DOI:10.11721/cqnuj20170431

关于一些李型单群的 ONC-刻画*

何立官
(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

摘要:【目的】为了弱化有限单群数量刻画的数量条件。【方法】用第一 ONC-度量 $\mathrm{ONC}_1(G)$ 刻画了李型单群 $L_2(q)$($q=11,13,16,19,23,25,29$)。【结果】证明了 $L_2(q)$($q=11,13,19,23,29$)可以由 $\mathrm{ONC}_1(G)$ 唯一确定,并给出了在条件 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(L_2(q))$($q=16,25$)下,$G$ 的分类。【结论】结果说明不是所有李型单群 $L_2(q)$ 都可以 ONC-刻画。

关键词:李型单群;ONC-度量;ONC-刻画
中图分类号:O152.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2017)05-0049-05

1 预备知识及符号说明

20 世纪 80 年代,Thompson 提出著名猜想:同阶型群具有相同的可解性。该猜想由施武杰教授于 1987 年在澳大利亚国际会议上公开,即:

猜想 1 (Thompson 猜想)设 G,M 都是有限群,$S_n(G)$ 表示群 G 中 n 阶元组成的集合。如果 $|S_n(G)|=|S_n(M)|$,$n=1,2,3\cdots$,那么 G 与 M 有相同的可解性,即 G 可解当且仅当 M 可解。

该猜想从提出到现在还没有得到完整解决。同一时期,施武杰教授提出"用群阶和元素阶之集刻画有限单群"的著名猜想[1],即:

猜想 2 (施武杰猜想)设 G 是有限群,M 是有限单群,则 $G\cong M$ 当且仅当 $|G|=|M|$ 且 $\pi_e(G)=\pi_e(M)$,其中 $\pi_e(G)$ 表示群 G 中元素阶的集合。

猜想 2 提出后的 30 多年时间里,施武杰教授等人做了大量工作,证明了它对几乎所有有限单群都成立[2-8]。最后在中俄两国群论工作者的共同努力下,猜想 2 于 2009 年被完全证明[9]。现在,如何弱化猜想 2 的条件就成为人们关注的热点问题。

对于猜想 1,人们从最高阶元的个数出发,证明了它在一些特殊条件下是成立的[10-14]。而对于猜想 2,在文献[15-20]中,作者仅用最高阶元的阶和群的阶刻画了系列单群,部分的弱化了猜想 2 的条件。这些工作足以说明最高阶元在刻画群的结构性质中有着特殊的地位。本文试图去掉"同阶型群"、"群阶相等"、"元素阶集合相同"这些在数量刻画中非常重要的数量条件,只借助于与群中最高阶元素有关的几个数量来刻画有限群特别是有限单群。

为了叙述方便,下面先对本文中出现的一些符号加以说明。

设 G 是有限群,$\pi_e(G)$ 表示群 G 的元素阶的集合。i 是一个正整数,$\pi(i)$ 是 i 的相异素因子的集合,$\pi(G)=\pi(|G|)$。$o_1(G)$ 表示 G 中最高阶元素的阶,$n_1(G)$ 表示 G 中最高阶元素的个数。设 G 一共有 r 个 $o_1(G)$ 阶元,其中心化子的阶两两不同,并依次设这些中心化子的阶为 $c_1(G)$,$c_2(G)$,$\cdots$,$c_r(G)$。令 $\mathrm{ONC}_1(G)=\{o_1(G);n_1(G);c_1(G),c_2(G),\cdots,c_r(G)\}$,称 $\mathrm{ONC}_1(G)$ 为 G 的第一 ONC-度量。$\Gamma(G)$ 表示 G 的素图,$t(G)$ 表示 $\Gamma(G)$ 的连通分支数,并记 $\Gamma(G)$ 的连通分支为 $\{\pi_i,i=1,2,\cdots,t(G)\}$。如果 G 的阶为偶数,则规定 $2\in\pi_1$[21]。$\varphi(x)$ 表示 x 的欧拉函数。设 K,H 是两个群,用 $K\cdot H$ 表示 K 由 H 的半直积。其余符号及术语是标准的。

设 G 为一个有限群,H 是任意群。如果当 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(H)$ 时,一定有 $G\cong H$,那么称 G 是可以 ONC-刻画的。

* **收稿日期:**2016-09-05 **修回日期:**2017-07-18 **网络出版时间:**2017-05-16 11:25
资助项目:国家自然科学基金(No.11271301);重庆市基础与前沿研究计划(No.cstc2015jcyjA00020);重庆市教委科技项目(No.KJ1600325)
第一作者简介:何立官,男,副教授,博士,研究方向为有限群,E-mail:guanlihe@126.com
网络出版地址:http://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20170516.1125.042.html

文献[22]用ONC-度量刻画了散在单群、单K_3-群,证明了几乎所有散在单群和单K_3-群都是可以ONC-刻画的。本文将继续这一工作,主要对文献[23]中出现的李型单群$L_2(q)$进行讨论,其中q为不超过30的素数幂。由于文献[22]已经讨论了$L_2(4)\cong L_2(5)\cong A_5$,$L_2(7)$,$L_2(8)$,$L_2(9)\cong A_6$,$L_2(17)$,因此本文只讨论$q=11,13,16,19,23,25,29$的情形。而对$q=27$,由于情形要复杂得多,本文暂不讨论。

2 主要引理

引理1[21] 设群G的素图分支大于1,则G的结构是如下之一:

1) G是Frobenius群或2-Frobenius群;

2) G有一正规列$1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得H和G/K是π_1-群,K/H是非交换单群,其中$2\in\pi_1$,H为幂零群,而且$|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$。

引理2[24] 设G是偶阶Frobenius群,K是Frobenius核,H是Frobenius补,则$t(G)=2$且$\Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$。

引理3[24] 设G是偶阶2-Frobenius群,则$t(G)=2$,且G有正规列$1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得$\pi(K/H)=\pi_2$,$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1$,$|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|$,$G/K$和$K/H$均为循环群。特别地$|G/K|<|K/H|$,$G$可解。

引理4[25] 设π'-群H作用在π-群G上,且G和H中至少有一个可解,则对任意素数$p\,|\,|G|$,G中存在H-不变的Sylow p-子群,并且G的任意两个H-不变Sylow p-子群在$C_G(H)$下共轭。

3 定理及证明

定理1 设G为有限群,M为$L_2(q)$ $(q=11,13,19,23,29)$。则$G\cong M$的充分必要条件是$\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(M)$。

证明 必要性显然,只讨论充分性。

当$q=11$时,$\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(L_2(11))=\{11;2^3\cdot3\cdot5;11\}$。因为$G$的11阶元都是自中心化的,所以任何11阶元$a$所在的共轭类长度都是$|G/C_G(\langle a\rangle)|=|G/\langle a\rangle|=|G|/11$。设$G$的11阶元一共分为$t$个共轭类,则$t\cdot|G|/11=2^3\cdot3\cdot5$,从而有$|G|\,|\,2^3\cdot3\cdot5\cdot11$。由$n_1(G)=2^3\cdot3\cdot5$知$|G|\geqslant2^3\cdot3\cdot5$。因为$o_1(G)=11$,所以$11\in\pi(G)$。如果$2\notin\pi(G)$,那么$|G|=3\cdot5\cdot11$。设$x$为$G$的Sylow 11-子群的个数,则$x=11k+1$且$x\,|\,(3\cdot5)$。此时$n_1(G)=10x=2^3\cdot3\cdot5$,这不可能,故$2\in\pi(G)$。同理可证$3\in\pi(G)$。于是有$\{2,3,11\}\subset\pi(G)$。

由$o_1(G)=11$知11是$\Gamma(G)$的孤立点,从而$t(G)\geqslant2$。由引理1知G或者是Frobenius群,或者是2-Frobenius群,或者G有一正规列$1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得H和G/K是π_1-群,K/H是非交换单群,其中$2\in\pi_1$,H为幂零群,而且$|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$。下证$G$既不是Frobenius群,也不是2-Frobenius群。

设G是Frobenius群,由引理2知$t(G)=2$且$\Gamma(G)=\{\pi(H),\pi(K)\}$,其中$K$是Frobenius核,$H$是Frobenius补,所以$K$要么是$G$的Sylow 11-子群,要么是$G$的$11'$-Hall子群。设$S$为$K$的一个Sylow-子群,因为$K$幂零,所以有$|H|\,|\,(|S|-1)$。于是可以选择$K$的一个适当的Sylow-子群$S$使得$|H|\nmid(|S|-1)$,从而得出矛盾。因此$K$不可能是Sylow 11-子群。故设$K$是$11'$-Hall子群。考虑$K$的Sylow 3-子群,有$11|2$,矛盾。因此$G$不是Frobenius群。

如果G是2-Frobenius群,则由引理3知:$t(G)=2$且G有正规列$1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得$\pi(K/H)=\pi_2$,$\pi(H)\cup\pi(G/K)=\pi_1$,$|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|$。因为11是$\Gamma(G)$的孤立点,所以$\pi_2=\{11\}$,因此$\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,5\}$且$|K/H|=11$。又因为$|G/K|\,|\,|\mathrm{Aut}(K/H)|=10$,所以$3\nmid|G/K|$,于是$3\,|\,|H|$。用$G$中的11阶元$g$共轭作用在$H$上,由引理4知存在$H$的Sylow 3-子群$L$在该作用下不变。因为$11\nmid|\mathrm{Aut}(L)|$,所以该作用为平凡作用,即$G$中有33阶元,矛盾。因此$G$不是2-Frobenius群。

于是G有一正规列$1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得H和G/K是π_1-群,K/H是非交换单群,其中$2\in\pi_1$,H为幂零群,而且$|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$。因为11是$\Gamma(G)$的孤立点,所以$\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,5\}$,$11\in\pi(K/H)$,从而由文献[23]知$K/H\cong L_2(11)$。如果$|G|=2^2\cdot3\cdot5\cdot11$,那么$H=1$,$G=K$,即$G\cong L_2(11)$。设$|G|=2^3\cdot3\cdot5\cdot11$,因为$|\mathrm{Out}(L_2(11))|=2$,所以$|G/K|=1$或2。如果$|G/K|=1$,比较$G$的阶有$|H|=2$。用$G$

中的 11 阶元作用在 H 上，该作用平凡，从而产生 22 阶元，矛盾。因此 $|G/K|=2$。此时 $K/H=K\cong L_2(11)$，故 $G=L_2(11)\times Z_2$ 或 $G=L_2(11)\cdot Z_2$，其中 $L_2(11)\cdot Z_2$ 表示 $L_2(11)$ 由 Z_2 的半直积。如果 $G=L_2(11)\times Z_2$，则 G 有 22 阶元，矛盾。如果 $G=L_2(11)\cdot Z_2$，则 $o_1(G)=12$，矛盾。于是 $G\cong L_2(11)$。

当 $q=13$ 时，$\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(L_2(13))=\{13;2^3\cdot 3\cdot 7;13\}$。类似情形 $q=11$ 的讨论知 $|G|\,|\,2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 13$，$\{2,7,13\}\subset\pi(G)$ 且 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,7\}$，$13\in\pi(K/H)$。于是由文献[23]知 K/H 只能同构于 $L_2(13)$。如果 $|G|=2^2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$，那么 $H=1$，$G=K$，即 $G\cong L_2(13)$。设 $|G|=2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 13$，因为 $|\mathrm{Out}(L_2(13))|=2$，所以 $|G/K|=1$ 或 2。如果 $|G/K|=1$，比较 G 的阶有 $|H|=2$。用 G 中的 13 阶元作用在 H 上，该作用平凡，从而产生 26 阶元，矛盾。故有 $|G/K|=2$。此时 $K/H=K\cong L_2(13)$，因此 $G=L_2(13)\times Z_2$ 或 $G=L_2(13)\cdot Z_2$，其中 $L_2(13)\cdot Z_2$ 表示 $L_2(13)$ 由 Z_2 的半直积。如果 $G=L_2(13)\times Z_2$，则 G 有 26 阶元，矛盾。如果 $G=L_2(13)\cdot Z_2$，则 $o_1(G)=14$，矛盾。于是 $G\cong L_2(13)$。

当 $q=19$ 时，$\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(L_2(19))=\{19;2^3\cdot 3^2\cdot 5;19\}$。类似情形 $q=11$ 的讨论知 $|G|\,|\,2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 19$，$\{2,5,19\}\subset\pi(G)$ 且 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,5\}$，$19\in\pi(K/H)$。于是由文献[23]知 K/H 只能同构于 $L_2(19)$。如果 $|G|=2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 19$，那么 $H=1$，$G=K$，即 $G\cong L_2(19)$。设 $|G|=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 19$，因为 $|\mathrm{Out}(L_2(19))|=2$，所以 $|G/K|=1$ 或 2。如果 $|G/K|=1$，比较 G 的阶有 $|H|=2$。用 G 中的 19 阶元作用在 H 上，该作用平凡，从而产生 38 阶元，矛盾。于是 $|G/K|=2$。此时 $K/H=K\cong L_2(19)$，故 $G=L_2(19)\times Z_2$ 或 $G=L_2(19)\cdot Z_2$。如果 $G=L_2(19)\times Z_2$，则 G 有 38 阶元，矛盾。如果 $G=L_2(19)\cdot Z_2$，则 $o_1(G)=20$，矛盾。于是 $G\cong L_2(19)$。

当 $q=23$ 时，$\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(L_2(23))=\{23;2^4\cdot 3\cdot 11;23\}$。类似情形 $q=11$ 的讨论知 $|G|\,|\,2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$，$\{2,3,23\}\subset\pi(G)$ 且 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,11\}$，$23\in\pi(K/H)$。于是由文献[23]知 K/H 只能同构于 $L_2(23)$。如果 $|G|=2^3\cdot 3\cdot 11\cdot 23$，那么 $H=1$，$G=K$，即 $G\cong L_2(23)$。设 $|G|=2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$，因为 $|\mathrm{Out}(L_2(23))|=2$，所以 $|G/K|=1$ 或 2。如果 $|G/K|=1$，比较 G 的阶有 $|H|=2$。用 G 中的 23 阶元作用在 H 上，该作用平凡，从而产生 46 阶元，矛盾。于是 $|G/K|=2$。此时 $K/H=K\cong L_2(23)$，故 $G=L_2(23)\times Z_2$ 或 $G=L_2(23)\cdot Z_2$。如果 $G=L_2(23)\times Z_2$，则 G 有 46 阶元，矛盾。如果 $G=L_2(23)\cdot Z_2$，则 $o_1(G)=24$，矛盾。于是 $G\cong L_2(23)$。

当 $q=29$ 时，$\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(L_2(29))=\{29;2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7;29\}$。类似情形 $q=11$ 的讨论知 $|G|\,|\,2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 29$，$\{2,3,5,29\}\subseteq\pi(G)$ 且 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,5,7\}$，$29\in\pi(K/H)$。于是由文献[23]知 K/H 只能同构于 $L_2(29)$。如果 $|G|=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 29$，那么 $H=1$，$G=K$，即 $G\cong L_2(29)$。设 $|G|=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 29$。因为 $|\mathrm{Out}(L_2(29))|=2$，所以 $|G/K|=1$ 或 2。如果 $|G/K|=1$，比较 G 的阶有 $|H|=2$。用 G 中的 29 阶元作用在 H 上，该作用平凡，从而产生 58 阶元，矛盾。于是 $|G/K|=2$。此时 $K/H=K\cong L_2(29)$，故 $G=L_2(29)\times Z_2$ 或 $G=L_2(29)\cdot Z_2$。如果 $G=L_2(29)\times Z_2$，则 G 有 58 阶元，矛盾。如果 $G=L_2(29)\cdot Z_2$，则 $o_1(G)=30$，矛盾。于是 $G\cong L_2(29)$。　　证毕

定理 2　设 G 为有限群，且 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(L_2(16))=\{17;2^7\cdot 3\cdot 5;17\}$，则 G 至少同构于下列群之一：i) $L_2(16)$；ii) $L_2(16)\cdot Z_2$；iii) $\mathrm{Aut}(L_2(16))$。

证明　因为 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(L_2(16))=\{17;2^7\cdot 3\cdot 5;17\}$，类似定理 1 的讨论知 $|G|\,|\,2^7\cdot 3\cdot 5\cdot 17$，$\pi(G)=\{2,3,5,17\}$ 且 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$，使得 H 和 G/K 是 π_1-群，K/H 是非交换单群，其中 $2\in\pi_1$，H 为幂零群，而且 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$，$\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,5\}$，$17\in\pi(K/H)$。于是由文献[23]知 K/H 只能同构于 $L_2(16)$。

如果 $|G|=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 17$，那么 $H=1$，$G=K$，即 $G\cong L_2(16)$。

设 $|G|=2^5\cdot 3\cdot 5\cdot 17$，因为 $|\mathrm{Out}(L_2(16))|=4$，所以 $|G/K|\,|\,4$。如果 $|G/K|=1$，那么有 $|H|=2$。用 G 中的 17 阶元作用在 H 上，该作用平凡，从而产生 34 阶元，矛盾。故 $|G/K|=2$。此时 $K/H=K\cong L_2(16)$，由

文献[23]知至少有 $G\cong L_2(16)\cdot Z_2$。

设 $|G|=2^6\cdot 3\cdot 5\cdot 17$,因为 $|\mathrm{Out}(L_2(16))|=4$,所以 $|G/K|=1,2$ 或 4。如果 $|G/K|=1$ 或 2,则 $|H|=4$ 或 2。用 G 中的 17 阶元作用在 H 上,该作用平凡,从而产生 34 阶元,矛盾。故 $|G/K|=4$。此时 $K/H=K\cong L_2(16)$,由文献[23]知 $G\cong \mathrm{Aut}(L_2(16))$。

设 $|G|=2^7\cdot 3\cdot 5\cdot 17$,因为 $|\mathrm{Out}(L_2(16))|=4$,所以 $|G/K|\,|\,4$,此时 $2|\,|H|$ 且 $|H|\,|\,2^3$。用 G 中的 17 阶元作用在 $\Omega_1(Z_1(H))$ 上,该作用平凡,从而产生 34 阶元,矛盾。 证毕

定理3 设 G 为有限群,且 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(L_2(25))=\{13;2^4\cdot 3^2\cdot 5^2;13\}$,则 G 至少同构于下列群之一:i) $L_2(25)$;ii) $L_2(25)\cdot 2_2$,$L_2(25)\cdot 2_3$,其中 $2_2,2_3$ 为 $\mathrm{Out}(L_2(25))$ 的 2 个 2 阶元。

证明 因为 $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(L_2(25))=\{13;2^4\cdot 3^2\cdot 5^2;13\}$,类似定理 1 的讨论知 $|G|\,|\,2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 13$,$\pi(G)=\{2,3,5,13\}$ 且 G 有一正规列 $1\lhd H\lhd K\lhd G$,使得 H 和 G/K 是 π_1-群,K/H 是非交换单群,其中 $2\in\pi_1$,H 为幂零群,而且 $|G/K|\,|\,|\mathrm{Out}(K/H)|$,$\pi(H)\cup\pi(G/K)\subseteq\{2,3,5\}$,$13\in\pi(K/H)$。由文献[23]知 K/H 只能同构于 $L_2(25)$。如果 $3^2\,|\,|G|$,由 $|\mathrm{Out}(L_2(25))|=2^2$ 知 $3|\,|H|$。用 G 中的 13 阶元作用在 H 上,该作用平凡,从而产生 39 阶元,矛盾。于是 $3\nmid|H|$。如果 $|G|=2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 13$,那么 $H=1$,$G=K$,即 $G\cong L_2(25)$。

设 $|G|=2^4\cdot 3\cdot 5^2\cdot 13$,因为 $|\mathrm{Out}(L_2(16))|=4$,所以 $|G/K|\,|\,4$。如果 $|G/K|=1$,那么有 $|H|=2$。用 G 中的 13 阶元作用在 H 上,该作用平凡,从而产生 26 阶元,矛盾。故设 $|G/K|=2$。此时由文献[23]知至少有 $G\cong L_2(25)\cdot 2_1$,$G\cong L_2(25)\cdot 2_2$ 或 $G\cong L_2(25)\cdot 2_3$,其中 $2_1,2_2,2_3$ 为 $\mathrm{Out}(L_2(25))$ 的 3 个 2 阶元。当 $G\cong L_2(25)\cdot 2_1$ 时,$o_1(G)=26$,矛盾。于是 $G\cong L_2(25)\cdot 2_2$ 或 $G\cong L_2(25)\cdot 2_3$。 证毕

参考文献:

[1] MAZUROV V D,KHUKHRO E I.Unsolved problems in group theory[R].Novosibirsk:Institute of Mathematics,Russian Academy of Sciences,2010.

[2] SHI W J.A new characterization of the sporadic simple groups[J].Science Bulletin,1988,33(9):788.

[3] SHI W J,BI J X.A characteristic property for each finite projective special linear group[J].Lecture Notes in Math,1990,1456:171-180.

[4] SHI W J,BI J X.A characteristic of Suzuki-Recgroups[J].Science in China (Ser A),1991,34(1):14-19.

[5] SHI W J,BI J X.A characteristic of the alternating groups[J].Southeast Asian Bulletin of Mathematics,1992,16(1):81-90.

[6] SHI W J.Pure quantitative characterization of finite simple groups[J].Progress in Nature Science,1994,4(3):316-326.

[7] CAO H P,SHI W J.Pure quantitative characterization of finite projective special unitary groups[J].Science in China (Ser A),2002,45:761-772.

[8] XU M C,SHI W J.Pure quantitative characterization of finite simple groups ${}^2D_n(q)$ and $D_l(q)$ (l odd)[J].Algebra Colloquium,2003,10:427-443.

[9] VASIL'EV A V,GRECHKOSEEVA M A,MAZUROV V D.Characterization of the finite simple groups by spectrum and order[J].Algebra and Logic,2009,48(6):385-409.

[10] 杨成.最高阶元素个数不同的有限群[J].数学年刊,1993,14(5):561-576.
YANG C.Finite groups based on the numbers of elements of maximal order[J].Ann Math,1993,14(5):561-576.

[11] 姜友谊.最高阶元素个数为 $2p^2$ 的有限群是可解群[J].数学年刊,2000,21(1):61-64.
JANG Y Y.Finite groups with $2p^2$ elements of maximal order are solvable[J].Ann Math,2000,21(1):61-64.

[12] 杜祥林,姜友谊.最高阶元素个数为 $4p$ 的有限群[J].数学年刊,2004,29(3):198-200.
DU X L,JANG Y Y.On finite groups with $4p$ elements of maximal order[J].Ann Math,2004,29(3):198-200.

[13] HE L G,CHEN G Y.Solvability of finite groups with $10p$ elements of maximal order[J].Appl Math Computer,2006,21(1):431-436.

[14] 何立官,陈贵云.最高阶元素个数为 $10p^m$ 的有限群可解[J].西南大学学报(自然科学版),2007,29(6):1-4.
HE L G,CHEN G Y.Finite groups with $10p^m$ elements of maximal order are solvable[J].Journal of Southwest China University(Nature Science Edition),2007,29(6):1-4.

[15] HE L G,CHEN G Y.A new characterization of simple K_3-groups[J].Communications in Algebra,2012,40(10):3903-3911.

[16] HE L G,CHEN G Y.A new characterization of $L_2(q)$ where $q\leqslant 125$[J].Italian Journal of Pure and Applied Mathematics,2011,28:127-136.

[17] HE L G,CHEN G Y,XU H J.A new characterization of sporadic simple groups[J].Italian Journal of Pure and Applied Mathematics,2013,30:373-392.

[18] HE L G,CHEN G Y.A new characterization of simple

K_4-groups with type $L_2(p)$[J].Advances in Mathematics (CHINA),2014,43(5):667-670.

[19] 何立官,徐海静.关于单 K_3-群的自同构群的刻画[J].数学进展,2015,44(3):363-368.
HE L G,XU H J.A characterization of automorphism groups of simple K_3-groups[J].Advances in Mathematics (CHINA),2015,44(3):363-368.

[20] HE L G,CHEN G Y.A new characterization of simple K_4- groups[J].Journal of Mathematical Research with Applications,2015,35(4):400-406.

[21] WILLIAMS J S.Prime graph components of finite group [J].J Alg,1981,69:487-513.

[22] 何立官.群的阶及最高阶元素的阶与群结构[D].重庆:西南大学,2012.
HE L G.The relationship between the structure of a finite group and its order and largest element order[D].Chongqing: Southwest China University,2012.

[23] CONWAY J H,CURTIS R T,NORTON S P,et al.Atlas of finite groups[M].Oxford:Clarendon Press,1985.

[24] 陈贵云.关于 Frobenius 群和 2-Frobenius 群[J].西南师范大学学报(自然科学版),1995,20(5):485-487.
CHEN G Y.On structure of Frobenius group and 2-Frobenius group[J].Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition),1995,20(5):485-487.

[25] GORENSTEIN D.Finite groups[M].New York:Chelsea Publishing Company,1980.

An ONC-characterization of Some Simple Group of Lie Type

HE Liguan

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]It aims to find fewer numbers to characterize a finite simple group. [**Methods**]Simple groups $L_2(q)(q=11, 13, 16, 19, 23, 25, 29)$ are characterized only by $\mathrm{ONC}_1(G)$. [**Findings**]$L_2(q)$, $(q=11, 13, 19, 23, 29)$ can be uniquely determined by $\mathrm{ONC}_1(G)$, and the classifications of groups G are given under the condition $\mathrm{ONC}_1(G)=\mathrm{ONC}_1(L_2(q))(q=16, 25)$. [**Conclusions**] The present study showed that not all simple group $L_2(q)$ can be ONC-Characterized.

Keywords: simple group of Lie type; ONC-degree; ONC-characterization.

(责任编辑 黄 颖)