DOI:10.11721/cqnuj20170410

Nekrasov 矩阵的逆矩阵无穷范数的新上界*

李 艳 艳

(文山学院 数学学院，云南 文山 663009)

摘要:【目的】Nekrasov 矩阵是 H-矩阵的子类,同时它包含了严格对角占优矩阵。针对 Nekrasov 矩阵的逆矩阵,给出它的无穷范数的上界估计。【方法】先对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行分裂($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$),然后构造严格对角占优矩阵 $\boldsymbol{C}$($\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|$),再通过利用 Nekrasov 矩阵的定义、相关的引理,以及不等式的放缩等手段来估计$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$的上界。【结果】得到了$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$上界的两个较好的结果。【结论】理论证明和数值算例都说明,一定情况下,得到的结果优于现有的结果。

关键词:无穷范数;Nekrasov 矩阵;H-矩阵;上界

中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2017)04-0061-04

1 预备知识

令 $\mathbf{C}^{n\cdot n}$($\mathbf{R}^{n\cdot n}$)表示复(实)矩阵的集合,$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n\}$。设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,记:

$$r_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|,i\in\mathbf{N},h_1(\boldsymbol{A})=\sum_{j\neq 1}\left|a_{1j}\right|,h_i(\boldsymbol{A})=\sum_{j=1}^{i-1}\left|a_{ij}\right|\frac{h_j(\boldsymbol{A})}{|a_{jj}|}+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|。$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分裂为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$,其中 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$,$\boldsymbol{U}$ 是严格上三角矩阵,$\boldsymbol{L}$ 是严格下三角矩阵,即

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}0&-a_{12}&-a_{13}&\cdots&-a_{1n}\\0&0&-a_{23}&\cdots&-a_{2n}\\0&0&0&\cdots&-a_{3n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},\boldsymbol{L}=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots&0\\-a_{21}&0&0&\cdots&0\\-a_{31}&-a_{32}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&-a_{n3}&\cdots&0\end{pmatrix}。$$

定义 1[1]　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\cdot n}$,若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非主对角元素 $a_{ij}\leqslant 0(i\neq j)$,且 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 非负($\boldsymbol{A}^{-1}\geqslant 0$),则称 $\boldsymbol{A}$ 为 M-矩阵。

定义 2[2]　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\cdot n}$,当 $\boldsymbol{A}$ 的比较矩阵,$\langle\boldsymbol{A}\rangle=(\boldsymbol{m}_{ij})$是 M-矩阵时,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 H-矩阵,其中 $m_{ij}=\begin{cases}|a_{ii}|, & i=j\\-|a_{ij}|, & i\neq j\end{cases}$。

定义 3[3]　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\cdot n}$,$n\geqslant 2$,若对于 $\forall i\in\mathbf{N}$,有 $|a_{ii}|>h_i(\boldsymbol{A})$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 Nekrasov 矩阵。

引理 1[4]　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\cdot n}$是非奇异 H-矩阵,则 $|\boldsymbol{A}^{-1}|\leqslant\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}$($|\boldsymbol{A}^{-1}|$表示 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的每个元素都取绝对值后得到的矩阵)。

引理 2[5]　若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\cdot n}$,$n\geqslant 2$,$a_{ii}\neq 0$,则 $h_i(\boldsymbol{A})=|a_{ii}|[(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|\boldsymbol{e}]_i$,其中 $\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)$。

引理 3[6]　矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\cdot n}(n\geqslant 2)$是 Nekrasov 矩阵的充要条件是$(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|\boldsymbol{e}<\boldsymbol{e}$。

进一步,该充要条件说明矩阵 $\boldsymbol{E}-(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|$是严格对角占优矩阵,其中 $\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵。

---

* **收稿日期**:2016-05-03　　**修回日期**:2017-05-20　　**网络出版时间**:2017-05-16　11:27

资助项目:云南省科技厅应用基础研究青年项目(No.2013FD052);云南省教育厅项目(No.2013Y585);文山学院科学研究项目(No.16WSY11)

第一作者简介:李艳艳,女,讲师,研究方向为矩阵理论及其应用,E-mail:liyanyan409@126.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1127.084.html

引理 4[7] 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\cdot n}$,$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 都为非奇异矩阵,则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。

引理 5[7] 若 $\|\boldsymbol{A}\|_\infty<1$,那么 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 是非奇异的,且 $\|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{1-\|\boldsymbol{A}\|_\infty}$。

2 主要结果

Nekrasov 矩阵、S-Nekrasov 矩阵是 H-矩阵的子类。关于该类矩阵的判定、行列式的估计、逆矩阵无穷范数上界的估计等问题已得到了一些学者的关注和研究[8-15]。本文研究了目前研究较为活跃的 Nekrasov 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵无穷范数上界的估计问题,并得到了两个较好的结果。

定理 1 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\cdot n}$ 是 Nekrasov 矩阵,若 $\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\dfrac{z_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}\|\boldsymbol{U}\|_\infty<1$,则 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\dfrac{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\dfrac{z_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}}{1-\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\dfrac{z_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}\|\boldsymbol{U}\|_\infty}$,

其中 $z_1(\boldsymbol{A})=1,z_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j=1}^{i-1}\dfrac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|}z_j(\boldsymbol{A})+1,i\in\mathbf{N},i\neq1$。

证明 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 Nekrasov 矩阵,则由引理 3 知 $\boldsymbol{E}-(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|$ 是严格对角占优矩阵,令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|$,应用引理 4 和引理 5 得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{C}^{-1}\|_\infty=&\|(\boldsymbol{E}-(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|)^{-1}\|_\infty=\|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{-1}(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{-1}(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|)^{-1}\boldsymbol{E}^{-1}\|_\infty=\\&\|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|)^{-1}\|_\infty\leqslant\\&\|\boldsymbol{E}\|_\infty+\|\boldsymbol{E}\|_\infty\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{U}\|_\infty\frac{1}{1-\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|\|_\infty}\leqslant\\&1+\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{U}\|_\infty\frac{1}{1-\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{U}\|_\infty}=\frac{1}{1-\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{U}\|_\infty}\end{aligned}\tag{1}$$

下面寻找 $\|\boldsymbol{C}^{-1}\|_\infty$ 和 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的关系。因为 $\boldsymbol{C}=(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\langle\boldsymbol{A}\rangle$,则 $\langle\boldsymbol{A}\rangle=(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)\boldsymbol{C}$,于是由引理 1 知 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\|\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{C}^{-1}\|_\infty\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty$。

下面讨论 $\|\boldsymbol{C}^{-1}\|_\infty$ 和 $\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty$ 的上界。因为 $|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|$ 是 M-矩阵,则:

$$\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty=\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\boldsymbol{e}\|_\infty。$$

令 $\boldsymbol{y}=(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\boldsymbol{e}$,则 $\boldsymbol{e}=(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)\boldsymbol{y}$,写成分量有 $|a_{11}|y_1=1$,$|a_{ii}|y_i=1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|y_j,i\in\mathbf{N}$,$i\neq1$,由于 $|a_{ii}|y_i=z_i(\boldsymbol{A})$,则

$$\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty=\|\boldsymbol{y}\|_\infty=\max_{i\in\mathbf{N}}\frac{z_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}。\tag{2}$$

将该结果代入(1)式得 $\|\boldsymbol{C}^{-1}\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{1-\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\dfrac{z_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}\|\boldsymbol{U}\|_\infty}$。

又因为 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{C}^{-1}\|_\infty\|(|\boldsymbol{D}|-|L|)^{-1}\|_\infty$,所以 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\dfrac{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\dfrac{z_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}}{1-\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\dfrac{z_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}\|\boldsymbol{U}\|_\infty}$。 证毕

注 1 当 $\|\boldsymbol{U}\|_\infty<1$ 时,本文得到的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 上界的估计式小于文献[15]中的相应估计式,所以这一结果改进了文献[15]中的结果。

定理 2 若矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\cdot n}$ 是 Nekrasov 矩阵,则 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\dfrac{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}z_i(\boldsymbol{A})\||\boldsymbol{D}|^{-1}\|_\infty}{1-\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\dfrac{z_i(\boldsymbol{A})}{|a_{ii}|}\|\boldsymbol{U}\|_\infty}$。

其中,$z_1(\boldsymbol{A})=1,z_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j=1}^{i-1}\dfrac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|}z_j(\boldsymbol{A})+1,i\in\mathbf{N},i\neq1$。

证明　因为矩阵 A 是 Nekrasov 矩阵，则由引理 3 知 $\boldsymbol{E}-(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|$ 是严格对角占优矩阵，记 $\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{D}|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|$，显然 $\boldsymbol{B}$ 仍然是严格对角占优矩阵。又因为 $\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{D}|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\langle\boldsymbol{A}\rangle$，所以 $\langle\boldsymbol{A}\rangle=[|\boldsymbol{D}|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}]^{-1}\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{D}|^{-1})\boldsymbol{B}$，即 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\|\langle\boldsymbol{A}\rangle^{-1}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty\|(\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{D}|^{-1})^{-1}\|_\infty$

下面分别计算 $\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty$ 和 $\|(\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{D}|^{-1})^{-1}\|_\infty$。因为 $\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{D}|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|$，则应用引理 3 知，

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{D}^{-1}\|_\infty\|(\boldsymbol{E}-(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|)^{-1}\|_\infty,$$

$$\|(\boldsymbol{E}-(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|)^{-1}\|_\infty=\|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{-1}(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^{-1}(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|)^{-1}\boldsymbol{E}^{-1}\|_\infty=$$

$$\|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|)^{-1}\|_\infty\leqslant$$

$$\|\boldsymbol{E}\|_\infty+\|\boldsymbol{E}\|_\infty\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{U}\|_\infty\frac{1}{1-\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|\|_\infty}\leqslant$$

$$1+\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{U}\|_\infty\frac{1}{1-\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{U}\|_\infty}=\frac{1}{1-\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{U}\|_\infty}。$$

所以 $\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty\leqslant\|\boldsymbol{D}^{-1}\|_\infty\|(\boldsymbol{E}-(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|)^{-1}\|_\infty\leqslant\dfrac{\|\boldsymbol{D}^{-1}\|_\infty}{1-\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{U}\|_\infty}$。

因为 $\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{D}|^{-1}$ 是 M-矩阵，所以 $\|(\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{D}|^{-1})^{-1}\|_\infty=\|(\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{D}|^{-1})^{-1}\boldsymbol{e}\|_\infty$。定义

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{D}|^{-1})^{-1}\boldsymbol{e},$$

则 $\boldsymbol{e}=(\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{D}|^{-1})\boldsymbol{z}(\boldsymbol{A})$，写成分量有 $z_1(\boldsymbol{A})=1$，$z_i(\boldsymbol{A})=1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\dfrac{|a_{ij}|}{|a_{jj}|}z_j(\boldsymbol{A})$，$i\in\mathbf{N}$，$i\neq1$。所以

$$\|(\boldsymbol{E}-|\boldsymbol{L}||\boldsymbol{D}|^{-1})^{-1}\|_\infty=\|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{A})\|_\infty=\max_{i\in\mathbf{N}}z_i(\boldsymbol{A})。$$

结合以上二式得

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant\frac{\||\boldsymbol{D}|^{-1}\|_\infty}{1-\|(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}\|_\infty\|\boldsymbol{U}\|_\infty}\max_{i\in\mathbf{N}}z_i(\boldsymbol{A})\leqslant$$

$$\frac{\||\boldsymbol{D}|^{-1}\|_\infty}{1-\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\dfrac{z_i(\boldsymbol{A})}{|\boldsymbol{a}_{ii}|}\|\boldsymbol{U}\|_\infty}\max_{i\in\mathbf{N}}z_i(\boldsymbol{A})=\frac{\max\limits_{i\in\mathbf{N}}z_i(\boldsymbol{A})\||\boldsymbol{D}|^{-1}\|_\infty}{1-\max\limits_{i\in\mathbf{N}}\dfrac{z_i(\boldsymbol{A})}{|\boldsymbol{a}_{ii}|}\|\boldsymbol{U}\|_\infty}。$$

证毕

注 2　定理 2 所得的 $\|A^{-1}\|_\infty$ 的估计式，与文献[15]中估计式的优劣性无法从理论上进行比较。

3 数值例子

下面通过选用恰当的数值算例，说明本文的估计式优于文献[15]所给的估计式。设：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}8&-0.3&-0.3&-0.1\\-9&16&-0.5&-0.4\\-6&-4&15&-0.2\\-4.9&-0.9&-0.9&6\end{pmatrix}。$$

应用 Nekrasov 矩阵的定义验证，$\boldsymbol{A}$ 是 Nekrasov 矩阵，应用文献[15]中的估计式得 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant0.4453$，应用本文的结果得 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant0.4263$，$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty\leqslant0.4391$。而真值为 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty=0.3308$。

通过上述数值算例发现，本文的结果一定程度上提高了文献[15]中的相应结果。所以定理 1，定理 2 中的估计式是对 Nekrasov 矩阵的逆矩阵无穷范数上界估计的一个有益补充和完善。

参考文献：

[1] VARGA R S. Matrix iterative analysis[M]. Berlin Springer Verlag, 2000.
[2] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in matrix analysis [M]. New York: Cambridge University Press, 1991.
[3] LI W. On Nekrasov matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1998, 281: 87-96.

[4] BERMAN A, PLEMMONS R J. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. Classics in Applied Mathematics, 1994, 9: 32-40.

[5] ROBERT F. Blocs H-matrices et convergence des methods iteratives classiques par blocs[J]. Linear Algebra Appl, 1969, 2: 223-265.

[6] SZULC T. Some remarks on a theorem of Gudkov[J]. Linear Algebra Appl, 1975, 11: 3-5.

[7] 赵建兴，桑彩丽. 严格 α-对角占优 M-矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ 的上界估计[J]. 数学的实践与认识，2015，45(19)：280-284.
ZHAO J X, SANG C L. Estimation of the upper bound on $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$ for strictly diagonally dominant M-matrix $\boldsymbol{A}$ [J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory, 2015, 45(19): 280-284.

[8] 郭爱丽，聂祥荣，武玲玲. Nekrasov 矩阵行列式界的估计[J]. 安徽大学学报(自然科学版)，2015，39(6)：15-18.
GUO A L, NIE X R, WU L L. On bounds of determinants for the Nekrasov matrices[J]. Journal of Anhui University (Natural Science Edition): 2015, 39(6): 15-18.

[9] 王银燕，徐伸，陆全. 广义 Nekrasov 矩阵的迭代判定准则[J]. 高等学校计算数学学报，2015，37(1)：19-30.
WANG Y Y, XU S, LU Q. Iterative criteria for generalized Nekrasov matrices[J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2015, 37(1): 19-30.

[10] 郭爱丽，刘建州. 广义 Nekrasov 矩阵的新判据[J]. 数学的实践与认识，2016，46(5)：239-245.
GUO A L, LIU J Z. The new criteria for generalizad Nekrasov matrices[J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory, 2016, 46(5): 239-245.

[11] LI C Q, PEI H, GAO L, et al. Improvements on the infinity norm bound for the inverse of Nekrasov matrices[J]. Numerical Algorithms, 2016, 71(3): 613-630.

[12] CVETKOVIC L. H-matrix theory vs eigenvalue localication[J]. Numer Algor, 2006, 42(3/4): 229-245.

[13] CVETKOVIC L J, KOSTIC V, RAUSKI S. A new subclass of H-matrices[J]. Appl Math Comput, 2009, 208(1): 206-210.

[14] LJILJANA C, VLADIMIR K, KSENIJA D. Max-norm bounds for the inverseof S-Nekrasov matrices[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(18): 9498-9503.

[15] LJILJANA C, DAI P F, KSENIJ A D, et al. Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices[J]. Applied Mathematics & Computation, 2013, 219(10): 5020-5024.

New Upper Bounds of the Infinite Norm for the Inverse of Nekrasov matrices

LI Yanyan

(School of Mathematics, Wenshan University, Wenshan Yunnan 663009, China)

Abstract: [**Purposes**]Nekrasov matrix is a subclass of H-matrix, and it also contains strictly diagonally dominant matrix, An estimate of the upper bound of the infinite norm of the inverse of the matrix. [**Methods**]Firstly, splitting of matrix $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U})$; secondly, strictly diagonally dominant matrix $\boldsymbol{C}$ is constructed ($\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}-(|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{L}|)^{-1}|\boldsymbol{U}|$); finally, by using the definition of Nekrasov matrix, related lemmas, and contraction of inequality. [**Findings**]Got two good results for $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty$. [**Conclusions**] Theoretical and numerical examples are given to show that the results here are better than the existing results.

Keywords: infinite norm; Nekrasov matrix; H-matrix; upper bound

（责任编辑　许　甲）