2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目 DOI:10.11721/cqnuj20170504

运筹学与控制论

Gerstewitz 非线性标量化函数的性质及其在向量优化中的应用*

李伟佳, 朱 巧, 赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】对 Gerstewitz 非线性标量化函数的性质作进一步研究与应用。【方法】利用代数内部和向量闭包研究 Gerstewitz 非线性标量化函数的一些性质。【结果】给出了 Gerstewitz 非线性标量化函数的一些性质,进而利用这些性质建立了集值向量优化问题有效点和弱有效点的非线性标量化结果。【结论】将拓扑内部推广到代数内部情形,推广了 Gerstewitz 非线性标量化函数的一些性质与应用。

关键词:向量优化;Gerstewitz 非线性标量化函数;代数内部;非线性标量化;有效点;弱有效点

中图分类号:O221.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2017)05-0001-05

众所周知,向量优化理论与方法在工程设计、经济管理等诸多领域中均具有十分重要的应用。到目前为止,关于向量优化理论与方法研究已取得了大量基础且重要的成果[1-4]。非线性标量化方法是研究向量优化问题十分重要的方法之一。这种方法的基本思想是利用一些非线性标量化函数建立相应的非凸分离定理,进而借助非凸分离定理在无任何凸性假设的条件下获得向量优化问题有效解和弱有效解的一些非线性标量化结果。Tammer 等人在文献[5]中提出了 Gerstewitz 非线性标量化函数并建立了相应的非凸分离定理。这类非线性标量化函数已被广泛应用于向量优化问题解的性质研究[6-11]。特别地,Flores-Bazán 等人[8]利用 Gerstewitz 非线性标量化函数及相应的非凸分离定理给出了向量优化问题近似解的一些非线性标量化结果。Zhao 等人[10]利用 Gerstewitz 非线性标量化函数建立了由改进集定义的向量优化问题近似有效和近似弱有效解的非线性标量化结果。Nishizawa 等人[11]建立了序锥的拓扑内部非空条件下基于 Gerstewitz 非线性标量化函数的一些非线性择一性定理,并利用相应的择一性定理获得了向量优化问题有效解和弱有效解的非线性标量化结果。

值得注意的是,在向量优化问题研究中,当序锥的拓扑内部为空时,往往需要借助于一些广义内部工具。几类常用的广义内部包括相对拓扑内部、代数内部、相对代数内部、拟内部和拟相对内部等[12-13]。这些广义内部工具已被一些学者用于研究序锥的拓扑内部可能为空时的向量优化问题[14-18]。特别地,Bao 等人[14]利用变分分析等工具建立了几类基于广义内部而定义的向量优化问题弱有效解的一些存在性结果。Xia 等人[16]研究了拟内部意义下基于改进集而定义的近似弱有效解的线性标量化结果。

受文献[11-12,14-16]中研究工作的启发,本文利用代数内部和向量闭包等工具获得了 Gerstewitz 非线性标量化函数的一些性质,进而利用这些性质建立集值向量优化问题弱有效点和有效点的一些非线性标量化结果。

1 预备知识

假定 Y 为实线性空间,A 为 Y 中非空子集。文献[12]中定义 A 的代数内部和向量闭包分别为

$$\mathrm{cor}A=\{\boldsymbol{y}\in Y\mid \forall \boldsymbol{h}\in Y,\exists \varepsilon>0,\forall t\in[0,\varepsilon],\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{h}\in A\},$$

$$\mathrm{vcl}A=\{\boldsymbol{y}\in Y\mid \exists \boldsymbol{h}\in Y,\forall \varepsilon>0,\exists t\in(0,\varepsilon],\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{h}\in A\}。$$

Gerth 等人[5]引入了一类非线性标量化函数 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})$,并定义为 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})=\inf\{t\in\mathbf{R}\mid \boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{k}-C\}$,其中 $\boldsymbol{k}\in\mathrm{int}C$,$\boldsymbol{y}\in Y$。称这类函数为 Gerstewitz 非线性标量化函数。本文假定 Y 为实线性空间,$C\subset Y$ 是代数内部非空的凸锥且 $C\neq Y$,$\boldsymbol{k}\in\mathrm{cor}C$。

* **收稿日期**:2016-10-01 **修回日期**:2017-07-05 **网络出版时间**:2017-09-11 14:40

资助项目:国家自然科学基金(No.11431004;No.11671062; No.11271391);重庆市基础与前沿研究计划项目(No.cstc2015jcyjA00027);重庆市教委科学技术研究项目(No.KJ1500303);重庆市研究生科研创新项目(No.CYS17174)

第一作者简介:李伟佳,男,研究方向为向量优化理论与方法,E-mail:mathwjli@163.com;**通信作者**:赵克全,教授,E-mail:kequanz@163.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170911.1440.004.html

2 代数内部意义下函数 h_C 的性质

本节在凸锥 C 的代数内部非空条件下给出 Gerstewitz 非线性标量化函数 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})$的一些性质。

定理1　假定凸锥 C 的代数内部非空。则:i) 若 $\boldsymbol{y}\in -\mathrm{cor}C$,则对任意$\boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$,$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$;ii) 若存在$\boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$使得$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$,则 $\boldsymbol{y}\in -\mathrm{cor}C$。

证明　i) 若 $\boldsymbol{y}\in -\mathrm{cor}C$,则对 $\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$,存在 $\varepsilon>0$,使得 $\boldsymbol{y}+\varepsilon\boldsymbol{k}\in -C$,即 $\boldsymbol{y}\in -\varepsilon\boldsymbol{k}-C$。故 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant -\varepsilon<0$。

ii) 若$\exists\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$ 使得$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$,则$\exists\, t'$使得$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<t'<0$ 且 $\boldsymbol{y}\in t'\boldsymbol{k}-C$。由于 C 是凸锥,$-\boldsymbol{k}\in -\mathrm{cor}C$,故$t'\boldsymbol{k}\in -\mathrm{cor}C$。因此有 $\boldsymbol{y}\in t'\boldsymbol{k}-C\subset -\mathrm{cor}C-C=-\mathrm{cor}C$。　证毕

定理2　假定凸锥 C 的代数内部非空。则:i) 若 $\boldsymbol{y}\in -\mathrm{vcl}C$,则对$\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$,$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$;ii) 若$\exists\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$ 使得$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$,则 $\boldsymbol{y}\in -\mathrm{vcl}C$。

证明　i) 若 $\boldsymbol{y}\in -\mathrm{vcl}C$,则对$\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$,$\lambda>0$,有:

$$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})=\inf\{t:\boldsymbol{y}\in t\boldsymbol{k}-C\}=\inf\{t:\boldsymbol{y}-\lambda\boldsymbol{k}+\lambda\boldsymbol{k}\in t\boldsymbol{k}-C\}=$$
$$\inf\{t:\boldsymbol{y}-\lambda\boldsymbol{k}\in (t-\lambda)\boldsymbol{k}-C\}=h_C(\boldsymbol{y}-\lambda\boldsymbol{k};\boldsymbol{k})+\lambda。$$

因为C 是凸锥,所以 $\boldsymbol{y}-\lambda\boldsymbol{k}\in -\mathrm{cor}C$。故由定理1 的 i)可知,$h_C(\boldsymbol{y}-\lambda\boldsymbol{k};\boldsymbol{k})<0$,因此,$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<\lambda$。由于$\lambda$ 可以是任意正数,故对$\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$,$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$。

ii) 若$\exists\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$ 使得 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$,则由定理1 的 ii)可知 $\boldsymbol{y}\in -\mathrm{cor}C\subset -\mathrm{vcl}C$。若 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})=0$,则存在$t_n>0$使得 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<t_n<h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})+\dfrac{1}{n}$,$n\in \mathbf{N}^+$。因此,$\boldsymbol{y}+t_n(-\boldsymbol{k})\in -C$。由于当 $n\to\infty$时,$t_n\to 0$。故对$-\boldsymbol{k}\in Y$,任意 $\varepsilon>0$,存在 $t_n\in(0,\varepsilon]$使得 $\boldsymbol{y}+t_n(-\boldsymbol{k})\in -C$。因此 $\boldsymbol{y}\in -\mathrm{vcl}C$。　证毕

定理3　假定凸锥 C 代数内部非空,则 $\mathrm{cor}C\cap(-\mathrm{vcl}C)=\varnothing$。

证明　假定$\exists\, \boldsymbol{y}\in \mathrm{cor}C\cap(-\mathrm{vcl}C)$。因为 C 是凸集,故有$\dfrac{1}{2}\boldsymbol{y}+\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{y}\right)\in \mathrm{cor}C$,即 $0\in \mathrm{cor}C$。因此,对$\forall\, \boldsymbol{h}\in Y$,$\exists\, \varepsilon>0$ 使得 $0+t\boldsymbol{h}\in C$,$\forall\, t\in(0,\varepsilon]$。由 C 是锥可知$\boldsymbol{h}\in C$,故 $C=Y$。这与本文假设相矛盾。从而有 $\mathrm{cor}C\cap(-\mathrm{vcl}C)=\varnothing$。　证毕

定理4　假定凸锥 C 的代数内部非空。则:i) 若 $\boldsymbol{y}\in \mathrm{cor}C$,则对$\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$,$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})>0$;ii) 若 $\boldsymbol{y}\in \mathrm{vcl}C$,则对$\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$,$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\geqslant 0$。

证明　i) 若 $\boldsymbol{y}\in \mathrm{cor}C$,则由定理3 可知 $\boldsymbol{y}\notin -\mathrm{vcl}C$。再由定理2 的 ii)可得 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})>0$,$\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$。

ii) 若 $\boldsymbol{y}\in \mathrm{vcl}C$,则由定理3 可知 $\boldsymbol{y}\notin -\mathrm{cor}C$。再由定理1 的 ii)可得 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\geqslant 0$,$\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$。　证毕

定理5　假定凸锥 C 的代数内部非空且 $\boldsymbol{y},\overline{\boldsymbol{y}}\in Y$,则:i) 若 $\boldsymbol{y}\in \overline{\boldsymbol{y}}+\mathrm{cor}C$,则对任意 $\boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$,$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})>h_C(\overline{\boldsymbol{y}};\boldsymbol{k})$;ii) 若 $\boldsymbol{y}\in \overline{\boldsymbol{y}}+\mathrm{vcl}C$,则对$\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$,$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\geqslant h_C(\overline{\boldsymbol{y}};\boldsymbol{k})$。

证明　i) 若 $\boldsymbol{y}\in \overline{\boldsymbol{y}}+\mathrm{cor}C$,则$\exists\, \boldsymbol{c}\in \mathrm{cor}C$ 使得 $\overline{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{y}-c$。则对$\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$,由 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})$的次可加性以及定理1 的 i)可知 $h_C(\overline{\boldsymbol{y}};\boldsymbol{k})=h_C(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{c};\boldsymbol{k})\leqslant h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})+h_C(-\boldsymbol{c};\boldsymbol{k})<h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})$。

ii) 由定理2 的 i)同理可证。　证毕

定理6　假定凸锥 C 的代数内部非空且 $\boldsymbol{y},\overline{\boldsymbol{y}}\in Y$。则:i) 若 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})>h_C(\overline{\boldsymbol{y}};\boldsymbol{k})$,则 $h_C(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}};\boldsymbol{k})>0$;ii) 若 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\geqslant h_C(\overline{\boldsymbol{y}};\boldsymbol{k})$,则 $h_C(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}};\boldsymbol{k})\geqslant 0$。

证明　i) 若 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})>h_C(\overline{\boldsymbol{y}};\boldsymbol{k})$,则由定理5 的 ii)可知,$\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}}\notin -\mathrm{vcl}C$。因此,则由定理2 的 ii)可知,$h_C(\boldsymbol{y}-\overline{\boldsymbol{y}};\boldsymbol{k})>0$。

ii) 由定理5 的 i)以及定理1 的 ii)同理可证。　证毕

定理7　假定凸锥 C 的代数内部非空。则:i) 若 $A\cap(-\mathrm{cor}C)\neq\varnothing$,则对$\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$,$\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in A}h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$;ii) 若$\exists\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$ 使得$\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in A}h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$,则 $A\cap(-\mathrm{cor}C)\neq\varnothing$。

证明　i) 若 $A\cap(-\mathrm{cor}C)\neq\varnothing$,则$\exists\, \boldsymbol{y}\in A\cap(-\mathrm{cor}C)$。由定理1 的 i)可知 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$,$\forall\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$。故$\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in A}h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$。

ii) 若$\exists\, \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$ 使得$\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in A}h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$,则$\exists\, \varepsilon_0>0$,$\boldsymbol{y}_0\in A$ 使得$h_C(\boldsymbol{y}_0;\boldsymbol{k})\leqslant\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in A}h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})+\varepsilon_0<0$。由定理1

的 ii)可知，$\boldsymbol{y}_0 \in -\mathrm{cor}C$。故 $A \cap (-\mathrm{cor}C) \neq \varnothing$。　证毕

为进一步研究非线性标量化函数 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})$的一些性质，下面给出代数紧集的定义。

定义 1　设 Y 为实线性空间，A 为 Y 中的非空子集。称 A 是代数紧的，若对 A 的任意代数开覆盖，必存在有限子覆盖。

注 1　由于拓扑开集一定是代数开集，故若 A 是代数紧，则 A 必是拓扑紧，反之不一定成立。

例 1　令 $Y=\mathbf{R}^2$，$A=[0,1]\times[0,1)\subset Y$，$\boldsymbol{\tau}=\{B\times C\in \mathbf{R}^2 \mid B$ 为 $\mathbf{R}$ 中的开集，$C=(-\infty,+\infty)\}$。易证 Y 是关于 $\boldsymbol{\tau}$ 的局部凸拓扑线性空间且 A 关于 $\boldsymbol{\tau}$ 是拓扑紧的。然而，存在代数开集族 $(-1,2)\times\left(-1,1-\dfrac{1}{n}\right)$，$n=1,2,3,\cdots$覆盖 A，但不存在有限子覆盖。故 A 不是代数紧的。

定理 8　假定凸锥 C 的代数内部非空。则：i) 若 $A\subset -\mathrm{cor}C$ 且 A 为代数紧集，则对 $\forall \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$，$\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$；ii) 若 $\exists \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$，使得 $\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$，则 $A\subset -\mathrm{cor}C$。

证明　i) 若 $A\subset -\mathrm{cor}C$ 且 A 是代数紧集，则对 $\forall \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$，$A\subset -\mathrm{cor}C=\bigcup_{t>0}(-t\boldsymbol{k}-\mathrm{cor}C)$。由 A 的紧性可知，$\exists t_1,t_2,\cdots,t_m>0$ 使得 $A\subset \bigcup_{i=1}^{m}(-t_i\boldsymbol{k}-\mathrm{cor}C)$。

令 $t_0=\min\{t_1,t_2,\cdots,t_m\}>0$，则有 $A\subset -t_0\boldsymbol{k}-\mathrm{cor}C$。故对 $\forall \boldsymbol{y}\in A$，$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant t_0$，从而有 $\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant -t_0<0$。

ii) 若 $\exists \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$ 使得 $\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$，则对 $\forall \boldsymbol{y}\in A$，$h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$。由定理 1 的 ii)可知 $\boldsymbol{y}\in -\mathrm{cor}C$，故有 $A\subset -\mathrm{cor}C$。　证毕

推论 1　假定存在代数紧集 B 使得 $B\subset -\mathrm{cor}C$ 且集合 A 满足 $A\subset B-C$。则对 $\forall \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$，$\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$。

证明　因为 $B\subset -\mathrm{cor}C$ 且 B 是代数紧集，所以由定理 8 的 i)可得 $\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in B} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$，$\forall \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$。由于 $A\subset B-C$，故对 $\forall \boldsymbol{y}\in A$，$\exists \boldsymbol{b}\in B$，$\boldsymbol{c}\in -C\subset -\mathrm{vcl}C$ 使得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$。由 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})$的次可加性以及定理 2 的 i)可得 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})=h_C(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c};\boldsymbol{k})\leqslant h_C(\boldsymbol{b};\boldsymbol{k})+h_C(\boldsymbol{c};\boldsymbol{k})\leqslant \sup\limits_{\boldsymbol{z}\in B} h_C(\boldsymbol{z};\boldsymbol{k})<0$。因此，对 $\forall \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$，$\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$。　证毕

定理 9　假定凸锥 C 的代数内部非空。则：i) 若 $A\cap(-\mathrm{vcl}C)\neq\varnothing$，则对 $\forall \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$，$\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$；ii) 若 A 为代数紧集且 $\exists \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$，使得 $\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$，则 $A\cap(-\mathrm{vcl}C)\neq\varnothing$。

证明　i) 若 $A\cap(-\mathrm{vcl}C)\neq\varnothing$，则 $\exists \boldsymbol{y}\in A\cap(-\mathrm{vcl}C)$。由定理 2 的 i)可得 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$，$\forall \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$。因此，$\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$。

ii) 若 $\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$，由定理 7 的 ii)可得 $A\cap(-\mathrm{vcl}C)\neq\varnothing$。若 $\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})=0$，由 A 的代数紧性和注 1 可知，A 也是拓扑紧集。故 $\exists \boldsymbol{y}\in A$，使得 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})=0$。因此，$\exists t_n>0$ 使得 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<t_n<h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})+\dfrac{1}{n}$，$n\in \mathbf{N}^+$。故 $\boldsymbol{y}+t_n(-\boldsymbol{k})\in -C$。由于当 $n\to\infty$时，$t_n\to 0$。故对 $-\boldsymbol{k}\in Y$，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists t_n\in(0,\varepsilon]$使得 $\boldsymbol{y}+t_n(-\boldsymbol{k})\in -C$。因此 $\boldsymbol{y}\in -\mathrm{vcl}C$，从而 $A\cap(-\mathrm{vcl}C)\neq\varnothing$。　证毕

定理 10　假定凸锥 C 的代数内部非空。则：i) 若 $A\subset -\mathrm{vcl}C$，则对 $\forall \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$，$\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$；ii) 若 $\exists \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$，使得 $\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$，则 $A\subset -\mathrm{vcl}C$。

证明　i) 若 $A\subset -\mathrm{vcl}C$，则对 $\forall \boldsymbol{y}\in A$，由定理 2 的 i)可得 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$，$\forall \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$。因此，对 $\forall \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$，$\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$。

ii) 若 $\exists \boldsymbol{k}\in \mathrm{cor}C$，使得 $\sup\limits_{\boldsymbol{y}\in A} h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$，则对 $\forall \boldsymbol{y}\in A$，有 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})\leqslant 0$。由定理 2 的 ii)可知 $\boldsymbol{y}\in -\mathrm{vcl}C$。故 $A\subset -\mathrm{vcl}C$。　证毕

3 有效点与弱有效点的非线性标量化

本节假定 X 为非空集合，Y 和 Z 为实序线性空间，C 和 D 分别为 Y 和 Z 中代数内部非空的凸锥且 $C\neq Y$。设 $F:X\to 2^Y$，$G:X\to 2^Z$ 为集值映射。考虑下面的集值向量优化问题：

$$\begin{aligned}(\mathrm{VP})\quad &\min\nolimits_C F(\boldsymbol{x}),\\ &G(\boldsymbol{x})\cap(-D)\neq\varnothing,\end{aligned}$$

其中,可行域 $V=\{\boldsymbol{x}\in X:G(\boldsymbol{x})\cap(-D)\neq\varnothing\}$。

定义 2 $\boldsymbol{x}_0\in V$ 称为(VP)的弱有效解,如果 $\exists\,\boldsymbol{y}_0\in F(\boldsymbol{x}_0)$ 使得 $F(V)\cap(\boldsymbol{y}_0-\mathrm{cor}C)=\varnothing$。此时称点对 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 为(VP)的弱有效点。

定义 3 $\boldsymbol{x}_0\in V$ 称为(VP)的有效解,如果 $\exists\,\boldsymbol{y}_0\in F(\boldsymbol{x}_0)$ 使得 $F(V)\cap(\boldsymbol{y}_0-C\setminus\{\boldsymbol{0}_Y\})=\varnothing$。此时称点对 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 为(VP)的有效点。

下面主要利用上节中获得的非线性标量化函数 $h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})$ 的一些性质建立(VP)的有效点和弱有效点的等价刻画。

定理 11 设 $\boldsymbol{x}_0\in V$ 且 $\boldsymbol{y}_0\in F(\boldsymbol{x}_0)$,则 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 是(VP)的弱有效点当且仅当 $\exists\,\boldsymbol{k}\in\mathrm{cor}C$ 使得对 $\forall\,\boldsymbol{y}\in F(V)$, $h_C(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0;\boldsymbol{k})\geqslant 0$。

证明 假定 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 是(VP)的弱有效点。若对 $\forall\,\boldsymbol{k}\in\mathrm{cor}C$, $\exists\,\boldsymbol{y}\in F(V)$,使得 $h_C(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0;\boldsymbol{k})<0$,则 $\inf\limits_{\boldsymbol{y}\in F(V)-\boldsymbol{y}_0}h_C(\boldsymbol{y};\boldsymbol{k})<0$。由定理 7 的 ii)可知,$(F(V)-\boldsymbol{y}_0)\cap(-\mathrm{cor}C)\neq\varnothing$,即 $F(V)\cap(\boldsymbol{y}_0-\mathrm{cor}C)\neq\varnothing$。这与条件矛盾。

反之,假定 $\exists\,\boldsymbol{k}\in\mathrm{cor}C$ 使得对 $\forall\,\boldsymbol{y}\in F(V)$, $h_C(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0;\boldsymbol{k})\geqslant 0$。若 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 不是(VP)的弱有效点,则 $\exists\,\boldsymbol{y}\in F(V)$ 使得 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\in-\mathrm{cor}C$。由于 $\boldsymbol{k}\in\mathrm{cor}C$,故由定理 1 的 i)可得 $h_C(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0;\boldsymbol{k})<0$。这与条件矛盾。 证毕

定理 12 设 $\boldsymbol{x}_0\in V$ 且 $\boldsymbol{y}_0\in F(\boldsymbol{x}_0)$。若凸锥 C 是向量闭的,则 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 是(VP)的有效点当且仅当 $\exists\,\boldsymbol{k}\in\mathrm{cor}C$ 使得对 $\forall\,\boldsymbol{y}\in F(V)$, $h_C(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0;\boldsymbol{k})>0$。

证明 假定 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 是(VP)的有效点。若对 $\forall\,\boldsymbol{k}\in\mathrm{cor}C$, $\exists\,\boldsymbol{y}\in F(V)\setminus\{(\boldsymbol{y}_0)_Y\}$,使得 $h_C(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0;\boldsymbol{k})\leqslant 0$。则由定理 2 的 ii)可知,$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\in-\mathrm{vcl}C$。因为 C 是向量闭的,所以 $\mathrm{vcl}C=C$。因此有 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\in-C$。故有 $(F(V)\setminus\{(\boldsymbol{y}_0)_Y\}-\boldsymbol{y}_0)\cap(-C)\neq\varnothing$,即 $F(V)\cap(-\boldsymbol{y}_0-C\setminus\{\boldsymbol{0}_Y\})\neq\varnothing$。这与条件矛盾。

反之,假定 $\exists\,\boldsymbol{k}\in\mathrm{cor}C$ 使得对任意 $\boldsymbol{y}\in F(V)$, $h_C(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0;\boldsymbol{k})>0$。若 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 不是(VP)的有效点,则存在 $\boldsymbol{y}\in F(V)$ 使得 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0\in-C$。因为 $\boldsymbol{k}\in\mathrm{cor}C$ 且 C 是向量闭的,所以由定理 2 的 i)可得 $h_C(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0;\boldsymbol{k})\leqslant 0$。这与条件矛盾。 证毕

注 2 本文所获得的主要结果推广了文献[11]中的相应结果到代数内部情形。若凸锥 C 的拓扑内部非空,则本文中的结果与文献[11]中的相应结果一致。

参考文献:

[1] CHEN G Y,HUANG X X,YANG X Q.Vector optimization[M].Berlin:Springer-Verlag,2005.

[2] JAHN J.Vectoroptimization:Theory,applications,andexten-sions[M].Berlin:Springer-Verlag,2004.

[3] 戎卫东,杨新民.向量优化及其若干进展[J].运筹学学报,2014,18:9-38.
RONG W D,YANG X M.Vector optimization and its develop-ments[J].OR Transactions,2014,18:9-38.

[4] ZHAO K Q ,CHENG G Y,YANG X M.Approximate proper efficiency in vector optimization[J].Operations Research Transactions,2014,64:1-17.

[5] GERTH C,WEIDNER P.Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization[J].Journal of Optimization Theory and Applications,1990,67:297-320.

[6] GÖPFERT A,RIAHI H,TAMMER C,et al.Variational methods in partially ordered spaces[M].New York:Springer-Verlag,2003.

[7] TAMMER C,ZĂLINESCU C.Lipschitz properties of the scalarization function and applications[J].Optimization,2010,59:305-319.

[8] FLORES-BAZÁN F,HERNÁNDEZ E.A unified vector optimization problem:complete scalarizations and applications[J].Optimization,2011,60:1399-1419.

[9] 夏远梅,赵克全.向量优化中 ε-真有效解的非线性标量化性质[J].运筹学学报,2014,18:58-64.
XIA Y M,ZHAO K Q.ε-proper efficiency in vector optimization[J].Operations Research Transactions,2014,18:58-64.

[10] ZHAO K Q,XIA Y M,YANG X M.Nonlinear scalarization characterizations of E-efficiency in vector optimization[J].Taiwanese Journal of Mathematics,2015,19:455-466.

[11] NISHIZAWA S,ONODSUKA M,TANAKA T.Alternative theorems for set-valued maps based on a nonlinear scalarization[J].Pacific Journal of Optimization,2005,1:147-159.

[12] 史树中.凸分析[M].上海:上海科学技术出版社,1990.
SHI S Z.Convex analysis[M].Shanghai:Shanghai Scientific & Technical Publishers,1990.

[13] BORWEIN J M,Lewis A S.Partially finite convex program-ming,Part I quasi relative interiors and duality theo-

ry[J].Mathematical Programming,1992,57:15-48.

[14] BAO T Q,Mordukhovich S.Relative Pareto minimizers for multiobjective problems:existence and optimality conditions[J].Mathematical Programming,2010,122:301-347.

[15] ADÁN M,NOVO V.Weak efficiency in vector optimization using a closure of algebraic type under cone-convexlikeness[J]. Mathematical Programming,2003,149:641-653.

[16] XIA Y M,ZHANG W L,ZHAO K Q.Characterizations of improvement sets via quasi interior and applications in vector optimization[J].Optimization Letters,2016,10:769-780.

[17] 赵克全,夏远梅.凸锥的一个广义内部性质[J].应用数学学报,2016,39:289-297.
ZHAO K Q,XIA Y M.An generalized interior properties of convex cone[J].Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2016,39:289-297.

[18] ZHOU Z A,YANG X M.Optimality conditions of generalized subconvexlike set-valued optimization problems based on the quasi-relative interior[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2011,150:327-340.

Operations Research and Cybernetics

Properties of Gerstewitz Nonlinear Scalarization Function and Applications in Vector Optimization

LI Weijia, ZHU Qiao, ZHAO Kequan

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]The properties and applications of Gerstewitz nonlinear scalarization function are studied further. [**Methods**] Using the algebraic interior and the vector closure, some properties of Gerstewitz nonlinear scalarization function are studied. [**Findings**]Some properties are given for the Gerstewitz nonlinear scalarization function and some nonlinear scalarization results of (weakly) efficient points are established by making use of these properties for a class of vector optimization problems with set-valued maps. [**Conclusion**]Some results in the sense of topological interior are generalized to the case of algebraic interior, and some properties and applications of Gerstewitz nonlinear scalarization function are generalized.

Keywords: vector optimization; gerstewitz nonlinear scalarization function; algebraic interior; nonlinear scalarization; efficient point; weakly efficient point

(责任编辑 黄 颖)