2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目　　DOI:10.11721/cqnuj20170437

运筹学与控制论

基于 Q-函数的集值 Ekeland 变分原理*

万　轩[1]，瞿先平[1,2]

(1. 重庆电讯职业学院 基础部，重庆 402247；2. 重庆理工大学 计算机科学与工程学院，重庆 400054)

摘要:【目的】在拟度量空间中建立一种新类型的集值 Ekeland 变分原理。【方法】利用非线性标量化函数和 Q-函数等工具对拟度量空间中的数值 Ekeland 变分原理和 Ha 型集值 Ekeland 变分原理进行进一步推广。【结果】在拟度量空间中建立集值映射的 Ekeland 变分原理。【结论】新的 Ekeland 变分原理包含一些经典的 Ekeland 变分原理作为特例，对拟度量空间中的数值 Ekeland 变分原理和 Ha 型集值 Ekeland 变分原理进行推广。

关键词:Ekeland 变分原理;集值映射;非线性标量化;Q-函数;拟度量空间

中图分类号:O176;O177.91　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2017)05-0006-06

众所周知，Ekeland 变分原理已成为解决非线性分析、最优控制理论、博弈论以及向量优化领域相关问题的强有力的工具。20 世纪 70 年代，Ekeland[1-2]给出了关于带扰动的下半连续函数取严格极小值的经典的 Ekeland 变分原理，这是非线性分析中最重要的成果之一。近些年来，许多学者对 Ekeland 变分原理做了大量广泛而深入的研究，并取得了一系列重要研究成果[3-11]。特别地，Al-Homidan 等人[3]分别在拟度量空间和完备拟度量空间中建立了具有 Q-函数的 Ekeland 变分原理，并在完备拟度量空间中研究它的等价性。Chen 等人[4]分别基于完备序空间和完备度量空间建立了广义集值 Ekeland 变分原理。Ha[5]于局部凸空间中建立了一类变形的集值 Ekeland 变分原理，即 Ha 型集值 Ekeland 变分原理，并研究了它的稳定性。Qiu[6]对 Ha 在文献[5]中所建立的 Ha 型集值 Ekeland 变分原理进行了进一步的改进，并建立了相应的等价性定理。此外，Gutiérrez 等人[7]和 Qiu[8]对集值度量形式的集值 Ekeland 变分原理进行了大量研究。

本文在文献[3-6,9]中研究工作的启发下，借助于非线性变量化函数并利用 Q-函数等工具对拟度量空间中的数值 Ekeland 变分原理和 Ha 型集值 Ekeland 变分原理进行推广，在拟度量空间中建立一种新类型的集值 Ekeland 变分原理。

1 预备知识

本文设 Y 为局部凸空间，$\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{R}_+$ 表示非负实数集，$\mathbf{R}_{++}$ 表示正实数集。记 $\mathrm{int}A$ 和 ∂A 分别表示集合 A 的拓扑内部和 A 的边界。锥 K 称为点锥当且仅当 $K\cap(-K)=\{0\}$。设 $K\subseteq Y$ 为点闭凸锥且 $\mathrm{int}\,K\neq\varnothing$，对任意的 $x,y\in K$ 有 $x\leqslant_K y\Leftrightarrow y-x\in K$。

设 X 为非空集合。若实值函数 $d:X\times X\to\mathbf{R}_+$ 使得对任意 $x,y\in X$ 满足:i) 非负性，$d(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$;ii) 三角不等式，$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，则称映射 d 是 X 上的拟度量，(X,d)称为拟度量空间。

注 1　若拟度量 d 还满足:iii) 对称性，对任意 $x,y\in X$ 满足 $d(x,y)=d(y,x)$，则称拟度量 d 是 X 上的度量，(X,d)称为度量空间。故拟度量空间是度量空间的推广。

集值映射 $F:X\to 2^Y$ 和数值函数 $\varphi:Y\to\mathbf{R}_{++}$。称 F 为 K-闭的，若对任意 $x\in X$ 使得 $F(x)+K$ 是闭的。称 φ 是 K-非减函数，若对任意 $A,B\subseteq Y$ 满足 $B\subseteq A+K$，则 $\varphi\circ A\leqslant\varphi\circ B$。

定义 1[3]　设(X,d)为拟度量空间，映射 $q:X\times X\to\mathbf{R}_+$ 满足:(Q_1) $q(x,y)\leqslant q(x,z)+q(z,y)$，$\forall\, x,y,$

* **收稿日期**:2016-09-21　**修回日期**:2016-11-04　**网络出版时间**:2017-05-16　11:25

资助项目:重庆市教委科学技术研究项目(No.KJ1605201);重庆市基础与前沿研究计划项目(No.cstc2015jcyjA00027)

第一作者简介:万轩，男，讲师，研究方向为向量优化理论及应用，E-mail:wanxuantony@126.com

网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1125.030.html

$z\in X$；(Q_2) 若 $x\in X$，序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$，存在 $M=M(x)>0$ 使得 $q(x,y_n)\leqslant M$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$（关于拟度量），则 $q(x,y)\leqslant M$；(Q_3) 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $q(x,y)\leqslant\delta$ 和 $q(x,z)\leqslant\delta$ 蕴含 $d(y,z)\leqslant\varepsilon$，则称映射 q 在 X 中为 Q-函数。

定义 2[6]　称 F 在点 $\bar{x}$ 处为 K-依次下单调函数，若任意 $n\in\mathbf{N}$，$F(x_n)\subseteq F(x_{n+1})+K$ 且 $x_n\to\bar{x}$ 蕴含 $F(x_n)\subseteq F(\bar{x})+K$。称 F 在 X 上为 K-依次下单调函数，若 F 在任意 $x\in X$ 处均为 K-依次下单调函数。

定义 3[6]　称 (X,d) 为 (F,K)-下完备的，若 Cauchy 点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$ 收敛且对任意 $n\in\mathbf{N}$ 满足 $F(x_n)\subseteq F(x_{n+1})+K$。

引理 1[3]　设 (X,d) 为拟度量空间，q 为 Q-函数，设序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$，$\{\alpha_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq\mathbf{R}_+$，$\{\beta_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq\mathbf{R}_+$ 且 $\alpha_n\to 0$，$\beta_n\to 0$。对任意 $x,y,z\in X$ 有下列结果成立：

i) 若对任意 $n\in\mathbf{N}$ 均有 $q(x_n,y)\leqslant\alpha_n$ 和 $q(x_n,z)\leqslant\beta_n$，则 $y=z$。特别地，若 $q(x,y)=0$ 和 $q(x,z)=0$，则 $y=z$。

ii) 若对任意 $n,m\in\mathbf{N}$，$m>n$ 有 $q(x_n,x_m)\leqslant\alpha_n$，则 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ 是 Cauchy 点列。

非线性标量化函数 $\Psi_{k,K}:Y\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ 定义为 $\Psi_{k,K}=\inf\{t\in\mathbf{R}:y\in tk-K\}$，其中 $k\in Y$，$\varnothing\neq K\subseteq Y$，$\inf\varnothing=+\infty$。

引理 2[3]　设 $k_0\in\operatorname{int}K$，则 $\Psi_{k_0,K}$ 是次线性下半连续函数且对任意 $y\in Y$ 具有如下性质：i) $\Psi_{k_0,K}(y)<r\Leftrightarrow y\in rk_0-\operatorname{int}K$；ii) $\Psi_{k_0,K}(y)\leqslant r\Leftrightarrow y\in rk_0-K$；iii) $\Psi_{k_0,K}(y)=r\Leftrightarrow y\in rk_0-\partial K$。特别地，$\Psi_{k_0,K}(k_0)=1$，$\Psi_{k_0,K}(\lambda k_0)=\lambda$，$\forall\lambda\in\mathbf{R}$，则有：iv) $\Psi_{k_0,K}(y)\geqslant r\Leftrightarrow y\notin rk_0-\operatorname{int}K$；v) $\Psi_{k_0,K}(y)>r\Leftrightarrow y\notin rk_0-K$；vi) $\Psi_{k_0,K}(y+\lambda k_0)=\Psi_{k_0,K}(y)+\lambda$，$\forall\lambda\in\mathbf{R}$；vii) $y_1\leqslant_K y_2\Rightarrow\Psi_{k_0,K}(y_1)\leqslant\Psi_{k_0,K}(y_2)$。

2 主要结果

本节主要利用非线性标量化函数建立具有 Q-函数的集值 Ekeland 变分原理，并讨论它一些特殊形式。

引理 3　设 (X,d) 是拟度量空间，$k_0\in\operatorname{int}K$，$q$ 为 Q-函数，φ 为 K-非减函数。在 X 中定义序“$\sqsupseteq$”：

$$v\sqsupseteq u\Leftrightarrow u=v\text{ 或 }F(u)\subseteq F(v)+\frac{1}{\varphi\circ F(u)}q(u,v)k_0+K,$$

则序“$\sqsupseteq$”为拟序，即序“$\sqsupseteq$”满足自反性和传递性。

证明　显然序“$\sqsupseteq$”具有自反性。下证序“$\sqsupseteq$”具有传递性。设任意 $u,v,w\in X$ 使得 $v\sqsupseteq u$，$w\sqsupseteq v$，即：

$$u=v\text{ 或 }F(u)\subseteq F(v)+\frac{1}{\varphi\circ F(u)}q(u,v)k_0+K,\tag{1}$$

$$v=w\text{ 或 }F(v)\subseteq F(w)+\frac{1}{\varphi\circ F(v)}q(v,w)k_0+K。\tag{2}$$

若 $u=v$ 或 $v=w$，序“$\sqsupseteq$”显然具有传递性，故设 $u\neq v\neq w$，则由(1)式和(2)式以及 K 为凸锥可得：

$$\begin{aligned}F(u)&\subseteq F(w)+\frac{1}{\varphi\circ F(v)}q(v,w)k_0+K+\frac{1}{\varphi\circ F(u)}q(u,v)k_0+K=\\&F(w)+\frac{1}{\varphi\circ F(u)}q(u,v)k_0+\frac{1}{\varphi\circ F(v)}q(v,w)k_0+K=\\&F(w)+\frac{1}{\varphi\circ F(u)}\left(q(u,v)+\frac{\varphi\circ F(u)}{\varphi\circ F(v)}q(v,w)\right)k_0+K。\end{aligned}\tag{3}$$

因为 $\varphi\circ F(u)>0$，$q(u,v)\geqslant 0$，$k_0\in\operatorname{int}K$ 以及 K 为凸锥，故由(1)式得 $F(u)\subseteq F(v)+K$，再由 φ 为 K-非减函数得 $\varphi\circ F(u)\geqslant\varphi\circ F(v)$，由 $\varphi\circ F(u)>0$，$\varphi\circ F(v)>0$ 以及 Q-函数定义中(Q_1)知 $q(u,v)+\frac{\varphi\circ F(u)}{\varphi\circ F(v)}q(v,w)\geqslant q(u,v)+q(v,w)\geqslant q(u,w)$，则：

$$\left(q(u,v)+\frac{\varphi\circ F(u)}{\varphi\circ F(v)}q(v,w)\right)k_0\in q(u,w)k_0+K。\tag{4}$$

从而由(3)式和(4)式可得 $F(u)\subseteq F(w)+\frac{1}{\varphi\circ F(u)}q(u,w)k_0+K$，即 $w\sqsupseteq u$，故“$\sqsupseteq$”具有传递性，因此序“$\sqsupseteq$”为拟序。　　证毕

引理 4 设(X,d)是拟度量空间,$k_0\in\mathrm{int}\,K$,集值映射 F 在 X 上为 K-依次下单调函数,q 为 Q-函数,φ 为 K-非减函数。设序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$ 是关于$\sqsupseteq$的递减序列(即对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有 $x_{n+1}\sqsupseteq x_n$)且收敛于 $\bar{x}$,则对任意 $n\in\mathbf{N}$有 $\bar{x}\sqsupseteq x_n$。

证明 因为序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$ 是关于$\sqsupseteq$的递减序列,则对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有 $x_{n+1}\sqsupseteq x_n$,即:

$$x_{n+1}=x_n \text{ 或 } F(x_n)\subseteq F(x_{n+1})+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_{n+1})k_0+K, \tag{5}$$

若 $x_{n+1}=x_n$,则序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$ 为常数序列,结论显然成立,故不妨假设 $x_{n+1}\neq x_n$。又因为 $\varphi\circ F(x_n)>0$,$q(x_n,x_{n+1})\geqslant 0$,$k_0\in\mathrm{int}\,K$ 以及 K 为凸锥,故由(5)式可得 $F(x_n)\subseteq F(x_{n+1})+K$。又 F 在 X 上为 K-依次下单调函数,则:

$$F(x_n)\subseteq F(\bar{x})+K,\forall n\in\mathbf{N}。 \tag{6}$$

任意给定 $n\in\mathbf{N}$,则至多存在一个 $m_1>n$ 使得$q(x_n,x_{m_1})=0$,否则,若存在 $m_2>n$ 且 $m_1\neq m_2$ 使得 $q(x_n,x_{m_2})=0$,则根据引理1中的i)可得 $m_1=m_2$,这是矛盾的。故不妨取对任意 $m\in N$ 且 $m>m_1>n$ 使得 $q(x_n,x_m)>0$。再由序列$\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$ 是关于$\sqsupseteq$的递减序列可得 $x_m\sqsupseteq x_n$,即:

$$F(x_n)\subseteq F(x_m)+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_m)k_0+K。 \tag{7}$$

由(6)式中 n 的任意性有 $F(x_m)\subseteq F(\bar{x})+K$,再结合(7)式以及 K 为凸锥可得:

$$F(x_n)\subseteq F(\bar{x})+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_m)k_0+K。$$

则对任意 $y_n\in F(x_n)$,存在 $\bar{y}\in F(\bar{x})$,使得 $y_n\subseteq\bar{y}+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_m)k_0+K$,即:

$$\bar{y}-y_n\in-\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_m)k_0-K。 \tag{8}$$

利用引理2中的ii)和(8)式可得 $\Psi_{k_0,K}(\bar{y}-y_n)\leqslant-\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_m)$,从而通过 $\varphi\circ F(x_n)>0$ 有 $q(x_n,x_m)\leqslant-\varphi\circ F(x_n)\Psi_{k_0,K}(\bar{y}-y_n)$。设 $M=-\varphi\circ F(x_n)\Psi_{k_0,K}(\bar{y}-y_n)$。

又 $\varphi\circ F(x_n)>0$,$q(x_n,x_m)>0$,$k_0\in\mathrm{int}\,K$,故通过(8)式有 $\bar{y}-y_n\in-\mathrm{int}\,K$,从而通过引理2中的i)可得 $\Psi_{k_0,K}(\bar{y}-y_n)<0$,故 $M>0$,因此利用 Q-函数的定义中(Q_2),可得对任意固定的 $n\in\mathbf{N}$ 有 $q(x_n,\bar{x})\leqslant M=-\varphi\circ F(x_n)\Psi_{k_0,K}(\bar{y}-y_n)$,即 $\Psi_{k_0,K}(\bar{y}-y_n)\leqslant-\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,\bar{x})$,故由引理2中的ii)可得:

$$\bar{y}-y_n\in-\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,\bar{x})k_0-K,$$

故联合 $\bar{y}\in F(\bar{x})$有:

$$y_n\in\bar{y}+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,\bar{x})k_0+K\subseteq F(\bar{x})+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,\bar{x})k_0+K。$$

又由 $y_n\in F(x_n)$的任意性知 $F(x_n)\subseteq F(\bar{x})+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,\bar{x})k_0+K$,即对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有 $\bar{x}\sqsupseteq x_n$。 证毕

定理 1 设(X,d)是拟度量空间,$k_0\in\mathrm{int}\,K$,集值映射 F 在 X 上为 K-依次下单调函数,q 为 Q-函数,φ 为 K-非减函数。设(X,d)为(F,K)-下完备的。假设 $x_0\in X$ 使得 $F(x_0)\nsubseteq F(X)+k_0+K$。则存在 $\bar{x}\in X$,使得

$$F(x_0)\subseteq F(\bar{x})+\frac{1}{\varphi\circ F(x_0)}q(x_0,\bar{x})k_0+K, \tag{9}$$

$$F(\bar{x})\nsubseteq F(x)+\frac{1}{\varphi\circ F(\bar{x})}q(\bar{x},x)k_0+K,\forall x\in X\backslash\{\bar{x}\}。 \tag{10}$$

证明 设 $S(x_0):=\{x\in X:x\sqsupseteq x_0\}=\left\{x\in X:x=x_0 \text{ 或 } F(x_0)\subseteq F(x)+\frac{1}{\varphi\circ F(x_0)}q(x_0,x)k_0+K\right\}$。由引理3可得 $x_0\in S(x_0)$。又 $F(x_0)\nsubseteq F(X)+k_0+K$,则存在 $y_0\in F(x_0)$满足 $y_0\notin F(X)+k_0+K$,即:

$$F(X)\cap(y_0-k_0-K)=\varnothing。 \tag{11}$$

由 $S(x_0)\subseteq X$ 可得 $F(S(x_0))\cap(y_0-k_0-K)=\varnothing$。于是对任意 $y\in F(S(x_0))$ 满足 $y\notin y_0-k_0-K$，即 $y-y_0\notin -k_0-K$。故利用引理 2 中的 v)可得对任意 $y\in F(S(x_0))$ 有 $\Psi_{k_0,K}(y-y_0)>-1$。又因为 $y_0\in F(x_0)\subseteq F(S(x_0))$ 和 $\Psi_{k_0,K}(y_0-y_0)=\Psi_{k_0,K}(0)=0$，则：

$$-1\leqslant \inf_{y\in F(S(x_0))}\Psi_{k_0,K}(y-y_0)<+\infty。\tag{12}$$

下面在 X 中归纳非常值序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$。取 $x_1\in S(x_0)$ 和 $y_1\in F(x_1)$ 满足：

$$\Psi_{k_0,K}(y_1-y_0)<\inf_{y\in F(S(x_0))}\Psi_{k_0,K}(y-y_0)+\frac{1}{2}。\tag{13}$$

对任意 $x\in S(x_1)$ 有 $x\sqsupseteq x_1$，又由 $x_1\in S(x_0)$，可知 $x_1\sqsupseteq x_0$，故由引理 3 可得 $x\sqsupseteq x_0$，即 $x\in S(x_0)$，因此 $S(x_1)\subseteq S(x_0)$。结合(11)式可得 $F(S(x_1))\cap(y_0-k_0-K)=\varnothing$，则对任意 $y\in F(S(x_1))$ 有 $y\notin y_0-k_0-K$，即 $y-y_0\notin -k_0-K$，从而利用引理 2 中的 v)可得对任意 $y\in F(S(x_1))$ 有 $\Psi_{k_0,K}(y-y_0)>-1$，再结合(12)式和(13)式可得 $-1\leqslant \inf\limits_{y\in F(S(x_1))}\Psi_{k_0,K}(y-y_0)<+\infty$，再取 $x_2\in S(x_1)$ 和 $y_2\in F(x_2)$ 满足：

$$\Psi_{k_0,K}(y_2-y_0)<\inf_{y\in F(S(x_1))}\Psi_{k_0,K}(y-y_0)+\frac{1}{2^2}。$$

同理可得 $x_2\sqsupseteq x_1$ 和 $S(x_2)\subseteq S(x_1)$。以此类推，假设 $x_{n-1}\in S(x_{n-2})$ 和 $y_{n-1}\in F(x_{n-1})$ 已知，则选取 $x_n\in S(x_{n-1})$ 和 $y_n\in F(x_n)$ 使得：

$$\Psi_{k_0,K}(y_n-y_0)<\inf_{y\in F(S(x_{n-1}))}\Psi_{k_0,K}(y-y_0)+\frac{1}{2^n}。\tag{14}$$

于是可得序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$ 是关于 $\sqsupseteq$ 的递减序列和 $S(x_0)\supseteq S(x_1)\supseteq S(x_2)\supseteq\cdots\supseteq S(x_n)\supseteq\cdots$。

下证 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$ 是 Cauchy 点列。对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有 $x_n\in S(x_{n-1})$，则 $x_n\sqsupseteq x_{n-1}$，故由引理 3 可得，对满足 $n<m$ 的正整数 n 和 m 有 $x_m\sqsupseteq x_n$。又由"$\sqsupseteq$"的定义和 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$ 是非常值序列可得：

$$y_n\in F(x_n)\subseteq F(x_m)+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_m)k_0+K。$$

因此，存在 $y_m'\in F(x_m)$ 使得 $y_n\in y_m'+\dfrac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_m)k_0+K$，即：

$$y_n-y_0\geqslant_K y_m'-y_0+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_m)k_0。$$

故由引理 2 中的 vi)和 vii)可得：

$$\Psi_{k_0,K}(y_n-y_0)\geqslant\Psi_{k_0,K}(y_m'-y_0)+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_m)。\tag{15}$$

又由 $x_m\in S(x_{m-1})\subseteq\cdots\subseteq S(x_{n-1})$，得 $y_m'\in F(x_m)\subseteq F(S(x_{n-1}))$，因此

$$\Psi_{k_0,K}(y_m'-y_0)\geqslant\inf_{y\in F(S(x_{n-1}))}\Psi_{k_0,K}(y-y_0)。\tag{16}$$

则由(14)～(16)式可得对 $n<m$ 的两个正整数 n 和 m，有：

$$\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_m)\leqslant\Psi_{k_0,K}(y_n-y_0)-\Psi_{k_0,K}(y_m'-y_0)\leqslant\Psi_{k_0,K}(y_n-y_0)-\inf_{y\in F(S(x_{n-1}))}\Psi_{k_0,K}(y-y_0)<\frac{1}{2^n}。$$

又 $\varphi\circ F(x_n)>0$，故令 $\alpha_n=\varphi\circ F(x_n)\cdot\dfrac{1}{2^n}$，则 $q(x_n,x_m)\leqslant\alpha_n$ 和 $\alpha_n\geqslant 0$。又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，故根据引理 1 中的 ii)可得 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$ 是 Cauchy 点列。又因为 $x_{n+1}\in S(x_n)$，$k_0\in\operatorname{int}K\subseteq K$ 以及 K 为凸锥，则 $F(x_n)\subseteq F(x_{n+1})+\dfrac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,x_{n+1})k_0+K\subseteq F(x_{n+1})+K$，故由 (X,d) 为 (F,K)-下完备的，则存在 $\bar{x}\in X$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$。又由序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}\subseteq X$ 是关于 $\sqsupseteq$ 的递减序列和引理 4 可得对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有 $\bar{x}\sqsupseteq x_n$，从而可得 $\bar{x}\in S(x_n)$。再结合 $S(x_n)\subseteq S(x_{n-1})\subseteq\cdots\subseteq S(x_0)$，于是 $\bar{x}\in S(x_0)$，即 $F(x_0)\subseteq F(\bar{x})+\dfrac{1}{\varphi\circ F(x_0)}q(x_0,\bar{x})k_0+K$，故(9)式成立。

下证 $S(\bar{x})=\{\bar{x}\}$。显然 $\bar{x}\in S(\bar{x})$。对任意的 $z\in S(\bar{x})$，则 $z\sqsupseteq\bar{x}$，又因为对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有 $\bar{x}\sqsupseteq x_n$，故由引理 3 可得对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有 $z\sqsupseteq x_n$。从而通过对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有 $\bar{x}\sqsupseteq x_n$ 和 $z\sqsupseteq x_n$ 可得：

$$F(x_n)\subseteq F(z)+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,z)k_0+K,F(x_n)\subseteq F(\bar{x})+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,\bar{x})k_0+K。$$

又 $y_n\in F(x_n)$,则存在 $y'\in F(z)$ 和存在 $\bar{y}\in F(\bar{x})$ 使得:

$$y_n-y_0\subseteq y'-y_0+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,z)k_0+K,y_n-y_0\subseteq \bar{y}-y_0+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,\bar{x})k_0+K,$$

即 $y_n-y_0\geqslant_K y'-y_0+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,z)k_0,y_n-y_0\geqslant_K\bar{y}-y_0+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,\bar{x})k_0$。

故由引理 2 中的 vi)和 vii)可得:

$$\Psi_{k_0,K}(y_n-y_0)\geqslant\Psi_{k_0,K}(y'-y_0)+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,z),\tag{17}$$

$$\Psi_{k_0,K}(y_n-y_0)\geqslant\Psi_{k_0,K}(\bar{y}-y_0)+\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,\bar{x})。\tag{18}$$

因为对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有 $\bar{x}\sqsupseteq x_n$ 和 $z\sqsupseteq x_n$,则 $z\in S(x_n)\subseteq S(x_{n-1})$,$\bar{x}\in S(x_n)\subseteq S(x_{n-1})$,故 $y'\in F(z)\subseteq F(S(x_{n-1}))$,$\bar{y}\in F(\bar{x})\subseteq F(S(x_{n-1}))$,因此:

$$\Psi_{k_0,K}(y'-y_0)\geqslant\inf_{y\in F(S(x_{n-1}))}\Psi_{k_0,K}(y-y_0),\tag{19}$$

$$\Psi_{k_0,K}(\bar{y}-y_0)\geqslant\inf_{y\in F(S(x_{n-1}))}\Psi_{k_0,K}(y-y_0),\tag{20}$$

则由(14)式和(17)～(20)式可得:

$$\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,z)\leqslant\Psi_{k_0,K}(y_n-y_0)-\Psi_{k_0,K}(y'-y_0)\leqslant\Psi_{k_0,K}(y_n-y_0)-\inf_{y\in F(S(x_{n-1}))}\Psi_{k_0,K}(y-y_0)<\frac{1}{2^n},$$

$$\frac{1}{\varphi\circ F(x_n)}q(x_n,\bar{x})\leqslant\Psi_{k_0,K}(y_n-y_0)-\Psi_{k_0,K}(\bar{y}-y_0)\leqslant\Psi_{k_0,K}(y_n-y_0)-\inf_{y\in F(S(x_{n-1}))}\Psi_{k_0,K}(y-y_0)<\frac{1}{2^n}。$$

又 $\varphi\circ F(x_n)>0$,故令 $\alpha_n=\beta_n=\varphi\circ F(x_n)\cdot\frac{1}{2^n}$,则 $q(x_n,z)\leqslant\alpha_n,q(x_n,\bar{x})\leqslant\beta_n$ 和 $\alpha_n=\beta_n\geqslant 0$。又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$,故根据引理 1 中的 i)可得 $z=\bar{x}$,再由 z 的任意性知 $S(\bar{x})=\{\bar{x}\}$,因此对任意 $x\in X\setminus\{\bar{x}\}$,有 $x\notin S(\bar{x})$,即 $F(\bar{x})\not\subseteq F(x)+\frac{1}{\varphi\circ F(\bar{x})}q(\bar{x},x)k_0+K$,故(10)式成立。 证毕

注 2 当 $Y=\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$,$K=\mathbf{R}_+$,$k_0=1$,集值映射 F 退化为数值函数时,则定理 1 可退化为文献[3] 中定理 3.1 形式的 Ekeland 变分原理。

推论 1 设(X,d)是拟度量空间,$k_0\in\operatorname{int}K$,集值映射 $F:X\to 2^Y$ 在 X 上为 K-依次下单调函数,q 为 Q-函数,φ 为 K-非减函数。设(X,d)为(F,K)-下完备的。假设 $x_0\in X$ 和对任意 $\varepsilon>0$ 使得 $F(x_0)\not\subseteq F(X)+\varepsilon k_0+K$。则存在 $\bar{x}\in X$,使得:

$$F(x_0)\subseteq F(\bar{x})+\frac{\varepsilon}{\varphi\circ F(x_0)}q(x_0,\bar{x})k_0+K,F(\bar{x})\not\subseteq F(x)+\frac{\varepsilon}{\varphi\circ F(\bar{x})}q(\bar{x},x)k_0+K,\forall x\in X\setminus\{\bar{x}\}。$$

证明 由于 q 为 Q-函数,显然根据 Q-函数的定义易得对任意 $\varepsilon>0$,εq 也是 Q-函数,故通过定理 1 可得成立。 证毕

注 3 当(X,d)为度量空间,对任意 $x,y\in X$ 有 $q(x,y)=d(x,y)$和对任意 $A\subseteq Y$ 有 $\varphi\circ A=1$ 时,则推论 1 可退化为文献[6] 中定理 3.1 中 $\lambda=1$ 形式的 Ekeland 变分原理。

参考文献:

[1] EKELAND I. On the variational principle[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1974,47:324-353.

[2] EKELAND I. Nonconvex minimization problems[J]. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 1979,1(3):443-474.

[3] AL-HOMIDAN S,ANSARI Q H,YAO J C. Some generalizations of Ekeland-type variational principle with applications to equilibrium problems and fixed point theory[J]. Nonlinear Analysis,2008,69:126-139.

[4] CHEN G Y,HUANG X X,HOU S H. General Ekeland's variational principle for set-valued mappings[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2000,106(1):151-164.

[5] HA T X D. Some variants of the Ekeland variational princi-

ple for a set-valued map[J].Journal of Optimization Theory and Applications,2005,124(1):187-206.

[6] QIU J H.On Ha's version of set-valued Ekeland's variational principle[J].Acta Mathematica Sinica,English Series,2012,28(4):717-726.

[7] GUTIERREZ C,JIMENEZ B,NOVO V.A set-valued Ekeland's variational principle in vector optimization[J].SIAM Journal on Control and Optimization,2008,47(2):883-903.

[8] QIU J H.Set-valued quasi-metrics and a general Ekeland's variational principle in vector optimization[J].SIAM Journal on Control and Optimization,2013,51(2):1350-1371.

[9] GUTIERREZ C,JIMENEZ B,NOVO V,et al. Strict approximate solutions in set-valued optimization with applications to the approximate Ekeland variational principle[J].Nonlinear Analysis,2010,73:3842-3855.

[10] 万轩,张万里,赵克全.基于改进集的集值 Ekeland 变分原理[J].纯粹数学与应用数学,2015,31(6):567-574.
WAN X,ZHANG W L,ZHAO K Q.Ekeland's variational principle via improvement sets for set-valued maps[J].Pure and Applied Mathematics,2015,31(6):567-574.

[11] 万轩,赵克全.关于局部凸空间中向量 Ekeland 变分原理的等价性[J].运筹学学报,2013,17(3):124-128.
WAN X,ZHAO K Q.Equivalence on vectorial Ekeland's variational principle in locally convex spaces[J].Operations Research Transactions,2013,17(3):124-128.

Operations Research and Cybernetics

Ekeland's Variation Principle via Q-function with Set-valued Maps

WAN Xuan[1], QU Xianping[1,2]

(1. Department of Foundation, Chongqing Telecommunication Polytechnic College, Chongqing 402247;
2. College of Computer Science and Engineering, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: [**Purposes**]A new type of set-valued Ekeland's variation principle is introduced in quasi-metric spaces.[**Methods**]Generalize the scalar Ekeland's variation principle in quasi-metric spaces and Ha's version of set-valued Ekeland's variation principle by using some tools including as nonlinear scalarization function and Q-functions.[**Findings**]Establish the Ekeland's variational principle via Q-functions with set-valued maps in quasi-metric spaces.[**Conclusions**]New Ekeland's variation principle includes some classical Ekeland's variation principles as its special cases.

Keywords: Ekeland's variation principle; set-valued map; nonlinear scalarization function; Q-functions; quasi-metric spaces

(责任编辑　黄　颖)