varepsilon\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_{ni}X_i|>b_n\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}Y_{ni}\right|>b_n\varepsilon\right)=I_1+I_2。$$

由 Markov 不等式及引理 2,得到:

$$I_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(\bigcup_{1\leqslant i\leqslant n}\{|a_{ni}X_i|>b_n\}\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}P(|a_{ni}X_i|>b_n)\leqslant$$

$$1+\sum_{n=2}^{\infty}n^{-1}b_n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}E|a_{ni}X|^{\alpha}I(|a_{ni}X|>b_n)<\infty。$$

故下面只需证 $I_2<\infty$。首先验证

$$b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}EY_{ni}\right|\to 0,n\to\infty。\tag{5}$$

如果 $0<\alpha\leqslant 1$,则由(1)式及(2)式有

$$b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}EY_{ni}\right|\leqslant b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}E|X_i|I(|a_{ni}X_i|\leqslant b_n)\leqslant b_n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{\alpha}E|X|^{\alpha}I(|a_{ni}X|\leqslant b_n)\leqslant$$

$$C(\log n)^{-\alpha/\gamma}E|X|^{\alpha}\to 0,n\to\infty。$$

如果 $1<\alpha\leqslant 2$,则由均值为 0 的假设及(1),(2)式有

$$b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}EY_{ni}\right|=b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}EZ_{ni}\right|\leqslant b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}E|X_i|I(|a_{ni}X_i|>b_n)\leqslant$$

$$b_n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{\alpha}E|X|^{\alpha}I(|a_{ni}X|>b_n)\leqslant C(\log n)^{-\alpha/\gamma}E|X|^{\alpha}\to 0,n\to\infty。$$

因此(5)式成立。故当 n 充分大时, $\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}EY_{ni}\right|\leqslant b_n\varepsilon/2$。 取 $q>\max(2,2\gamma/\alpha)$,由引理 1 及 Jensen 不等式可知:

$$I_2\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}(Y_{ni}-EY_{ni})\right|>b_n\varepsilon/2\right)\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}b_n^{-q}E\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}(Y_{ni}-EY_{ni})\right|\right)^{q}\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}b_n^{-q}\sum_{i=1}^{n}E|Y_{ni}|^{q}+C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}b_n^{-q}\left(\sum_{i=1}^{n}E|Y_{ni}|^{2}\right)^{q/2}=I_3+I_4。$$

由 Y_{ni} 的定义及引理 3 容易得到 $I_3<\infty$。最后将证明 $I_4<\infty$。由(1)式,$\alpha\leqslant 2$ 及 $q>2\gamma/\alpha$ 得:

$$I_4=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\left(b_n^{-2}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{2}EX^{2}I(|a_{ni}X_i|\leqslant b_n)\right)^{q/2}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\left(b_n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{\alpha}E|X|^{\alpha}I(|a_{ni}X_i|\leqslant b_n)\right)^{q/2}\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}(\log n)^{-\alpha q/(2\gamma)}(E|X|^{\alpha})^{q/2}<\infty。$$

证毕

证明 (定理 3)不失一般性,仍然假设 $a_{ni}\geqslant 0$。注意到:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}E\left(b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|-\varepsilon\right)_+^{\alpha}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\infty}P\left(b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|>\varepsilon+t^{1/\alpha}\right)\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|>\varepsilon\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_1^{\infty}P\left(b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|>t^{1/\alpha}\right)\mathrm{d}t=$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|>b^{n}\varepsilon\right)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_1^{\infty}P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}a_{ni}X_i\right|>b^{n}t^{1/\alpha}\right)\mathrm{d}t=J_1+J_2。$$

由定理 2 知 $J_1<\infty$。因此要证明(4)式,只需证 $J_2<\infty$。对任意的 $t\geqslant 1$,记 $X_{ni}^{(1)}=a_{ni}X_iI(|a_{ni}X_i|\leqslant b_nt^{1/\alpha})$ 且 $X_{ni}^{(2)}=a_{ni}X_iI(|a_{ni}X_i|>b_nt^{1/\alpha})$。 从而有:

$$J_2\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_1^{\infty}P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_{ni}X_i|>b_nt^{1/\alpha}\right)\mathrm{d}t+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_1^{\infty}P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}X_{ni}^{(1)}\right|>b_nt^{1/\alpha}\right)\mathrm{d}t=J_3+J_4。$$

由引理 2 及(2)式有:

$$J_3\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_1^{\infty}\sum_{i=1}^{n}P(|a_{ni}X_i|>b_nt^{1/\alpha})\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}n^{-1}b_n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}E|a_{ni}X|^{\alpha}I(|a_{ni}X|>b_n)<\infty。$$

对于 J_4,首先证明 $\sup_{t\geqslant 1}t^{-1/\alpha}b_n^{-1}\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}EX_{ni}^{(1)}\right|\to 0,n\to\infty$。 如果 $0<\alpha\leqslant 1$,则由 Markov 不等式有:

$$\sup_{t\geqslant 1} t^{-1/\alpha} b_n^{-1} \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k} EX_{ni}^{(1)}\right| \leqslant \sup_{t\geqslant 1} t^{-1/\alpha} b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ni} E|X_i| I(|a_{ni}X_i|\leqslant b_n t^{1/\alpha}) \leqslant$$

$$\sup_{t\geqslant 1} t^{-1/\alpha} b_n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^{\alpha} E|X|^{\alpha} \leqslant C(\log n)^{-\alpha/\gamma} E|X|^{\alpha} \to 0, n\to\infty。$$

如果 $1<\alpha\leqslant 2$，则由均值为 0 的假设有

$$\sup_{t\geqslant 1} t^{-1/\alpha} b_n^{-1} \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k} EX_{ni}^{(1)}\right| = \sup_{t\geqslant 1} t^{-1/\alpha} b_n^{-1} \max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k} EX_{ni}^{(2)}\right| \leqslant \sup_{t\geqslant 1} t^{-1/\alpha} b_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ni} E|X| I(|a_{ni}X|> b_n t^{1/\alpha}) \leqslant$$

$$\sup_{t\geqslant 1} t^{-1} b_n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^{\alpha} E|X|^{\alpha} \leqslant C(\log n)^{-\alpha/\gamma} E|X|^{\alpha} \to 0, n\to\infty。$$

因此当 n 充分大时，对任意的 $t\geqslant 1$ 都有 $\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k} EX_{ni}^{(1)}\right| \leqslant \frac{b_n t^{1/\alpha}}{2}$ 成立。故由 Markov 不等式、引理 1 及 Jensen 不等式，当 $q>\max(2, 2\gamma/\alpha)$ 时有：

$$J_4 \leqslant C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\int_1^{\infty} P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}(X_{ni}^{(1)} - EX_{ni}^{(1)})\right| > \frac{1}{2} b_n t^{1/\alpha}\right)\mathrm{d}t \leqslant$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\int_1^{\infty} t^{-q/\alpha} E\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{k}(X_{ni}^{(1)} - EX_{ni}^{(1)})\right|^q \mathrm{d}t \leqslant$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\int_1^{\infty} t^{-q/\alpha}\sum_{i=1}^{n} E|X_{ni}^{(1)}|^q \mathrm{d}t + C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\int_1^{\infty} t^{-q/\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} E|X_{ni}^{(1)}|^2\right)^{q/2}\mathrm{d}t = J_5 + J_6。$$

对于 J_5 有：

$$J_5 \leqslant C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\int_1^{\infty} t^{-q/\alpha}\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X|^q I(|a_{ni}X|\leqslant b_n t^{1/\alpha})\mathrm{d}t =$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\int_1^{\infty} t^{-q/\alpha}\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X|^q I(|a_{ni}X|\leqslant b_n)\mathrm{d}t +$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\int_1^{\infty} t^{-q/\alpha}\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X|^q I(b_n < |a_{ni}X|\leqslant b_n t^{1/\alpha})\mathrm{d}t = J_{51} + J_{52}。$$

注意到 $q>2\geqslant\alpha$，由引理 3 得 $J_{51} \leqslant C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X|^q I(|a_{ni}X|\leqslant b_n) < \infty$。

由引理 2 得：

$$J_{52} = C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\int_m^{m+1} t^{-q/\alpha} E|a_{ni}X|^q I(b_n < |a_{ni}X|\leqslant b_n t^{1/\alpha})\mathrm{d}t \leqslant$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty}\int_m^{m+1} t^{-q/\alpha} E|a_{ni}X|^q I(b_n < |a_{ni}X|\leqslant b_n (m+1)^{1/\alpha})\mathrm{d}t \leqslant$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-q/\alpha} E|a_{ni}X|^q I(b_n < |a_{ni}X|\leqslant b_n (m+1)^{1/\alpha}) =$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-q/\alpha}\sum_{j=1}^{m} E|a_{ni}X|^q I(b_n j^{1/\alpha} < |a_{ni}X|\leqslant b_n (j+1)^{1/\alpha}) =$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} E|a_{ni}X|^q I(b_n j^{1/\alpha} < |a_{ni}X|\leqslant b_n (j+1)^{1/\alpha})\sum_{m=j}^{\infty} m^{-q/\alpha} \leqslant$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} j^{1-q/\alpha} E|a_{ni}X|^q I(b_n j^{1/\alpha} < |a_{ni}X|\leqslant b_n (j+1)^{1/\alpha}) \leqslant$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} E|a_{ni}X|^{\alpha} I(b_n j^{1/\alpha} < |a_{ni}X|\leqslant b_n (j+1)^{1/\alpha}) =$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X|^{\alpha} I(|a_{ni}X| > b_n) < \infty。$$

最后证明 $J_6<\infty$。注意到 $\alpha q/2\gamma>1$，有：

$$J_6 = C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} b_n^{-q}\int_1^{\infty} t^{-q/\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X|^2 I(|a_{ni}X|\leqslant b_n t^{1/\alpha})\right)^{q/2}\mathrm{d}t \leqslant$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}b_n^{-q}\int_1^{\infty}t^{-q/\alpha}\left(b_n^{2-\alpha}t^{2/\alpha-1}\sum_{i=1}^{n}E\,|a_{ni}X|^{\alpha}I(|a_{ni}X|\leqslant b_nt^{1/\alpha})\right)^{q/2}\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}b_n^{-\alpha q/2}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ni}^{\alpha}\right)^{q/2}(E\,|X|^{\alpha})^{q/2}\leqslant C\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}(\log n)^{-\alpha q/2\gamma}(E\,|X|^{\alpha})^{q/2}<\infty。$$

证毕

参考文献：

[1] DOBRUSHIN R L. The central limit theorem for on-stationary Markov chain[J]. Theory of Probability and Its Applications, 1956, 1: 72-88.

[2] UTEV S A. The central limit theorem for φ-mixing arrays of random variables[J]. Theory of Probability and Its Applications, 1990, 35(1): 131-139.

[3] CHEN D C. A uniform central limit theorem for non-uniform φ-mixing random fields[J]. The Annals of Probability, 1991, 19(2): 636-649.

[4] HERRNDORF N. The invariance principle for φ-mixing sequences[J]. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 1983, 63(1): 97-108.

[5] PELIGRAD M. An invariance principle for φ-mixing sequences[J]. The Annals of Probability, 1985, 13(4): 1304-1313.

[6] SHAO Q M. Almost sure invariance principles for mixing sequences of random variables[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1993, 48(2): 319-334.

[7] HU S, WANG X. Large deviations for some dependent sequences[J]. Acta Mathematica Scientia, Series B, 2008, 28(2): 295-300.

[8] HSU P L, ROBBINS H. Complete convergence and the law of large numbers[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences USA, 1947, 33(2): 25-31.

[9] CHOW Y S. On the rate of moment convergence of sample sums and extremes[J]. Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica, 1988, 16: 177-201.

[10] SUNG S H. On the strong convergence for weighted sums of random variables[J]. Statistical Papers, 2011, 52(2): 447-454.

[11] WANG X J, HU S H, YANG W Z, et al. On complete convergence for weighted sums of φ-mixing random variables [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2010, 2010: 1-13.

[12] WU Y F, SUNG S H, VOLODIN A. A note on the rates of convergence for weighted sums of ρ^*-mixing random variables[J]. Lithuanian Mathematical Journal, 2014, 54: 220-228.

[13] SUNG S H. Marcinkiewicz zygmund type strong law of large numbers for pairwise iid random variables[J]. Journal of Theoretical Probability, 2014, 27(1): 96-106.

Complete Convergence and Complete Moment Convergence for Weighted Sums of φ-mixing Random Variables

XI Haiyan, ZHUANSUN Chenlu

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: [**Purposes**]The main purpose of this paper is to establish the complete convergence and complete moment convergence for the weighted sums of φ-mixing random variables. [**Methods**]The main results are obtained by using the Rosenthal-type maximum inequality of φ-mixing random variables. [**Findings**]The complete convergence is successfully established for the weighted sums of φ-mixing random variables and moreover the complete moment convergence is obtained without adding any extra conditions. [**Conclusions**]The results extend and improve the corresponding one of Sung for NA random variables to φ-mixing random variables.

Keywords: complete convergence; complete moment convergence; weighted sums; φ-mixing random variables

（责任编辑　游中胜）