DOI:10.11721/cqnuj20170409

单位圆内部分零级代数体函数的强 Borel 点及性质*

张　进
(德宏师范高等专科学校 数学系，云南 芒市 678400)

摘要:【目的】研究单位圆内在一定条件下,零级代数体函数的强 Borel 点存在性问题。【方法】应用建立的在角域取值的密指量与特征函数的关系式,以及特征函数与型函数的关系引理。【结果】证明得到了单位圆内在此条件下,零级代数体函数必存在强 Borel 点且它的强 Borel 点必是它的最大型 Borel 点及 Borel 点。【结论】从而得到了部分零级代数体函数的强 Borel 点存在定理及性质。

关键词:代数体函数;强 Borel 点;零级;单位圆
中图分类号:O174.52　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2017)04-0065-05

1 相关记号与定义

对于代数体函数的 Borel 方向及最大型 Borel 方向的存在性有过许多研究,文献[1-3]则进一步研究了复平面上有限正级、无穷级及零级代数体函数的强 Borel 方向的存在性。本研究主要针对单位圆内零级代数体函数的强 Borel 点存在性及它与最大型 Borel 点、Borel 点的关系进行了讨论。

假定 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由不可约方程

$$\psi(z,\omega)=A_v(z)\omega^v+A_{v-1}(z)\omega^{v-1}+\cdots+A_0(z)=0 \tag{1}$$

所确定的 v 值代数体函数。这里 $A_j(z)(j=0,1,\cdots,v)$ 都是 $|z|<1$ 内解析函数且不在一点同时为零。$\omega(z)$ 的单值定义域是一 Riemann 曲面 $\widetilde{R}_z$,$\widetilde{R}_z$ 是 z 平面的 v 叶覆盖,$\widetilde{R}_z$ 的点用 $\tilde{z}$ 表示,$\tilde{z}$ 在 z 平面的投影是 z,$\widetilde{R}_z$ 对应于 $|z|<r$ 的部分记为 $|\tilde{z}|<r$。令 $S(r,\omega)=\dfrac{1}{\pi}\iint_{|\tilde{z}|<r}\left[\dfrac{|\omega'(z)|}{1+|\omega^2(z)|}\right]^2\mathrm{d}\sigma$,$T(r,\omega)=\dfrac{1}{v}\int_0^r\dfrac{S(t,\omega)}{t}\mathrm{d}t$,称 $T(r,\omega)$ 是 $\omega(z)$ 的球面特征函数,它与 Nevanlinna 特征函数仅相差一个有界量[4]。

$n(r,\widetilde{R}_z)$ 表示 $\omega(z)$ 在 $|\tilde{z}|<r$ 的分支点的个数,分支点的级计算在内。令:

$$N(r,\widetilde{R}_z)=\frac{1}{v}\int_0^r\frac{n(t,\widetilde{R}_z)-n(0,\widetilde{R}_z)}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{v}n(0,\widetilde{R}_z)\log r,$$

由文献[4]可知 $N(r,\widetilde{R}_z)\leqslant 2(v-1)T(r,\omega)+o(1)$。

记 $\Delta(\theta_0,\varepsilon)=\{z\,||\arg z-\theta_0|<\varepsilon\}$,$\widetilde{R}_z$ 在 $\Delta(\theta_0,\varepsilon)$ 的部分记为 $\widetilde{\Delta}(\theta_0,\varepsilon)$,定义 $n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)$ 表示 $\omega(z)$ 在 $\widetilde{\Delta}(\theta_0,\varepsilon)\cap\{|\tilde{z}|<r\}$ 的 a 值点个数,记重数。类似可定义 $n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\widetilde{R}_z)$,$N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)$ 及 $N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\widetilde{R}_z)$。

$\omega(z)$ 的级定义为 $\rho=\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{\log T(r,\omega)}{\log\dfrac{1}{1-r}}$,若 ρ 分别为零、正数、∞,则对应地称 $\omega(z)$ 为零级、有限正级、无穷级代数体函数。本研究将主要讨论满足

$$\lim_{r\to 1}\frac{T(r,\omega)}{\log^n\dfrac{1}{1-r}}=\infty,\overline{\lim_{r\to 1}}\frac{\log T(r,\omega)}{\log\log\dfrac{1}{1-r}}=p\in[n,+\infty)(n\geqslant 1\text{ 是正整数}) \tag{2}$$

* 收稿日期:2016-04-26　　修回日期:2017-05-25　　网络出版时间:2017-05-16 11:27
资助项目:云南省教育厅科学研究基金(No. 2015Y581)
第一作者简介:张进,男,讲师,研究方向为函数论,E-mail:13578219676@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1127.086.html

的零级代数体函数(事实上,由(2)式显然可得 $\rho=0$)。

定义1 设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义且满足(2)式的 v 值零级代数体函数,若对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,对任何复数 a,有

$$\overline{\lim_{r\to1}}\frac{N(r,\Delta(\theta,\varepsilon),\omega=a)}{U\left(\frac{1}{1-r}\right)}>0,\tag{3}$$

至多除去 $2v$ 个例外值,称 $e^{i\theta_0}$ 是 $\omega(z)$ 的强 Borel 点;若(3)式中 $N(r,\Delta(\theta,\varepsilon),\omega=a)$ 换为 $n(r,\Delta(\theta,\varepsilon),\omega=a)$,称 $e^{i\theta_0}$ 是 $\omega(z)$ 的最大型 Borel 点,其中 $U\left(\frac{1}{1-r}\right)$ 是 $\omega(z)$ 的型函数(它的定义见引理1)。

2 几个引理

引理1 设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义且满足(2)式的 v 值零级代数体函数,则存在连续可微函数 $U(x)$,满足以下条件:1) $T(r,\omega)\ll U(x)$;2) 对充分大 x,$\frac{U(x)}{\log^n x}$ 单调趋于无穷;3) $U(x^k)=(k^p+o(1))\cdot U(x)$,$k>1$ 是任意正数。其中,$x=\frac{1}{1-r}$,称 $U(x)$ 是 $\omega(z)$ 的型函数。

注1 由文献[5]中的定理5.2.9可得。

引理2[6] 设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义的 v 值代数体函数,$a_1,a_2,\cdots,a_q(q>2)$ 是 ω 球面上相互判别的点,且有 $\sum_{j=1}^{q}n(1,a_j)<\infty$,$n(1,\tilde{R})<\infty$,则有

$$(q-2)S(r,\omega)\leqslant\sum_{j=1}^{q}n(1,a_j)+n(1,\tilde{R})+\frac{A}{1-r},0<r<1,$$

其中,A 是仅与 $a_1,a_2,\cdots,a_q$ 有关的常数。

引理3 设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式定义且满足(2)式的 v 值零级代数函数,$a_1,a_2,\cdots,a_q$,$q>2$ 是 ω 球面上相互判别的点,则对任意 $\varphi,\delta,\delta'(0<\delta'<\delta<\frac{\pi}{2},0\leqslant\varphi<2\pi)$,任意正数 $k>1$,有

$$(q-2)T(r,\Delta(\varphi,\delta'),\omega)\leqslant[1+2(k-1)]\left[\sum_{j=1}^{q}N(R,\Delta(\varphi,\delta),a_j)+N(R,\Delta(\varphi,\delta),\tilde{R}_z)\right]+o(U(x)),$$

其中,x,$U(x)$ 如引理1所设,$R=1-1/X$,$X=kx$。

证明 设函数 $f(z)=\frac{(ze^{-i\varphi})^{\frac{\pi}{\delta}}+2(ze^{-i\varphi})^{\frac{\pi}{2\delta}}R^{\frac{\pi}{2\delta}}-R^{\frac{\pi}{\delta}}}{(ze^{-i\varphi})^{\frac{\pi}{\delta}}-2(ze^{-i\varphi})^{\frac{\pi}{2\delta}}R^{\frac{\pi}{2\delta}}-R^{\frac{\pi}{\delta}}}$,则 $f(z)$ 将 $\{z\,||\arg z-\varphi|<\delta,|z|\leqslant R\}$ 映射到单位圆 $\{|f(z)|<1\}$。记 $F=\{z\,||\arg z-\varphi|<\delta',0<r_0\leqslant|z|\leqslant r\}$,$M=\max\left\{\frac{1}{1-|f(z)|}\,|z\in F\right\}$,则由 M 有界性,$f(z)$ 将 F 映射到单位圆内某一区域。以下求 M 的界。

设 $z=pe^{i(\varphi+\theta)}(r_0\leqslant p\leqslant r,|\theta|<\delta')$,则 $|f(z)|=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{C^2+D^2}}$,其中:

$$A=p^{\frac{\pi}{\delta}}\cos\frac{\pi\theta}{\delta}+2p^{\frac{\pi}{2\delta}}R^{\frac{\pi}{2\delta}}\cos\frac{\pi\theta}{2\delta}-R^{\frac{\pi}{\delta}},B=p^{\frac{\pi}{\delta}}\sin\frac{\pi\theta}{\delta}+2p^{\frac{\pi}{2\delta}}R^{\frac{\pi}{2\delta}}\sin\frac{\pi\theta}{2\delta},$$

$$C=p^{\frac{\pi}{\delta}}\cos\frac{\pi\theta}{\delta}-2p^{\frac{\pi}{2\delta}}R^{\frac{\pi}{2\delta}}\cos\frac{\pi\theta}{2\delta}-R^{\frac{\pi}{\delta}},D=p^{\frac{\pi}{\delta}}\sin\frac{\pi\theta}{\delta}-2p^{\frac{\pi}{2\delta}}R^{\frac{\pi}{2\delta}}\sin\frac{\pi\theta}{2\delta}。$$

由于 $1-|f(z)|=\frac{1-\frac{A^2+B^2}{C^2+D^2}}{1+\sqrt{\frac{A^2+B^2}{C^2+D^2}}}\geqslant\frac{4R^{\frac{\pi}{2\delta}}p^{\frac{\pi}{2\delta}}(R^{\frac{\pi}{\delta}}-p^{\frac{\pi}{\delta}})\cos\frac{\pi\theta}{2\delta}}{C^2+D^2}$,

$$C^2+D^2<25R^{\frac{2\pi}{\delta}},\cos\frac{\pi\theta}{2\delta}\geqslant\cos\frac{\pi\delta'}{2\delta}>0,$$

$$R^{\frac{\pi}{\delta}}-p^{\frac{\pi}{\delta}}\geqslant R^{\frac{\pi}{\delta}}-r^{\frac{\pi}{\delta}}=r^{\frac{\pi}{\delta}}\left\{\left[1+\frac{(1-r)(k-1)}{kr}\right]^{\frac{\pi}{\delta}}-1\right\}\geqslant Cr^{\frac{\pi}{\delta}}(1-r)。$$

故 $M<C\dfrac{1}{1-r}$，其中 C 是与 r 无关的正常数，在不同地方代表不同常数，则由引理 2，可得：

$$(q-2)S(r,\Delta(\varphi,\delta'),\omega)\leqslant\sum_{j=1}^{q}n(R,\Delta(\varphi,\delta),a_j)+n(R,\Delta(\varphi,\delta),\widetilde{R}_z)+o\left(\frac{1}{1-r}\right)。$$

由 $X=\dfrac{1}{1-R}$，$x=\dfrac{1}{1-r}$，$X=kx$，可得 $\dfrac{\mathrm{d}r}{r}=\dfrac{k-1+r}{r}\dfrac{\mathrm{d}R}{R}$，对上式两边同除以 vr，对 r 从 $\dfrac{1}{2}$ 到 r 积分，可得：

$$(q-2)T(r,\Delta(\varphi,\delta'),\omega)-(q-2)T\left(\frac{1}{2},\Delta(\varphi,\delta'),\omega\right)\leqslant$$

$$\frac{1+2(k-1)}{v}\left[\sum_{j=1}^{q}\int_{\frac{2k-1}{2k}}^{R}\frac{n(R,\Delta(\varphi,\delta),a_j)}{R}\mathrm{d}R+\int_{\frac{2k-1}{2k}}^{R}\frac{n(R,\Delta(\varphi,\delta),\widetilde{R}_z)}{R}\mathrm{d}R\right]+o\left(\log\frac{1}{1-r}\right)。$$

由上式，结合引理 1，可得：

$$(q-2)T(r,\Delta(\varphi,\delta'),\omega)\leqslant[1+2(k-1)]\left[\sum_{j=1}^{q}N(R,\Delta(\varphi,\delta),a_j)+N(R,\Delta(\varphi,\delta),\widetilde{R}_z)\right]+o(U(x))。$$ 证毕

引理 4　设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义且满足(2)式的 v 值零级代数体函数，$m(m\geqslant4)$ 是正整数，令 $\theta_i=2\pi i/m$，$\Omega(\theta_i)=\{z\,|\,|\arg z-\theta_i|<2\pi/m\}(i=0,1,\cdots,m-1)$，则在这 m 个角域 $\{\Omega(\theta_i)\}$ 至少存在一个角域 $\Omega(\theta_i)$，使得对任意复数 a，有 $\varlimsup\limits_{r\to1}\dfrac{N(r,\Omega(\theta_i),\omega=a)}{U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}>0$，至多除去 $2v$ 个例外值。

证明　假设结论不成立，则对每一个 $\Omega(\theta_i)$，$i=0,1,\cdots,m-1$，至少存在 $q=2v+1$ 个值 $\{a_i^j\}|_{j=1}^{q}$，满足 $\varlimsup\limits_{r\to1}\dfrac{N(r,\Omega(\theta_i),\omega=a_i^j)}{U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}=0$，则对 i,j 一致有：

$$N(r,\Omega(\theta_i),\omega=a_i^j)=o(U(x)),x=\frac{1}{1-r}。\tag{4}$$

设 $\theta_{i,l}=\dfrac{2\pi i}{m}+\dfrac{2\pi l}{\alpha m}$，$\alpha$ 是任意正整数，$0\leqslant l\leqslant\alpha-1$，记 $\Omega_{i,l}=\{z\,|\,|z|<R,\theta_{i,l}\leqslant\arg z<\theta_{i,l+1}\}$，则 $\{z\,|\,|z|<R\}=\bigcup_{l=0}^{\alpha-1}\bigcup_{i=0}^{m-1}\Omega_{i,l}$，因此必存在 $l(0\leqslant l\leqslant\alpha-1)$，不妨设 $l=0$，使得 $\sum\limits_{i=0}^{m-1}n(\Omega_{i,0},\widetilde{R}_z)\leqslant\dfrac{1}{\alpha}n(R,\widetilde{R}_z)$。记 $\overline{\Omega}_i=\left\{z\,\middle|\,\dfrac{\theta_{i,0}+\theta_{i,1}}{2}\leqslant\arg z\leqslant\dfrac{\theta_{i+1,0}+\theta_{i+1,1}}{2}\right\}$，$\Omega_i^0=\{z\,|\,\theta_{i,0}<\arg z<\theta_{i+1,1}\}$，则 $\overline{\Omega}_i\subset\Omega_i^0$。由于 $\bigcup_{i=0}^{m-1}\Omega_i^0$ 仅在 $\bigcup_{i=0}^{m-1}\Omega_{i,0}$ 上覆盖两次，故：

$$\sum_{i=0}^{m-1}N(R,\Omega_i^0,\widetilde{R}_z)\leqslant\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)N(R,\widetilde{R}_z)+o(1)。\tag{5}$$

对 $\overline{\Omega}_i$，Ω_i^0 应用引理 3，再对上式中的 $i=0,1,\cdots,m-1$ 求和，结合(4)，(5)式及引理 1，可得：

$$(q-2)T(r,\omega)\leqslant\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)[1+2(k-1)]N(R,\widetilde{R}_z)+o(U(X))+o(U(x))\leqslant$$

$$2(v-1)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)[1+2(k-1)]T(R,\omega)+o(U(X))+o(U(x)),\ X=\frac{1}{1-R}。\tag{6}$$

由引理 1 中 2)可知：对充分大 x，$U(x)$ 单调增加，再结合引理 1 中 1)，3)可得：

$$T(R,\omega)\leqslant U(X)=U(kx)\leqslant U(x^k)=(k^p+o(1))U(x),当\ x\geqslant x_0>k^{\frac{1}{k-1}}。$$

故对(6)式两边同除以 $U(x)$，令 $r\to1$ 取上极限，可得 $q-2\leqslant2(v-1)\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)[1+2(k-1)]k^p$，再让 $\alpha\to$

$\infty,k\to 1^{+}$,可得 $q\leqslant 2v$,矛盾。　　证毕

3 主要结果及证明

定理1　设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义且满足(2)式的 v 值零级代数体函数,则 $\omega(z)$ 必存在强 Borel 点。

证明　由引理4,对任意正整数 $m(m\geqslant 4)$,总存在一个角域不妨记为 $\Omega(\theta_m^0)$,使得对任意复数 a(至多有 $2v$ 个例外值 a),有 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{N(r,\Omega(\theta_m^0),\omega=a)}{U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}>0$。

由于 $\{\theta_m^0\}$ 有界,存在一收敛子列,仍记为 $\{\theta_m^0\}$,令 $\lim\limits_{m\to\infty}\theta_m^0=\theta_0$,则 $e^{i\theta_0}$ 即为 $\omega(z)$ 的强 Borel 点。　　证毕

推论1　设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义且满足(2)式的 v 值零级代数体函数,则 $\omega(z)$ 的强 Borel 点必是它的最大型 Borel 点。

证明　由定理1,$\omega(z)$ 必存在强 Borel 点,不妨设为设 $e^{i\theta_0}$,则对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,任意复数 a(至多有 $2v$ 个例外值 a),有 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}>0$。由于当 $0<r_0<r<1$,有

$$N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)=\frac{1}{v}\int_{r_0}^{r}\frac{n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{r}\mathrm{d}r+N(r_0,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)\leqslant$$
$$\frac{1}{v}n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)\log\frac{r}{r_0}+c。$$

上式同除以 $U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$,让 $r\to 1$ 取上极限,可得 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}>0$,即得结论。　　证毕

注2　依照文献[7]中结论对复平面零级代数体函数的最大型 Borel 方向的定义,由本推论结论显然可得 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\Big/\log\dfrac{1}{1-r}}>0$,故本推论可看作是文献[7]中结论在单位圆内的推广。

推论2　设 $\omega(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 内由(1)式所定义且满足(2)式的 v 值零级代数体函数,则 $\omega(z)$ 的强 Borel 点必是其关于 $\dfrac{1}{1-r}U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)$ 的 Borel 点。

证明　由定理1,设 $e^{i\theta_0}$ 是 $\omega(z)$ 的强 Borel 点,则有 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{\log n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{\log\left(\dfrac{1}{1-r}U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right)}\geqslant 1$,其中 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是任意正数,a 是任意复数(至多有 $2v$ 个例外值 a)。否则,对于某个 $\varepsilon\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,存在 $q=2v+1$ 个值 $\{a_j\}_{j=1}^{q}$,存在 $\sigma>0$,对每一个 j 一致有 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{\log n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)}{\log\left(\dfrac{1}{1-r}U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right)}<1-2\sigma$,结合引理1,得:

$$N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)=\frac{1}{v}\int_{r_1}^{r}\frac{n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)}{r}\mathrm{d}r+N(r_1,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)\leqslant$$
$$\frac{1}{v}\int_{r_1}^{r}\frac{U^{1-\sigma}\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\left(\dfrac{1}{1-r}\right)^{1-\sigma}}{r}\mathrm{d}r+c\leqslant\frac{U^{1-\sigma}\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}{vr_1\sigma}[(1-r_1)^{\sigma}-(1-r)^{\sigma}]+c。$$

所以 $\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{N(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a_j)}{U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}\leqslant\overline{\lim\limits_{r\to 1}}\dfrac{c}{U^{\sigma}\left(\dfrac{1}{1-r}\right)}=0$,这与 $e^{i\theta_0}$ 是 $\omega(z)$ 的强 Borel 点矛盾。　　证毕

另一方面，对任意复数 a，结合引理1，有

$$n(r,a)\log\frac{R}{r}\leqslant\int_r^R\frac{n(t,a)}{t}\mathrm{d}t\leqslant vN(R,a)\leqslant vT(R,\omega)+o(1)\leqslant vU(X)+o(1)=$$
$$vU(kx)+o(1)\leqslant vU(x^k)+o(1)=v(k^p+o(1))U(x),\tag{7}$$

其中，$R=1-\dfrac{1}{X}=1-\dfrac{1}{kx}=\dfrac{k-1+r}{k}$，$x=\dfrac{1}{1-r}$，$\log\dfrac{R}{r}=\log\left[1+\dfrac{(k-1)(1-r)}{kr}\right]=\left(\dfrac{(k-1)(1-r)}{kr}\right)(1-o(1))$。

则结合(7)式，可得 $\overline{\lim\limits_{r\to1}}\dfrac{\log n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{\log\left(\dfrac{1}{1-r}U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right)}\leqslant1$。

综上，对 $\forall\varepsilon\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，对任意的复数 a（有穷或否），至多除去 $2v$ 个例外值，有 $\overline{\lim\limits_{r\to1}}\dfrac{\log n(r,\Delta(\theta_0,\varepsilon),\omega=a)}{\log\left(\dfrac{1}{1-r}U\left(\dfrac{1}{1-r}\right)\right)}=1$，即得结论（可参见文献[8]中的定义）。　证毕

参考文献：

[1] 陈特为.代数体函数的强 Borel 方向[J].华南师范大学学报（自然科学版），1990(1)：32-38.
CHEN T W. The maximality Borel direction of algebroidal function[J]. Journal of South China Normal Univerisity (Natural Science Edition)，1990(1)：32-38.

[2] 陈特为.无穷级代数体函数的强 Borel 方向[J].华南师范大学学报（自然科学版），1994(4)：70-76.
CHEN T W. The maximality Borel direction of algebroidal function with infinite order of growth[J]. Journal of South China Normal Univerisity (Natural Science Edition)，1994(4)：70-76.

[3] 甘会林，孙道椿.零级代数体函数的强 Borel 方向[J].数学物理学报，2005，25A(5)：673-677.
GAN H L，SUN D C. The maximality Borel direction of zero order algebroidal function[J]. Acta Mathematica Scientia，2005，25A(5)：673-677.

[4] 何育赞，萧修治.代数体函数与常微分方程[M].北京：科学出版社，1988.
HE Y Z，XIAO X Z. Algebroidal function and ordinary differential equation[M]. Beijing：Science Press，1988.

[5] 孙道椿，高宗升.代数体函数的值分布[M].北京：科学出版社，2014.
SUN D C，GAO Z S. The value distribution theory of algebroidal function[M]. Beijing：Science Press，2014.

[6] TODA N. Surles direction de Julia et de Borel des functions algebroides[J]. Nagoya Math J，1963，34：1-23.

[7] 柳学坤.零级代数体亚纯函数的奇异方向[J].咸宁师专学报，1991，11(4)：282-286.
LIU X K. The singular direction of zero order algebroidal function[J]. Journal of Teacher College，1991，11(4)：282-286.

[8] 柳学坤.单位圆内代数体亚纯函数 Borel 点的存在性定理[J].咸宁师专学报，1992，12(3)：179-180.
LIU X K. The Borel point existence theorem of algebroidal function in unit[J]. Journal of Teacher College，1992，2(3)：179-180.

The Maximality Borel Point and Its Properties of Some Algebroidal Function with Zero Order in Unit Disk

ZHANG Jin

(Department of Mathematics, Dehong Teacher College, Mangshi Yunnan 678400, China)

Abstract: [**Purposes**]In order to study existence problem about the maximality Borel point of algebroidal function with zero order of growth in unit disk in certain conditions. [**Methods**]By using established relation of its counting function in angular domain and characteristic function, and lemmas about relation of characteristic function and type function. [**Findings**]It proved that algebroidal function with zero order of growth in unit disk in this conditions must possess one maximality Borel point, and its maximality Borel point must be its maximum Borel point and Borel point. [**Conclusions**]It gained that existence theorem and properties of some algebroidal function with zero order in unit disk.

Keywords: algebroidal function; maximality Borel point; zero order; unit disk

（责任编辑　游中胜）