2016 年度重庆市出版专项基金资助栏目　　DOI:10.11721/cqnuj20170501

运筹学与控制论

基于截断学习效应的流水作业排序问题研究*

王雪茹，白雪莲，王吉波，殷　娜
(沈阳航空航天大学 理学院，沈阳 110136)

摘要:【目的】给出具有截断学习效应的加权总完工时间流水作业排序问题的最优解。【方法】建立具有截断学习效应的加权总完工时间流水作业排序问题的数学模型,给出优势性质、下界和上界,并采用分支定界算法求解该问题的最优解。【结果】数值模拟结果表明:启发式算法得到的解比较准确,最大误差为 0.411 7,分支定界算法的效率比较高,处理 100 个工件所用的最大时间不超过 460 s。【结论】计算结果表明分支定界算法能够很快地给出该问题的最优排序。

关键词:截断学习效应;流水作业;排序;分支定界算法;加权总完工时间

中图分类号:O223;C934　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2017)05-0012-06

排序论是运筹学、组合优化、计算机科学、生产物流管理及工业工程中的一个重要问题[1-3]。在实际生产中,由于工人(机器)对工作熟悉程度的不断增加,会导致排在后面工件的加工时间越来越短,这就是学习效应[4]。但由于学习效应不能无限进行下去,所以产生截断学习效应,即给定了一个截断参数来进行控制,使该工件的学习效应随着排列位置的靠后而逐渐趋于稳定。Biskup[5]首次引入学习效应的数学模型,即工件 J_j 的实际加工时间为 $P_{jr}=P_jr^a$,其中 P_j 是工件 J_j 的正常加工时间,$a\leqslant 0$ 为学习因子,r 为工件 J_j 所排的位置,他证明了目标为极小化共同工期偏差与完工时间和的单机排序问题是多项式时间可解。Cheng 等人[6]提出了与 Biskup[5]不同的模型,即基于工件位置的线性函数学习效应模型:$P_{jr}=P_j-v_j\min\{r-1,n_{0j}\}(n_{0j}\leqslant n-1)$,其中 $v_j\left(v_j<\dfrac{P_j}{n_{0j}}\right)$表示与加工工件数量有关的学习率,$n_{0i}$表示工件 J_j 的学习效应稳定值。此后,Kuo 等人[7]又提出了有关依赖时间的学习效应模型,即 $P_{jr}=P_j\left(1+\sum\limits_{l=1}^{r-1}P_{[l]}\right)^a$,其中 $P_{[l]}$是排在第 l 个位置上的正常加工时间,$a\leqslant 0$ 为学习效应因子,他们证明了单机总完工时间排序问题能够利用最小加工时间优先(SPT)规则能得最优排序。此外,Mosheiov[8]研究了工件具有学习效应的平行机排序问题,证明了极小化完工时间问题存在多项式时间的最优算法。Mosheiov 等人[9]研究了所有工件都有共同学习率的极小化最大务工工件数问题。Bachman 等人[10]研究了两种学习曲线模型,即线性模型与指数模型。Wang[11]研究了工件同时具有学习效应与恶化效应的单机与流水作业排序问题,并对一些目标函数给出了多项式时间最优算法。Wang[12]研究了工件同时具有学习效应与恶化效应的单机排序问题,提出了更具有一般性的新模型,并对一些目标函数给出了多项式时间最优算法。Wang 等人[13]研究了与文献[7]相同的模型,只是目标函数为加权总完工时间、最大延误和误工工件数。Wu 等人[14]研究了工件具有位置截断学习效应的排序问题,即工件 J_j 的实际加工时间为 $P_{jr}=P_j\max\{r^a,b\}$,其中 b 是一个给定的截断学习效应控制参数,$0<b<1$。王吉波等人[15]研究了工件具有准备时间和学习效应的单机排序问题。Wang 等人[16]研究了工件具有截断学习效应的另外一个模型,即工件 J_j 的实际加工时间为 $P_{jr}=P_j\max\{r^{a_j},b\}$,其中 $a_j\leqslant 0$ 为工件 J_j 的学习效应因子。王吉波等人[17]研究了工件具有可控加工时间和学习效应的单机排序问题。白静等人[18]研究了工件具有准备时间和截断学习效应的单机排序问题。刘颖等人[19]研究了工件具有学习效应的多客户配送的单机供应链排序问题。

上述研究大多数是对单机和平行机排序问题进行讨论,Wang 等人[20]研究了具有学习效应的流水作业排序

* **收稿日期**:2017-03-02　**修回日期**:2017-03-17　**网络出版时间**:2017-09-11 14:40
资助项目:国家自然科学基金(No.71471120);沈阳航空航天大学基金项目(No.201608Y)
第一作者简介:王雪茹,女,研究方向为运筹学与控制论,E-mail:wxrlittle@163.com;**通信作者**:王吉波,教授,E-mail:wangjibo75@163.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170911.1440.010.html

问题，对目标函数为最大完工时间、完工时间和这两个问题分别给出了近似算法，并分析了算法的最坏情况界。Wang[21]考虑了与文献[10]相同的模型，只是从单机问题变成了流水作业问题，并提出了把经典的Johnson规则作为一个启发式算法来解决两台机器的最大完工时间问题。Chen等人[22]研究了具有学习效应的流水作业排序问题，其中目标函数为总完工时间与最大延误的加权和的双目标函数。他们研究了此问题的一些性质，并给出了求解算法。孙林辉等人[23]研究了工件具有学习效应的总完工时间极小化流水作业排序问题。此外，Lee等人[24]研究了具有学习效应的总延误时间流水作业排序问题。Wang等人[25]研究了具有一般指数学习效应的流水作业排序问题，对几个正则目标函数分别给出了启发式算法。Shiau等人[26]研究了具有学习效应的两台机器双代理流水作业排序问题，其中目标函数为总完工时间。他们对此问题给出了一些性质，并给出了求解算法。Wang等人[27]研究了工件具有位置权学习效应的流水作业排序问题，对一个双目标函数问题，即最大完工时间与总完工时间的加权和问题给出了求解算法。

综上，对于截断学习效应的概念研究的大多数是单机排序问题，Wang等人[28]将截断学习效应和流水作业排序问题结合到一起，研究了具有截断学习效应的流水作业排序问题。对于几类正则目标函数，他们则给出了一些近似算法，并分析了这些算法的最坏情况界，同时用数值模拟的方法说明了这些算法的好坏。然而对一些目标函数给出的都是启发式算法，得到的解都是近似解，并没有给出求最优解的算法。本文研究与文献[28]相同的模型，机器限定为两台，目标函数为加权总完工时间，给出了优势性质、下界和上界，从而可以用分支定界算法求出最优解。

1 问题描述

设有 n 个工件 $J_1,J_2,\cdots,J_n$ 依次在两台机器 M_1 和 M_2 上加工，工件在每台机器上的加工顺序相同，即排列排序。工件在加工过程中要求机器不允许中断，也就是每个工件必须先在第一台机器上加工后才可以在第二台机器上进行加工，且同一台机器必须要结束上一个工序后才可以进行下一个工件工序的加工。同时假定工件 J_j 排在机器 $M_i(i=1,2)$ 上的实际加工时间为 $P_{ijr}=P_{ij}\max\{r^a,b\}$，其中 $i=1,2$；$r,j=1,2,\cdots,n$；P_{ij} 为工件在机器 $M_i(i=1,2)$ 上的正常加工时间；a 为学习因子，且 $a\leqslant 0$；r 表示工件所排的位置；b 是一个给定的截断学习效应的控制参数，且 $0<b<1$。令 C_{ij} 为工件 J_j 在机器 $M_i(i=1,2)$ 上的完工时间，目标是确定工件的加工顺序使得工件的加权总完工时间为最小，即 $\min\sum_{j=1}^{n}w_jC_j$，其中 $C_j=C_{2j}$ 为工件 J_j 的完工时间，优先因子 w_j 是工件 J_j 的一个权，它表示这个工件的重要程度。由于流水作业排序问题 $F_2||\sum C_j$ 是NP-困难的，因此问题 $F_2|P_{ijr}=P_{ij}\max\{r^a,b\}|\sum w_jC_j$ 也是NP-困难的。本文的目的是要找出一个最优的排序，使得具有截断学习效应的加权总完工时间最小，此问题可用三参数表示法表示为 $F_2|P_{ijr}=P_{ij}\max\{r^a,b\}|\sum w_jC_j$。

2 优势性质

假设 $S_1=(\pi_1,J_j,J_k,\pi_2)$ 为工件的一个排序，其中 π_1,π_2 为已知的部分排序，J_j 和 J_k 分别为排在 S_1 上的第 r 和第 $r+1$ 个位置的工件，将其中的工件 J_j 和工件 J_k 交换位置，可得另外一个排序 $S_2=(\pi_1,J_k,J_j,\pi_2)$。如果工件满足如下两个条件，可以得到 S_1 优于 S_2，即：$C_{1k}(S_1)\leqslant C_{1j}(S_2)$，$C_k(S_1)\leqslant C_j(S_2)$ 和 $w_jC_j(S_1)+w_kC_k(S_1)\leqslant w_jC_j(S_2)+w_kC_k(S_2)$。

性质1　若 $C_{1k}(S_1)\leqslant C_{1j}(S_2)$，$C_j(S_1)\leqslant C_k(S_2)$，$C_k(S_1)\leqslant C_j(S_2)$，且 $w_j\geqslant w_k$，则 S_1 优于 S_2。

证明　当 $C_j(S_1)\leqslant C_k(S_2)$，$C_k(S_1)\leqslant C_j(S_2)$ 时，有 $w_jC_j(S_1)+w_kC_k(S_1)\leqslant w_jC_k(S_2)+w_kC_j(S_2)$。又因为 S_2 中工件 J_k 排在工件 J_j 之前，所以 $C_k(S_2)\leqslant C_j(S_2)$，又由 $w_j\geqslant w_k$，有：

$$[w_jC_k(S_2)+w_kC_j(S_2)]-[w_jC_j(S_2)+w_kC_k(S_2)]=(w_j-w_k)[C_k(S_2)-C_j(S_2)]\leqslant 0,$$

故 $w_jC_j(S_1)+w_kC_k(S_1)\leqslant w_jC_j(S_2)+w_kC_k(S_2)$ 成立。　　证毕

3 下界

设机器要加工 n 个工件，已知前 k 个是已经排好的工件序列，第 k 个工件之后的工件未进行排序。令 $J_{[l]}$ 表示排在第 l 个位置的工件，由此可以得出第 $k+1$ 个工件的完工时间为：

$$C_{[k+1]}=\max\{C_{[k]},C_{1[k]}+P_{1[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}\}+P_{2[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}。$$

当 $C_{[k]} \geqslant C_{1[k]}+P_{1[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}$时,有:

$$C_{[k+1]}=\max\{C_{[k]},C_{1[k]}+P_{1[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}\}+P_{2[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}\geqslant C_{[k]}+P_{2[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}。$$

同理,可以求出第 $k+2$ 个工件的完工时间满足:

$$C_{[k+2]}=\max\{C_{[k+1]},C_{1[k+1]}+P_{1[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}\}+P_{2[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}\geqslant$$
$$C_{[k+1]}+P_{2[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}\geqslant C_{[k]}+P_{2[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}+P_{2[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}。$$

类似可以得到第 n 个工件的完工时间满足:

$$C_{[n]}\geqslant C_{[k]}+P_{2[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}+P_{2[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}+\cdots+P_{2[n]}\max\{n^a,b\}。$$

则加权总完工时间为:

$$\sum_{j=1}^{n}w_jC_j=\sum_{j=1}^{k}w_jC_j+\sum_{j=k+1}^{n}w_jC_j=\sum_{j=1}^{k}w_jC_j+C_{[k+1]}w_{[k+1]}+C_{[k+2]}w_{[k+2]}+\cdots+C_{[n]}w_{[n]}\geqslant$$
$$\sum_{j=1}^{k}w_jC_j+(C_{[k]}+P_{2[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\})w_{[k+1]}+(C_k+P_{2[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\})w_{k+2}+\cdots+$$
$$(C_k+P_{2[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}+\cdots+P_{2[n]}\max\{n^a,b\})w_n\geqslant$$
$$\sum_{j=1}^{k}w_jC_j+C_k\sum_{j=k+1}^{n}w_{[j]}+\sum_{j=k+1}^{n}w_{[j]}\left(\sum_{l=k+1}^{j}P_{2[l]}\max\{l^a,b\}\right)。$$

令 $w_{\min}=\min\{w_{k+1},w_{k+2},\cdots,w_n\}$,则可以得到第一个下界为:

$$LB_1=\sum_{j=1}^{k}w_jC_j+C_k\sum_{j=k+1}^{n}w_j+w_{\min}\left(\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{l=k+1}^{j}P_{2(l)}\max\{l^a,b\}\right),\tag{1}$$

其中,$P_{2(k+1)}\leqslant P_{2(k+2)}\leqslant\cdots\leqslant P_{2(n)}$。可由文献[14]知 $\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{l=k+1}^{j}P_{2[l]}\max\{l^a,b\}$ 的最小值把工件按照 P_{2j} 的从小到大排序得到。

为了得到分支定界算法的另一个下界,当 $C_{[k]}\leqslant C_{1[k]}+P_{1[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}$时,有:

$$C_{[k+1]}=\max\{C_{[k]},C_{1[k]}+P_{1[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}\}+P_{2[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}\geqslant$$
$$C_{1[k]}+P_{1[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}+P_{2[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}。$$

同理,第 $k+2$ 个工件的完工时间满足:

$$C_{[k+2]}=\max\{C_{[k+1]},C_{1[k+1]}+P_{1[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}\}+P_{2[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}\geqslant$$
$$C_{1[k+1]}+P_{1[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}+P_{2[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}\geqslant$$
$$C_{1[k]}+P_{1[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}+P_{1[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}+P_{2[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}。$$

第 n 个工件的完工时间满足:

$$C_{[n]}\geqslant C_{1[k]}+P_{1[k+1]}\max\{(k+1)^a,b\}+P_{1[k+2]}\max\{(k+2)^a,b\}+\cdots+P_{1[n]}\max\{n^a,b\}+P_{2[n]}\max\{n^a,b\},$$

则加权总完工为:

$$\sum_{j=1}^{n}w_jC_j=\sum_{j=1}^{k}w_jC_j+\sum_{j=k+1}^{n}w_jC_j=\sum_{j=1}^{k}w_jC_j+\sum_{j=k+1}^{n}w_jC_{1k}+\sum_{j=k+1}^{n}w_{[j]}\left(\sum_{l=k+1}^{j}P_{1[l]}\max\{l^a,b\}+P_{2[j]}\max\{j^a,b\}\right)\geqslant$$
$$\sum_{j=1}^{k}w_jC_j+\sum_{j=k+1}^{n}w_jC_{1k}+\sum_{j=k+1}^{n}w_j\left(\sum_{l=k+1}^{j}P_{1[l]}\max\{l^a,b\}\right)+\sum_{j=k+1}^{n}w_{[j]}P_{2[j]}\max\{j^a,b\}。$$

令 $w_{\min}=\min\{w_{k+1},w_{k+2},\cdots,w_n\}$,$\sum_{j=k+1}^{n}w_jC_{1k}$ 是一个常数,$\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{l=k+1}^{j}P_{1[l]}\max\{l^a,b\}$ 的最小值可以把工件按照 P_{1j} 的从小到大排序得到,$\sum_{j=k+1}^{n}w_{[j]}P_{2[j]}\max\{j^a,b\}$ 的最小值可以把工件按照 w_jP_{2j} 的从小到大排序得到[14],由此可以得到分支定界的另一个下界为:

$$LB_2=\sum_{j=1}^{k}w_jC_j+\sum_{j=k+1}^{n}w_jC_{1k}+w_{\min}\sum_{j=k+1}^{n}\sum_{l=k+1}^{j}P_{1(j)}\max\{l^a,b\}+\sum_{j=k+1}^{n}w_{\langle j\rangle}P_{2\langle j\rangle}\max\{j^a,b\},\tag{2}$$

其中,$P_{1(k+1)}\leqslant P_{1(k+2)}\leqslant\cdots\leqslant P_{1(n)}$,$w_{\langle k+1\rangle}P_{2\langle k+1\rangle}\leqslant w_{\langle k+2\rangle}P_{2\langle k+2\rangle}\leqslant\cdots\leqslant w_{\langle n\rangle}P_{2\langle n\rangle}$,$P_{1(j)}$ 和 $w_{\langle j\rangle}P_{2\langle j\rangle}$ 对应的工件不一定相同。为了使下界更优,可以从求出的两个下界中选择最大的,作为该问题的一个下界,即:

$$LB=\max\{LB_1,LB_2\}。\tag{3}$$

4 求解算法及数据仿真

由于 $F_2 \mid P_{ijr}=P_{ij}\max\{r^a,b\} \mid \sum w_j C_j$ 是 NP-困难的问题，故可以用启发式算法来求解大规模问题。该算法的优点主要是可以简化计算过程，降低计算量。但是这种方法只能得到排序问题的近似解而非精确解。但所得的近似解可以作为分支定界算法的初始解，即作为分支定界算法的上界。在分支过程中，如果有下界大于这个上界的分支，则可以直接进行剪枝。

4.1 启发式算法

受单机排序问题 $1 \| \sum_{j=1}^{n} w_j C_j$ 和文献[15]的启发，给出流水作业排序问题 $F_2 \mid P_{ijr}= P_{ij}\max\{r^a,b\} \mid \sum_{j=1}^{n} w_j C_j$ 的启发式算法，具体如下。

启发式算法(HA)　步骤 1，把工件按$\frac{P_{1j}}{w_j}$，$j=1,2,\cdots,n$ 非递减顺序排列；步骤 2，把工件按$\frac{P_{2j}}{w_j}$，$j=1,2,\cdots,n$ 非递减顺序排列；步骤 3，把工件按$\frac{P_{1j}+P_{2j}}{w_j}$，$j=1,2,\cdots,n$ 非递减顺序排列；步骤 4，把工件按权因子 w_j，$j=1,2,\cdots,n$ 非递增顺序排列；步骤 5，对步骤 1 到步骤 4，分别计算所求排序的目标函数，从中选取加权总完工时间最小的排序，设为 S；步骤 6，设 $k=1$；步骤 7，设 $i=k+1$；步骤 8，通过交换第 k 和第 i 个位置的工件得到新的排序 S'。如果 S'的加权总完工时间小于 S 的加权总完工时间，则用 S'代替 S；步骤 9，如果 $i<n$，则 $i=i+1$，转至步骤 8；步骤 10，如果 $k<n-1$，则置 $k=k+1$，转至步骤 7；否则，停止。

4.2 数据仿真

对启发式算法的精确度进行分析，计算机运行的硬件环境为：Intel(R)Core(TM)i5-3210M 处理器，4G 内存；软件环境为：Matlab 2014a。选取 4 个不同工件数 $n=10,30,70,100$，在相同的工件数中随机选取 10 组数，其中工件的加工时间 P_j 在[1,100]中随机产生，工件的权 w_j 在[1,50]中随机产生，学习效应因子 $a=-0.2$，-0.4，-0.6 和截断学习效应参数 $b=0.7$。对于分支定界算法分别给出了加权总完工时间平均、最大计算时间(单位：s)及平均和最大搜索节点数。对于启发式算法，给出了加权总完工时间与最优解之间的平均相对误差和最大相对误差，即相对误差定义为：$Z_1=\frac{\sum w_j C_j(\mathrm{HA})-\sum w_j C_j^*}{\sum w_j C_j^*}$，平均误差定义为 $R_0=\frac{\sum Z_1}{10}$，其中，$\sum w_j C_j(\mathrm{HA})$ 表示用启发式算法得到的加权总完工时间，$\sum w_j C_j^*$ 为分支定界算法得到的加权总完工时间，10 表示对每个问题取 10 组实例进行计算，最大误差 R_1 为相对误差 R_0 中最大的误差。

通过数值计算，从表 1 可以得到启发式算法的最大误差为 0.411 7。再由表 2 可以看出分支定界算法的运行时间会随着工件数量的增加而显著上升，当工件为 100 时，运行时间为 458.229 5 s。

表 1　启发式算法和分支定界算法误差计算结果

Tab. 1　Error results of the heuristic algorithm and the branch-and-bound algorithm

n	a	R_0	R_1
10	−0.2	0.186 4	0.342 7
	−0.4	0.127 7	0.296 6
	−0.6	0.189 3	0.381 4
30	−0.2	0.173 1	0.290 4
	−0.4	0.173 0	0.411 7
	−0.6	0.181 0	0.260 0
70	−0.2	0.188 5	0.268 4
	−0.4	0.178 9	0.285 2
	−0.6	0.158 7	0.311 1
100	−0.2	0.175 8	0.264 6
	−0.4	0.208 2	0.279 7
	−0.6	0.192 3	0.243 1

表 2　启发式算法和分支定界算法计算时间的结果

Tab. 2　CPU time of the heuristic algorithm and the branch-and-bound algorithm

n	a	启发式算法时间/s		分支定界法计算时间/s		分支定界法节点个数	
		平均值	最大值	平均值	最大值	平均值	最大值
10	−0.2	0.008 1	0.010 6	0.029 8	0.043 2	367	459
	−0.4	0.007 2	0.008 0	0.022 0	0.031 8	283	406
	−0.6	0.007 1	0.007 8	0.027 8	0.035 6	366	450
30	−0.2	0.100 4	0.289 9	1.952 4	1.980 0	12 269	13 050
	−0.4	0.080 0	0.082 7	1.970 6	2.041 7	13 007	13 874
	−0.6	0.081 7	0.090 3	1.995 2	2.095 4	13 050	13 906
70	−0.2	0.612 2	0.683 5	85.279 9	85.759 0	105 291	169 120
	−0.4	0.614 6	0.628 7	84.992 0	85.243 6	98 762	138 060
	−0.6	0.600 8	0.609 9	85.049 7	85.273 3	110 565	157 511
100	−0.2	1.441 9	1.745 7	451.187 9	458.229 5	418 621	495 100
	−0.4	1.419 6	1.437 6	449.523 1	452.362 6	390 785	445 087
	−0.6	1.404 9	1.430 7	447.637 9	453.775 0	400 865	485 612

5 结论

本文研究了工件具有截断学习效应的加权总完工时间流水作业排序问题,机器限定为两台。由于没有截断学习效应的排序问题为NP-难问题,所以本文研究的问题也是NP-难问题,由此提出了优势性质,一个启发式算法以及两个下界来找到该问题的近似解和最优解。此类问题还有进一步研究的价值,如在多台(大于两台)机器进行加工、不同的目标函数或受到其他因素影响下的排序问题等。

参考文献:

[1] 唐国春,张峰,罗守成,等.现代排序论[M].上海:上海科学普及出版社,2003.
TANG G C,ZHANG F,LUO S C,et al.Theory of modern scheduling[M].Shanghai:Shanghai Science Popularization Press,2003.

[2] 张雪,罗成新.带有可控加工时间和准备时间的单机排序问题[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2016,33(2):4-8.
ZHANG X,LUO C X.Single machine scheduling problem with controllable processing time and setup under convex resource consumption cost[J].Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2016,33(2):4-8.

[3] 荣建华,彭丽,张玲玲,等.一个可中断三台可拒绝平行机半在线排序问题[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2016,33(3):15-19.
RONG J H,PENG L,ZHANG L L,et al.Preemptive semi on-line scheduling on three identical machines with rejection[J].Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2016,33(3):15-19.

[4] BISKUP D. A state-of-the-art review on scheduling with learning effects[J]. European Journal of Operational Research,2008,188:315-329.

[5] BISKUP D.Single-machine scheduling with learning considerations[J]. European Journal of Operational Research,1999,115:173-178.

[6] CHENG T C E,WANG G.Single machine scheduling with learning effect considerations[J].Annals of Operations Research,2000,98:273-290.

[7] KUO W H,YANG D L.Minimizing the total completion time in a single-machine problem with a time-dependent learning effect[J]. European Journal of Operational Research,2006,174:1184-1190.

[8] MOSHEIOV G.Parallel machine scheduling with a learning effect[J]. Journal of the Operational Research Society,2001,52:1165-1169.

[9] MOSHEIOV G,SIDNEY J B.Note on scheduling with general learning curves to minimize the number of tardy jobs[J].Journal of the Operational Research Society,2005,56:110-112.

[10] BACHMAN A,JANIAK A.Scheduling jobs with position-dependent processing times[J].Journal of the Operational Research Society,2004,55:257-264.

[11] WANG J B.A note on scheduling problems with learning effect and deteriorating jobs[J].International Journal of Systems Science,2006,37:827-833.

[12] Wang J B. Single-machine scheduling problems with the effects of learning and deterioration[J].Omega the International Journal of Management Science,2007,35:397-402.

[13] WANG J B,NG C T,CHENG T C E,et al.Single machine scheduling with a time-dependent learning effect[J].International Journal of Production Economics,2008,111:802-811.

[14] WU C C,YIN Y,CHENG S R. Single-machine and two-machine flowshop scheduling problems with truncated position-based learning functions[J].Journal of the Operational Research Society,2012,64:147-156.

[15] 王吉波,刘璐.带准备时间的任务单机学习效应排序问题[J].大连理工大学学报,2013,53(6):930-936.
WANG J B,LIU L.Single-machine learning effect scheduling jobs with release time[J].Journal of Dalian University of Technology,2013,53(6):930-936.

[16] WANG X R,JIN J,WANG J B,et al.Single machine scheduling with truncated job-dependent learning effect[J].Optimization Letters,2014,8:669-677.

[17] 王吉波,汪佳,牛玉萍.具有学习效应的单机可控加工时间排序问题研究[J].沈阳航空航天大学学报,2014,31(5):82-86.
WANG J B,WANG J,Niu Y.A single machine scheduling with learning effect and controllable processing times[J].Journal of Shenyang Aerospace University,2014,31(5):82-86.

[18] 白静,刘璐,王吉波.具有截断学习效应和工件带准备时间的单机排序问题[J].运筹与管理,2014,23(6):152- 156.
BAI J,LIU L,WANG J B.Single-machine scheduling jobs with truncated learning effect and release times[J].Operations Research and Management Science,2014,23(6):152-156.

[19] 刘颖,张新功.带有学习效应的多客户配送的供应链排序问题[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2015,32(5):19-25.
LIU Y,ZHANG X G.The supply chain scheduling with

learning effect and multi-customers distribution[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2015, 32(5): 19-25.

[20] WANG J B, XIA Z Q. Flow shop scheduling with a learning effect[J]. Journal of the Operational Research Society, 2005, 56: 1325-1330.

[21] WANG J B. Flow shop scheduling jobs with position-dependent processing times[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2005, 18: 383-391.

[22] CHEN P, WU C C, LEE W C. A bi-criteria two-machine flow shop scheduling problem with a learning effect[J]. Journal of the Operational Research Society, 2006, 57(9): 1113-1125.

[23] 孙林辉，王丹，王吉波. 具有学习效应的总完工时间流水作业问题[J]. 系统管理学报，2011，20(1): 114-118.
SUN L H, WANG D, WANG J B. Flowshop problem to minimize total completion time with a learning effect[J]. Journal of Systems and Management, 2011, 20(1): 114-118.

[24] LEE W C, CHUNG Y H. Permutation flowshop scheduling to minimize the total tardiness with learning effects [J]. International Journal of Production Economics, 2013, 141: 327-334.

[25] WANG J B, WANG J J. Flowshop scheduling with a general exponential learning effect[J]. Computers & Operations Research, 2014, 43: 292-308.

[26] SHIAU Y R, TSAI M S, LEE W C, et al. Two-agent two-machine flowshop scheduling with learning effects to minimize the total completion time[J]. Computers & Industrial Engineering, 2015, 87: 580-589.

[27] WANG J J, ZHANG B H. Permutation flowshop problems with bi-criterion makespan and total completion time objective and position-weighted learning effects[J]. Computers & Operations Research, 2015, 58: 24-31.

[28] WANG X Y, ZHOU Z, ZHANG X, et al. Several flow shop scheduling problems with truncated position-based learning effect[J]. Computers & Operations Research, 2013, 40: 2906-2929.

Operations Research and Cybernetics

Flow Shop Scheduling Problem with Truncated Learning Effects

WANG Xueru, BAI Xuelian, WANG Jibo, YIN Na

(School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

Abstract: [**Purposes**]In order to give the optimal solution of the total weighted completion time flow shop scheduling problem with truncated learning effects. [**Methods**]A mathematical model of the total weighted completion time flow shop scheduling problem with truncated learning effects is established, the dominance property, lower bounds and a heuristic algorithm are proposed, thus the branch and bound algorithm can be used to obtain the optimal solution of the problem. [**Findings**]Numerical simulations show that the solutions of the heuristic algorithm are quite accurate and very fast; the efficiency of the branch and bound algorithm is very efficient, 100 jobs of the max CPU time of the branch and bound algorithm is 460s. [**Conclusions**]Computational experiments show that the optimal schedule can be obtained quickly by the branch and bound algorithm.

Keywords: truncated learning effect; flow shop; scheduling; branch and bound algorithm; total weighted completion time

(责任编辑　黄　颖)